Teoremas de algebricidad o-minimal

Mayo 2020

1 Introduction

El objetivo de esta pequeña nota es dar una exposición de algunos teoremas de algebricidad en $\mathbb{R}^n$ utilizando la teoría de la o-minimalidad. Vale la pena mencionar que todos los resultados que mencionaremos son válidos para cualquier estructura o-minimal, sin embargo nos vamos a concentrar en los reales y los complejos. Esta exposición no contiene ningún resultado original, incluso la exposición está fuertemente inspirada en la bibliografía incluida, algunas veces solo haciendo traducciones al castellano.

2 Tame geometry (o-minimalidad)

2.1 Estructuras sobre $\mathbb{R}$

Definition 2.1. Una estructura sobre $\mathbb{R}$ es una familia $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de familias de subconjuntos $S_n = \{S \subseteq \mathbb{R}^n\}$ tales que:

1. Todas las familias S_n son cerradas bajo uniones e intersecciones finitas y complementos relativos a $\mathbb{R}^n$ i.e. es una sub-álgebra booleana.
2. La familia $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cerrada bajo productos cartesianos finitos.
3. Si $S \in S_{n+p}$ y $\pi_{n,p} : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$ es cualquier proyección de p coordenadas, entonces $\pi_{n,p}(S) \in S_p$.
4. Si $S \in S_n$ y σ es una permutación de $\{1, \ldots, n$ entonces $\sigma(S) = \{(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) : (x_1, \ldots, x_n) \in S\} \in S_n$.
5. Todos los cerrados de zariski de $\mathbb{R}^n$ (sobre $\mathbb{R}$) están en S_n.

Diremos que un subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es definible relativo a la familia $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $X \in S_n$.

Dados $X \in S_n, Y \in S_p$, diremos que una función $f : X \to Y$ es definible si su gráfica $\Gamma(f) \subseteq X \times Y \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$ pertenece a S_{n+p}.

Example. *La familia de cerrados de zariski no es un ejemplo de una subestructura pues no satisface la hipótesis tres.*

Example. *La familia de conjuntos semi-algebraicos sí es un ejemplo de estructura sobre $\mathbb{R}$ gracias al teorema de Tarski-Seidenberg, denotaremos a esta estructura a lo largo de este texto como $\mathbb{R}_{alg}$. Gracias a los axiomas 3 y 4 toda estructura contiene a $\mathbb{R}_{alg}$.*

Lemma 2.1. *Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $(a,b), (a,\infty), (-\infty, b) \in S_1$. Gracias a que S_1 es una sub-álgebra booleana es posible incluir también los intervalos cerrados o combinaciones entre abiertos y cerrados. En cualquier caso los llamaremos intervalos.*

Example. *La familia de todos los subconjuntos en el conjunto potencia es un ejemplo de subestructura sobre* $\mathbb{R}$.

Lemma 2.2. *Si* $\left(S^i\right)_{i\in I}$ *es una familia de estructuras sobre* $\mathbb{R}$*, entonces su intersección:* $\left(\bigcap_{i\in I} S^i\right)_n := \bigcap_{i\in I} S_n^i \subseteq \mathbb{R}^n$ *es una subestructura sobre* $\mathbb{R}$.

Remark 2.3. *Gracias al lema anterior, si* $T_n \subseteq \mathbb{R}^n$ *es una familia de subconjuntos, es posible hablar sin ambiguedad de la estructura generada por* $(T_n)_n$*, será la intersección de todas las subestructuras* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tales que* $T_n \subseteq S_n$*, gracias al ejemplo 2.1 sabemos que nuestra familia de índices no es vacía.*

Example. *Sea* T_{n+1} *el conjunto de todas las gráficas de las funciones* $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ *tales que existe algún abierto* $[0,1]^n \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ *y alguna función analítica* $\bar{f} : U \to \mathbb{R}$ *tales que para todo* $x \in [0,1]^n$, $f(x) = \bar{f}(x)$*. A la estructura generada por esta familia la llamaremos* $\mathbb{R}_{an}$*. Esta familia es muy parecida a la familia de los conjuntos sub-analíticos.*

Example. *Definimos* $T_2' = T_2 \cup \Gamma(exp)$ *y para* $n \neq 2$ $T_n' = T_n$ *igual al conjunto del ejemplo anterior. A la estructura generada por la familia* T_n' *la llamaremos* $\mathbb{R}_{an,exp}$.

2.2 Campos o-minimales

Definition 2.2. Una estructura sobre $\mathbb{R}$ es o-minimal cuando todo elemento en S_1 es igual a una unión finita de conjuntos $\{a\}$ o intervalos.

Example.

- *Gracias al teorema de Tarski-Seidenberg nuevamente,* $\mathbb{R}_{alg}$ *es un campo o-minimal.*
- *Gracias al teorema de van-den Dries (utilizando el teorema de Gabrielov)* $\mathbb{R}_{an}$ *es o-minimal.*
- *Gracias al teorema de Wilkie,* $\mathbb{R}_{an,exp}$ *es o-minimal.*

2.3 Análisis complejo o-minimal

En esta sección vamos a fijar el homeomorfismo euclidiano $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ y alguna estructura o-minimal sobre $\mathbb{R}$, digamos $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition 2.3. Una función definible $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es S-analítica en $z_0 \in \mathbb{C}$ si es analítica en el sentido usual.

Es importante notar que nuestra definición de analiticidad depende de la condición de definibilidad.

3 Imaginarios y cocientes topológicos

En esta sección vamos a extender las definiciones anteriores a un contexto geométrico global.

Definition 3.1. Sea S una estructura sobre $\mathbb{R}$. Una S^k-variedad es:

- Un espacio topológico M
- Dos familias finitas de abiertos $U_1, \ldots, U_m \subseteq M, V_1, \ldots, V_m \in S_n$
- Una familia de homeomorfismos $\phi_i : U_i \to V_i$ tales que $\phi_i(U_i \cap U_j) \in S_n$
- Las funciones $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_i(U_i \cap U_j)$ son definibles y C^k.

Definition 3.2. Una S-variedad compleja es una S^0-variedad tal que la familia de los conjuntos definibles $V_i \in S_{2n}$ y $\phi_{i,j}$ son funciones S-analíticas.

Definition 3.3. Sea M una S^0-variedad y $R \subseteq M \times M$ un conjunto definible y cerrado que induce una relación de equivalencia en M, definimos un S-cociente geométrico como una S^0-variedad N y una función $p : M \to N$ definible tal que la pre-imagen de todo punto coincide con una clase de equivalencia.

Theorem 3.1. *(van den Dries) Si M es una S^0-variedad y $R \subseteq M \times M$ una S-relación de equivalencia propia (la pre-imagen de un S-compacto $C \subseteq M$ es compacta bajo cualquiera de las dos proyecciones $R \to M$) entonces el S-cociente geométrico existe y es único.*

Remark 3.2. *Gracias al teorema anterior existe una noción de conjunto definible $X \subseteq M^n$ compatible con la noción relativa a S. Su nombre en la teoría de modelos es conjunto interpretable. Esto será necesario en la siguiente sección para enunciar el teorema de Chow.*

4 Chow o-minimal

Definition 4.1. Fijemos una estructura o-minimal S. Sea M una S-variedad compleja, diremos que un subconjunto cerrado $X \subseteq M$ es analítico en un punto $p \in X$ si existe un abierto $U \subseteq M$ tal que $U \cap X$ es igual al conjunto de ceros de una cantidad finita de funciones S-analíticas. Diremos que un conjunto cerrado $X \subseteq M$ es analítico cuando lo es en todos sus puntos. Diremo que X es S-analítico cuando además está en S.

El teorema clásico de Chow caracteriza a los subconjuntos analíticos de variedades proyectivas complejas, son algebraicos. Este teorema no es cierto cuando la variedad no es propia, por ejemplo $X = \Gamma(exp) \subseteq \mathbb{C}^2 = M$.

El teorema de Chow de Peterzil-Starchenko relaja la condición de ser propia a cambio de incluir la condición de definibilidad:

Theorem 4.1. *Sea M una S-variedad compleja cuasi-proyectiva y $X \subseteq M$ un subconjunto S-analítico, entonces X es algebráico.*

Gracias al siguiente lema, el teorema anterior generaliza la versión clásica del teorema de Chow:

Lemma 4.2. *Todo subconjunto analítico de una variedad proyectiva compleja es definible en $\mathbb{R}_{an}$.*

Existen por lo menos tres demostraciones del teorema 4.1 aunque por el momento solo una de ellas es válida para todos los campos o-minimales (a saber la demostración original de Peterzil-Starchenko).

A continuación resumimos algunos puntos importantes de las tres demostraciones:

1. (Demostración original) La demostración de Peterzil-Starchenko comienza demostrando una versión o-minimal general del teorema de Remmert-Stein:

   Theorem 4.3. *(Remmert-Stein o-minimal) Sea M una S-variedad compleja, $E \subseteq M$ un conjunto analítico (no necesariamente definible) y $X \subseteq M \backslash E$ S-analítico e irreducible, entonces la cerradura $\bar{X} \subseteq M$ también es S-analítico.*

   Es importante mencionar que este teorema no generaliza el teorema original pues las hipótesis del teorema original son de naturaleza local.

   Proof. (Demostración del teorema 4.1). Notemos que es suficiente con demostrar la versión afín del teorema para concluir la versión cuasi-proyectiva, es decir cuando $X \subseteq \mathbb{C}^n$ es S-analítico. En la notación del teorema de Remmbert-Stein consideramos $M = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ y $E = \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ tal que $X \subseteq \mathbb{C}^n = M \backslash E$, así que $\bar{X}$ es analítico en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Utilizando el teorema clásico de Chow, $\bar{X}$ al ser analítico es algebraico y por tanto X también es algebráico. ☐

Este teorema se puede pensar como una garantía para la continuación analítica de subconjuntos anlíticos, siempre y cuando sean S-definibles. El teorema clásico de Remmert-Stein requiere una hipótesis extra sobre la dimensión de X respecto a la de E que la definibilidad nos permite olvidar.

2. (Demostración vía Bishop)

   Theorem 4.4. *(Teorema de Bishop) Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto y $E \subseteq U$ un conjunto analítico. Supongamos que $X \subseteq U \backslash E$ es analítico de dimensión igual a $2k$ y con $2k$-volumen finito, entonces $\bar{X} \subseteq U$ es analítico.*

   Lemma 4.5. *Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto S-definible de dimensión k y acotado entonces su k-volumen es finito.*

3. (Demostración vía estratificación)

   Invitamos al lector a revisar los detalles en la página ocho del survey de Benjamin Baker.

5 GAGA

Definition 5.1.
- Si M es una S-variedad, definimos σ_M el S-sitio definible en M que consta de la categoría de abiertos definibles junto a los morfismos de inclusión. Las cubiertas admisibles son las cubrientes finitas de abiertos definibles.
- Definimos sobre σ_M la pregavilla de funciones S-analíticas de la siguiente manera, $\mathcal{O}_M(U)$ es el anillo de funciones S-analíticas de U a $\mathbb{C}$.

Theorem 5.1 (Teorema de Oka definible)**.** *$\mathcal{O}_M$ es una gavilla coherente.*

Definition 5.2. Si X es una variedad algebraica afín en $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ definida por un ideal radical I, definimos el funtor de definibilidad X^{def} como el functor que envía a X (en la categoría de variedades algebraicas sobre $\mathbb{C}$) a la S-variedad inducida.

Theorem 5.2 (Teorema GAGA definible)**.** *El funtor de definibilidad es faithfully-flat y la imagen escencial es cerrada bajo cocientes y sub-objetos.*

El teorema anterior aún es cierto cuando en lugar de considerar variedades algebraicas consideramos espacios algebraicos en el sentido de Artin.

6 Tricotomía

En esta sección relajaremos la definición de una estructura en dos sentidos, por un lado definiremos estructuras locales al rededor de un punto y por otro omitiremos la hipótesis de contener a todos los cerrados de zariski.

Definition 6.1. Una estructura generalizada sobre $\mathbb{R}$ es una familia $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de familias de subconjuntos $S_n = \{S \subseteq \mathbb{R}^n\}$ tales que:

1. Todas las familias S_n son cerradas bajo uniones e intersecciones finitas y complementos relativos a $\mathbb{R}^n$ i.e. es una sub-álgebra booleana.
2. La familia $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cerrada bajo productos cartesianos finitos.
3. Si $S \in S_{n+p}$ y $\pi_{n,p} : \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$ es cualquier proyección de p coordenadas, entonces $\pi_{n,p}(S) \in S_p$.
4. Si $S \in S_n$ y σ es una permutación de $\{1, \ldots, n$ entonces $\sigma(S) = \{(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) : (x_1, \ldots, x_n) \in S\} \in S_n$.

Además de los ejemplos anteriores, las estructuras de generalizadas incluyen nuevos ejemplos, notemos que nuevamente el concepto de estructura generada por una familia de subconjuntos está bien definida como en el lema 2.2.

La definición de estructura generalizada o-minimal es la misma que en el caso anterior.

Example. *Sea $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la estructura en $\mathbb{R}$ generada por todos los subconjuntos afines $\{x \in \mathbb{R}^n : mx + b = 0\}$ donde $m \in \mathbb{R}^{nm}, b \in \mathbb{R}^m$ y todos los semi-planos $\{x \in \mathbb{R}^n : mx + b > 0\}$ donde $m \in \mathbb{R}^{nm}, b \in \mathbb{R}^m$. A esta estructura la llamaremos $\mathbb{R}_{Vect}$*

Example. *Es posible generalizar la construcción anterior utilizando en lugar de escalares en $\mathbb{R}$, en algún anillo con división ordenado R tal que $\mathbb{R}$ sea un $R-$módulo.*

Example. *También es posible generalizar lo anterior si en lugar de considerar el espacio vectorial $\mathbb{R}$ consideramos $\mathbb{R}^n$ junto a una base fija ordenada, en ese caso es posible construir un orden total en $\mathbb{R}^n$ y demostrar que la estructura generada por funciones afines y semi-planos afines es o-minimal.*

La conjetura de tricotomía de Zilber establece condiciones geométricas para poder distinguir dentro de la familia de estructuras generalizadas a las que contienen la familia de cerrados de zariski. Para poder concluir un enunciado preciso es necesario restringir nuestro análisis a comportamientos locales, al rededor de un unpunto en una estructura o-minimal.

Definition 6.2. Sea $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una estructura generalizada o-minimal sobre $\mathbb{R}$, sea $x \in \mathbb{R}$, diremos que la estructura S es trivial en x para cualquier intervalo abierto (quizás no definible) $x \in I$ y cualquier función definible, continua $f : I \times I \to \mathbb{R}$, f es constante.

Es posible demostrar que para cualquer intervalo $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ la estructura inducida ya sea por $\mathbb{R}_{alg}$ o $\mathbb{R}_{Vect}$ no es trivial.

En este texto hemos estudiado únicamente estructuras inducidas en $\mathbb{R}$ sin embargo cuando consideramos campos reales cerrados nuevos e interesantes ejemplos aparecerán, el resultado de tricotomía es válido en ese contexto general.

Example. *Sea $\mathbb{R}^*$ una extensión no elementaria de $\mathbb{R}$, e $I_{inf} = \{x : |x| < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^*$ el conjunto de infinitesimales, es posible definir una estructura de grupo definible en el sentido de la definición posterior (estrictamente I_{inf} no es definible sin embargo es una intersección finita de conjuntos definibles) en I_{inf} tanto en $\mathbb{R}_{alg}$ como en $\mathbb{R}_{Vect}$.*

Definition 6.3. Sea $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una estructura generalizada sobre $\mathbb{R}$ tal que $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo acotado definible (se puede generalizar a intersección infinita de conjuntos definibles), diremos que I es un intervalo-grupo si existe una función definible $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

- Si $x, y \in I$ y $x + y \in I$ entonces $x + y = y + x$.
- Si $x, y, z \in I$ y todas las operaciones están definidas entonces $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- Existe algún $e \in I$ tal que para todo $x \in I$, lo siguiente está definido $x + e = e + x = x$.
- La función $+$ es continua y estrictamente creciente respecto al orden inducido en I en cada variable.
- Para cada $x \in I$, existe un $(-x) \in I$ tal que $x + (-x) = e$ y está definido.
- La función tiene los dominios e imágenes adecuadas.

Example. *Un ejemplo fundamental es la estructura inducida en cualquier intervalo por el R-módulo sobre cualquier espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ del ejemplo 6.*

El teorema de tricotomía caracteriza el comportamiento local en cualquier estructura o-minimal:

Theorem 6.1. *(Tricotomía de Zilber, Peterzil-Starchenko) Sea S una estructura o-minimal sobre $\mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$ un punto genérico, entonces solo una de las siguientes tres opciones puede ocurrir para cualquier intervalo $x \in I$:*

- *La estructura S es trivial en $x \in I$*
- *La estructura S induce un intervalo-grupo, de hecho corresponde a un intervalo grupo generado por una estructura afín de alún R-módulo para cierto anillo de división ordenado sobre $\mathbb{R}$. item La estructura S contiene todos los cerrados de zariski.*