TRANSFORMACIONES LINEALES II

Computación Gráfica

Rotaciones

- Transformación lineal que preserva producto punto entre vectores.
- Transforma bases de mano derecha a bases de mano derecha.
- En 3D, cada rotación fija un **eje de rotación** y rota por un **ángulo alrededor de ese eje**.
- Vemos el caso 2D. Consideramo un vector: $\vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- Suponemos que $\vec{\mathbf{b}}^t$ es una base ortonormal de mano derecha en 2D.
- Supongamos que queremos rotar $\vec{v}$, θ grados en sentido anti-horario alrededor del origen.
- Las coordenadas $\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}^t$ del vector rotado se pueden calcular:

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Rotaciones: 2D

- Que se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- También podemos rotar una base:

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Rotaciones: 3D

- Usando un sistema coordenado de mano derecha, una rotación de un vector por **θ** grados alrededor del **eje z** de la base se expresa:

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- Una rotación de un vector por **θ** grados alrededor del **eje x** de la base se expresa:

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Rotaciones: 3D

- Una rotación de un vector por **θ** grados alrededor del **eje y** de la base se expresa:

$$\begin{bmatrix} \vec{b_1} & \vec{b_2} & \vec{b_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{b_1} & \vec{b_2} & \vec{b_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- La composición de rotaciones resulta en otra rotación.
- Podemos tener una rotación arbitraria aplicando una rotación alrededor del eje-x, seguida de una alrededor del eje-y y luego una alrededor del eje-z.
- Las cantidades angulares de las tres rotaciones se conocen como **ángulos de Euler xyz**. (roll-pitch-yaw)

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Matrices de rotación R

- Matrices cuadradas, con elementos reales.
- Matrices ortogonales: $R^T = R^{-1}$ y $\det R = 1$.
- Si incluimos aquellas cuyo $\det R = -1$ incluimos también las reflexiones.
- El conjunto de las matrices de tamaño n con $\det R = +1$ forman un grupo llamado ortogonal especial $SO(n)$.
- En 3D es $SO(3)$.

ortogonal especial

(1) Vectores renglón unitarios

(2) Vectores renglón perpendiculares entre si (producto punto es cero)

(3) Los vectores columna también verifican las propiedades (1) y (2).

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Axis-angle

- Otra forma de representar una rotación arbitraria es tomar un vector unitario $\vec{k}$ como eje de rotación y aplicar directamente una rotación de θ radianes alrededor de éste.

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} k_x & k_y & k_z \end{bmatrix}^t$$

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} k_x^2 v + c & k_x k_y v - k_z s & k_x k_z v + k_y s \\ k_y k_x v + k_z s & k_y^2 v + c & k_y k_z v - k_x s \\ k_z k_x v - k_y s & k_z k_y v + k_x s & k_z^2 v + c \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c &:= \cos\theta \\ s &:= \sin\theta \end{aligned} \qquad v := 1 - c$$

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Rotaciones

- Dos rotaciones alrededor de ejes diferentes no conmutan entre sí.
- Cuando componemos dos rotaciones alrededor de dos ejes diferentes tenemos una rotación alrededor de un tercer eje.
- Diferentes parametrizaciones de rotaciones:
  - Matrices de rotación
  - Axis-angle
  - Ángulos de Euler
  - Cuaternios
  - Mapa exponencial

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Escalamientos

- Para escalar un vector por un factor **s** podemos usar:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{b_1} & \vec{b_2} & \vec{b_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{b_1} & \vec{b_2} & \vec{b_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

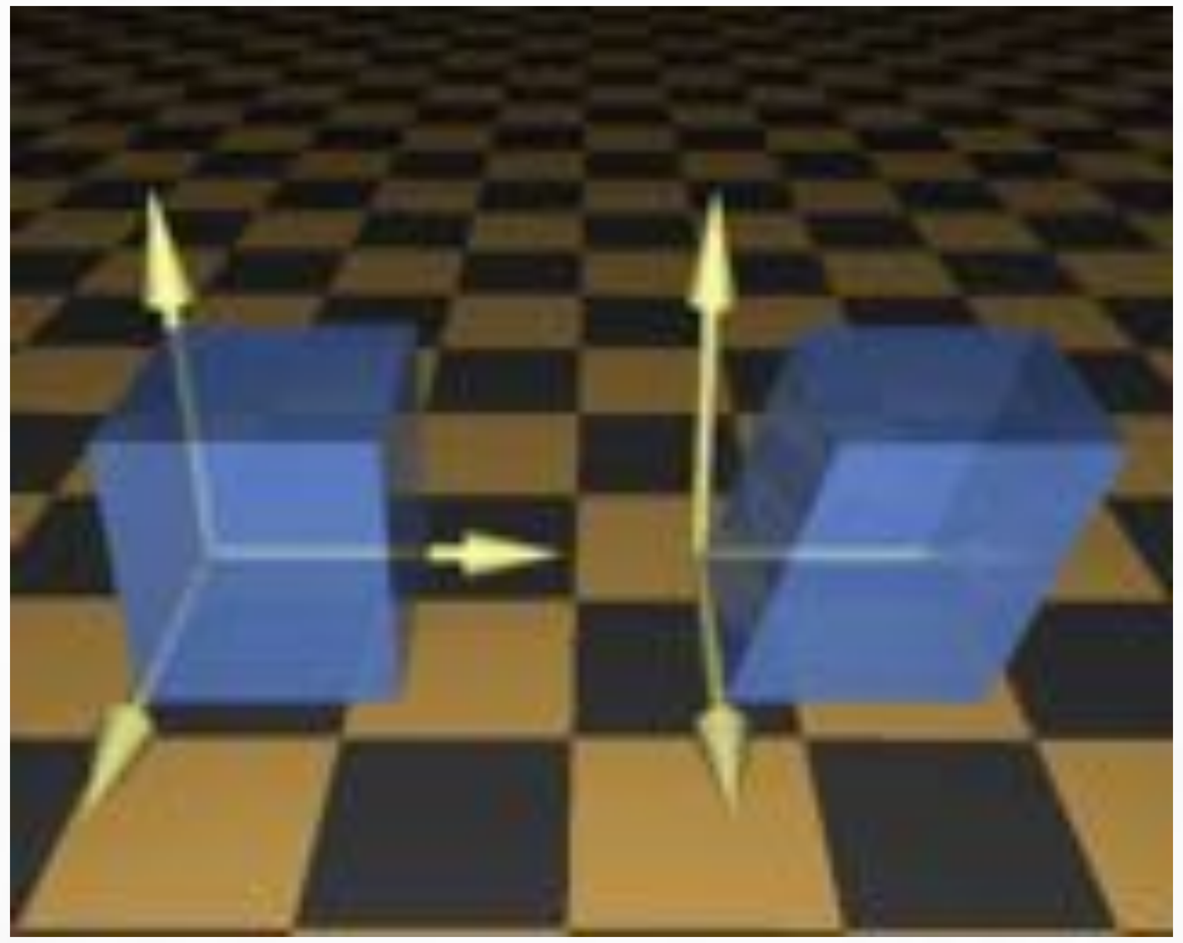
$s_x = s_y = s_z$: escalamiento uniforme.
$s_x \neq s_y \neq s_z$: escalamiento diferencial.

S.J. Gortler. Foundations of 3D Computer Graphics. MIT Press. 2012.

Cizallamiento (Shear)

- Para cizallar un vector alrededor del eje-z:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{b_1} & \vec{b_2} & \vec{b_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{b_1} & \vec{b_2} & \vec{b_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



http://140.129.20.249/~jmchen/cg/docs/rendering%20pipeline/rendering/transforms.html

Transformaciones Lineales

- **De cuerpos rígidos:**
  - secuencia arbitraria de translaciones y rotaciones.
  - preservan paralelismo, ángulos y longitudes.
- **Afines:**
  - secuencia arbitraria de rotaciones, translaciones, escalamientos y cizallamientos (shear).
  - preserva paralelismo.

Coordenadas Homogéneas

- Coordenadas homogéneas o coordenadas proyectivas.
- Introducidas por August Ferdinand Möbius en 1827.
- Sistema de coordenadas utilizado en geometría proyectiva, como las coordenadas cartesianas se usan en geometría Euclideana.
- En CG permiten que las operaciones como translación, rotación, escalamiento, proyecciones perspectivas se implementen con matrices.

Coordenadas Homogéneas

- Permiten tratar a las transformaciones de manera consistente.
- Un punto se representa con tripletas (x, y, W) que son múltiplos entre si.

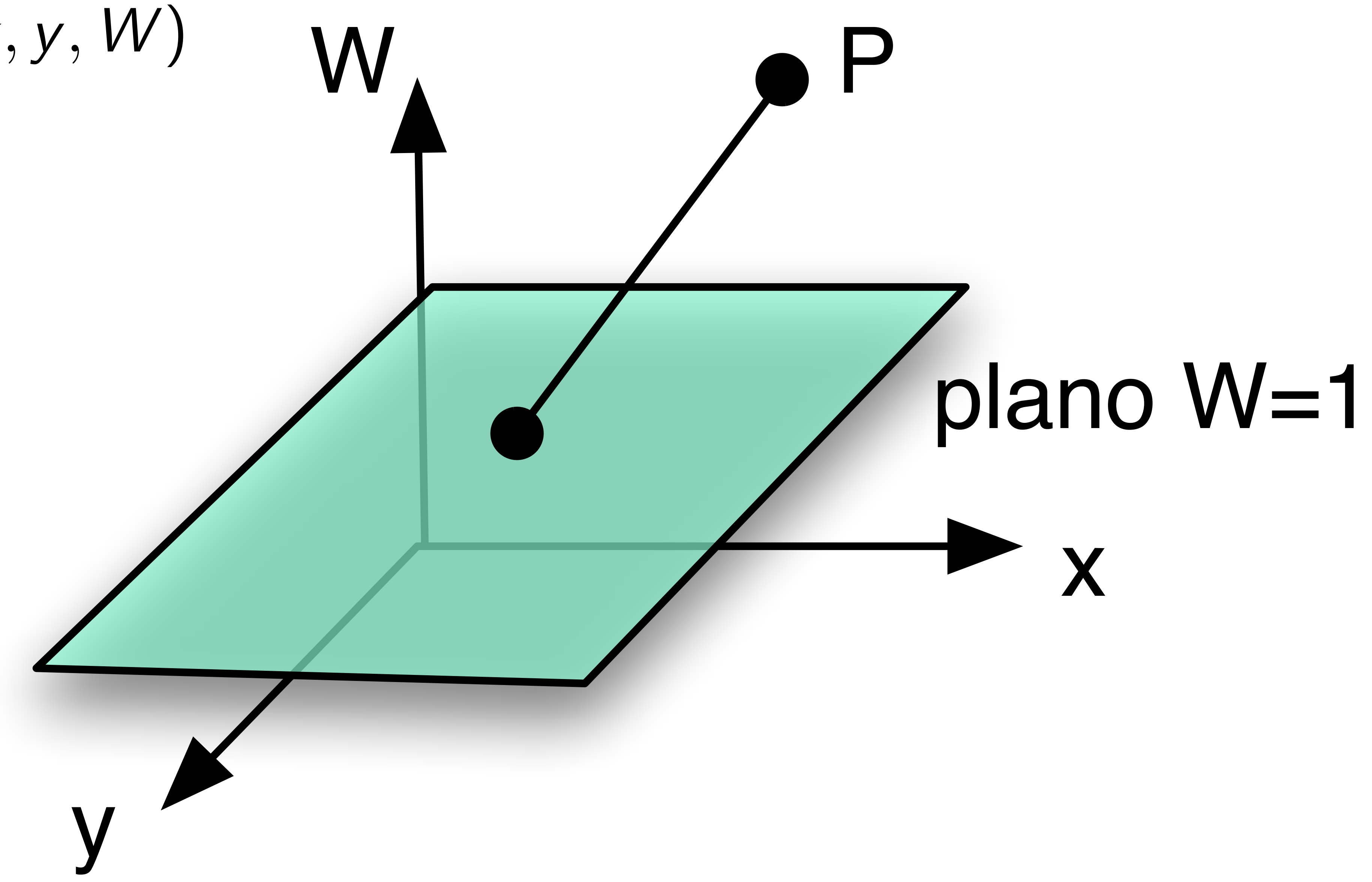
$$(tx, ty, tW) \text{ con } t \neq 0.$$

que es una línea en un espacio 3D.

- Coordenadas cartesianas del punto homogéneo:

$$\left(\frac{x}{W}, \frac{y}{W}, 1\right) \text{ con } W \neq 0.$$

- (x, y, 0) ?
  - puntos al infinito en dirección (x, y).



Coordenadas homogéneas

* Al menos una de las coordenadas homogéneas debe ser diferente a cero.
* Si la coordenada W es diferente a cero podemos dividir entre ella:
    * (x,y,W) representa el mismo punto que (x/W, y/W, 1).
* Cuando W es diferente a cero hacemos esta división y los números x/W, y/W se llaman coordenadas Cartesianas del punto homogéneo.
* Los puntos con W=0 se llaman puntos en el infinito.

Translación en coordenadas homogéneas

$$P' = T(d_x, d_y) \cdot P \text{ con } T(d_x, d_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$P'' = T(d_{x_1 x_2}, d_{y_1 y_2}) \cdot P$$

$$\begin{aligned} T(d_{x_1 x_2}, d_{y_1 y_2}) &= T(d_{x_2}, d_{y_2}) \cdot T(d_{x_1}, d_{y_1}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x_2} \\ 0 & 1 & d_{y_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x_1} \\ 0 & 1 & d_{y_1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x_1} + d_{x_2} \\ 0 & 1 & d_{y_1} + d_{y_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Escalamiento en coordenadas homogéneas

$$P' = S(s_x, s_y) \cdot P \text{ con } S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$P'' = S(s_{x_1 x_2}, s_{y_1 y_2}) \cdot P$$

$$S(s_{x_1 x_2}, s_{y_1 y_2}) = S(s_{x_2}, s_{y_2}) \cdot S(s_{x_1}, s_{y_1}).$$

$$= \begin{bmatrix} s_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_{x_1} \cdot s_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y_1} \cdot s_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

x = y : escalamiento uniforme.
x ≠ y : escalamiento diferencial.

Rotación en coordenadas homogéneas

Alrededor del origen.

$$P' = R(\theta) \cdot P \text{ con } R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ortogonal especial

(1) Vectores renglón unitarios

(2) Vectores renglón perpendiculares entre si (producto punto es cero)

(3) El primer y segundo vector al rotarse por $R(\theta)$ estarán en el eje-x positivo y eje-y positivo respectivamente.

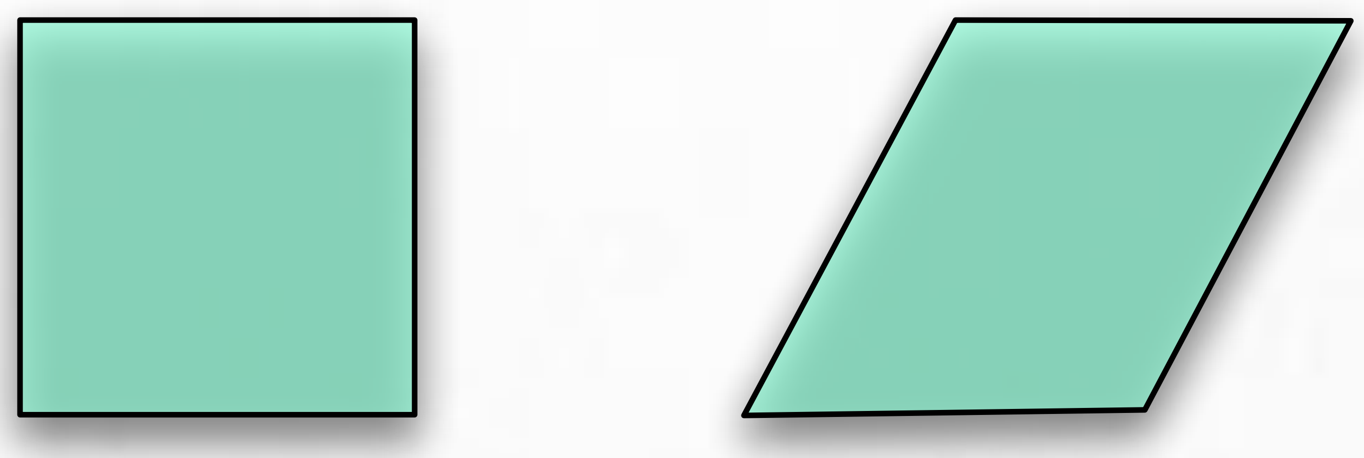
(4) Los vectores columna también verifican las propiedades (1) y (2).

Shear en coordenadas homogéneas

Alrededor del eje-x.

$$P' = SH_x \cdot P \text{ con } SH_x = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$P' = SH_x \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ay \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

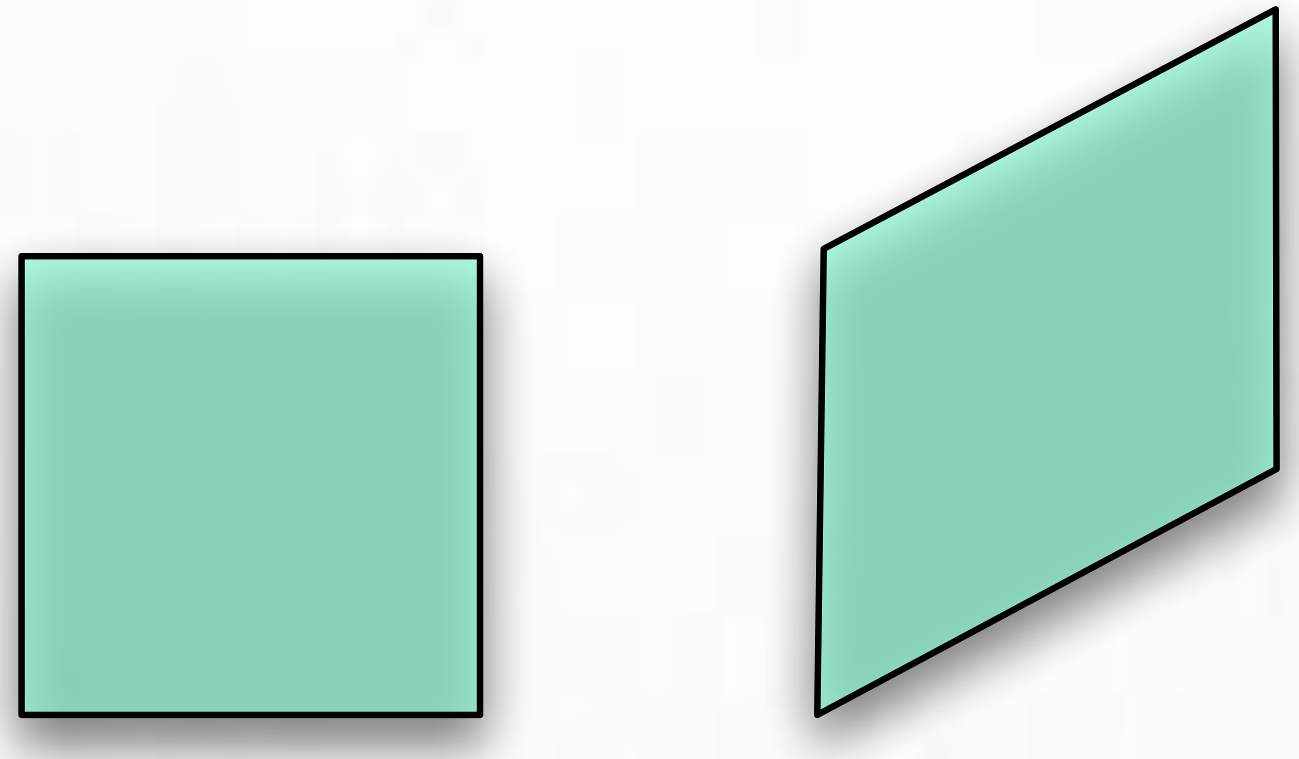


Shear en coordenadas homogéneas

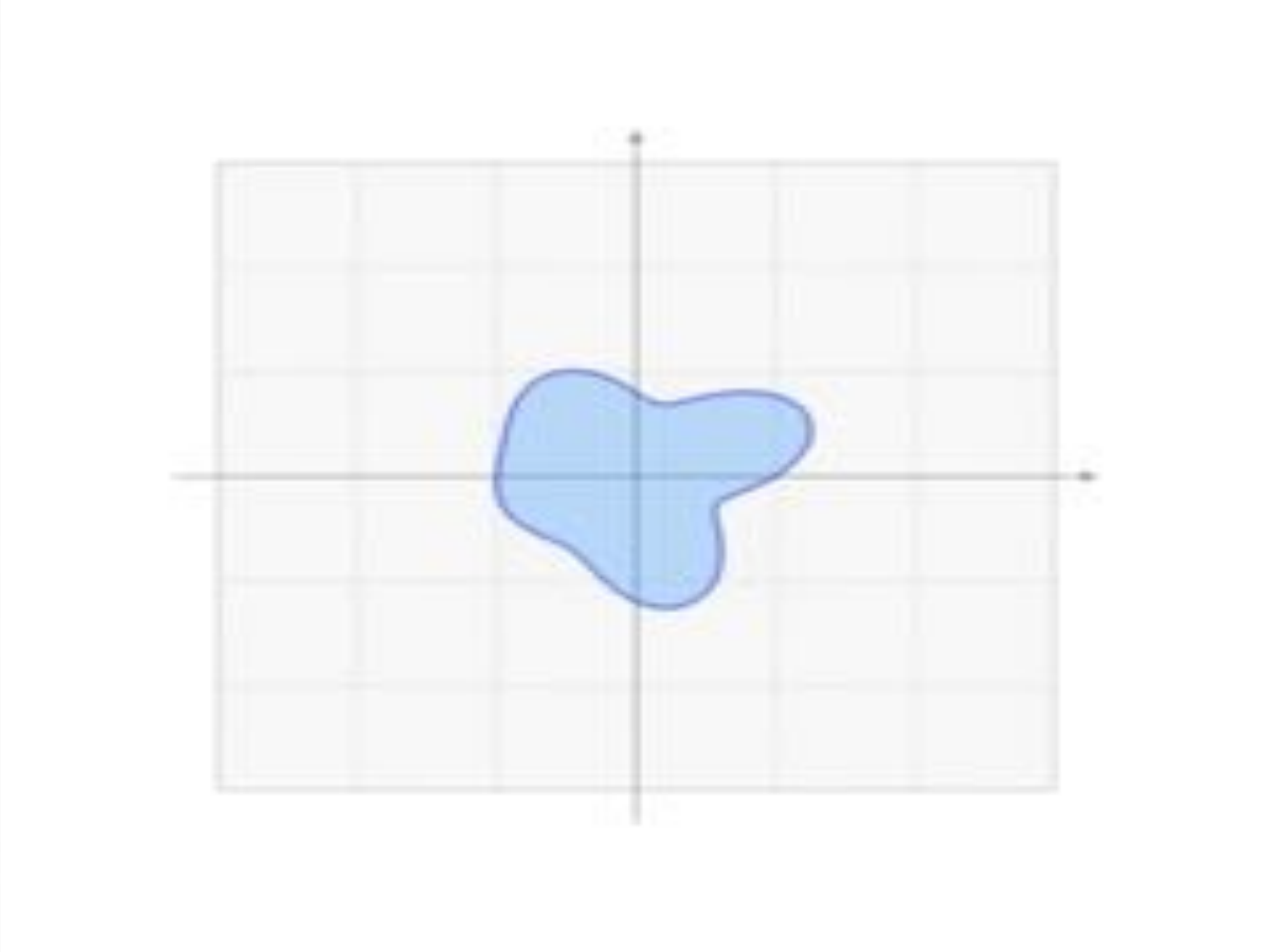
Alrededor del eje-y.

$$P' = SH_y \cdot P \text{ con } SH_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$P' = SH_y \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ bx + y \\ 1 \end{bmatrix}$$



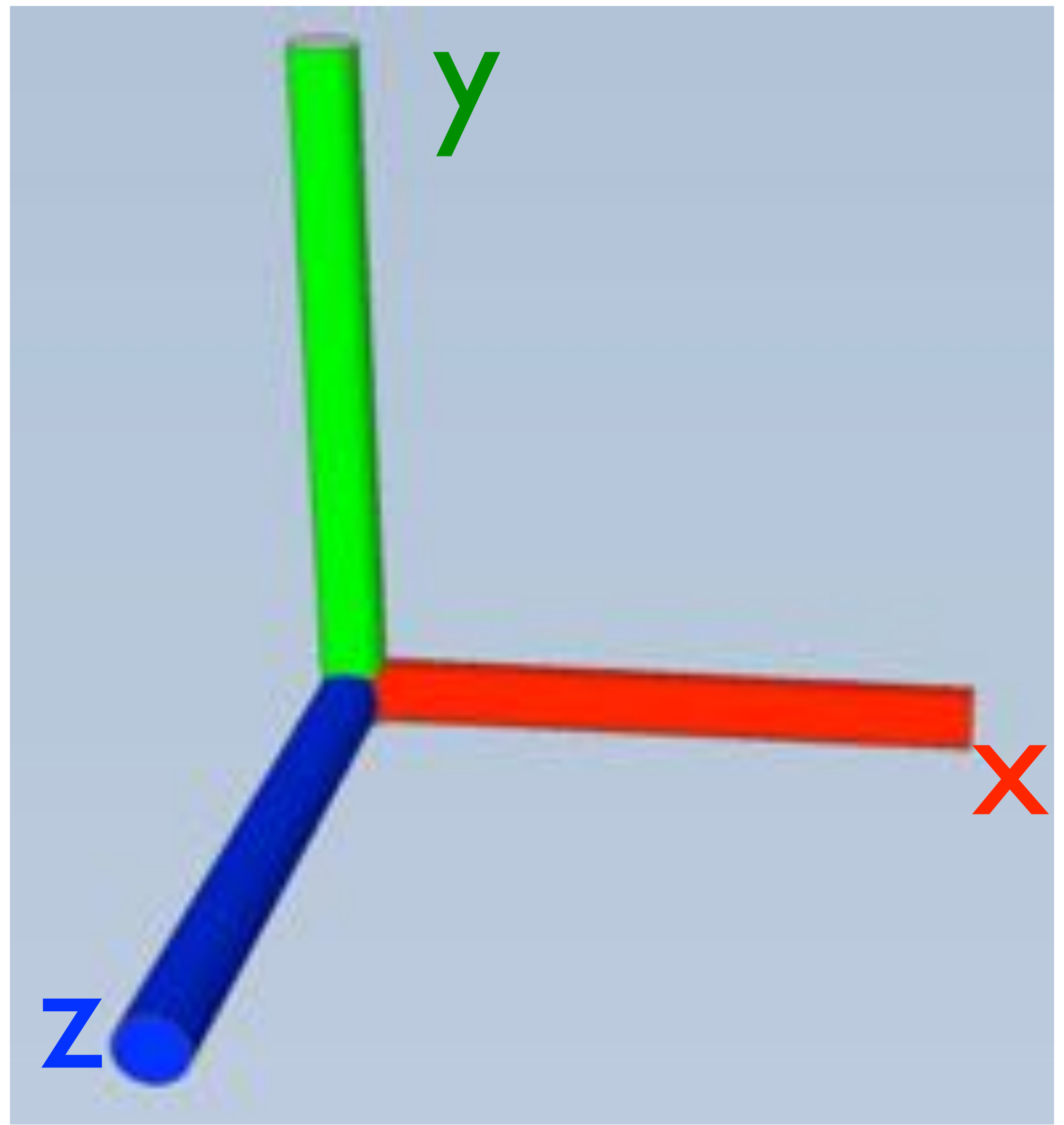
Coordenadas Homogéneas



http://en.wikipedia.org/wiki/Affine_transformation

Transformaciones en 3D

- Transformaciones en 2D ➔ matrices 3x3 con coordenadas homogéneas.
- Transformaciones en 3D ➔ matrices 4x4 con coordenadas homogéneas.
- $(x,y,W) \rightarrow (x,y,z,W)$
- $(x/W,\ y/W,\ z/W,\ 1)$ con $W \neq 0$.
- Sistema coordenado con la mano derecha.



eje de rotación	dirección positiva de la rotación
x	y a z
y	z a x
z	x a y

Transformaciones en 3D

- Simple extensión de translación en 2D.

Translación:

$$T(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$T(d_x, d_y, d_z) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ z + d_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

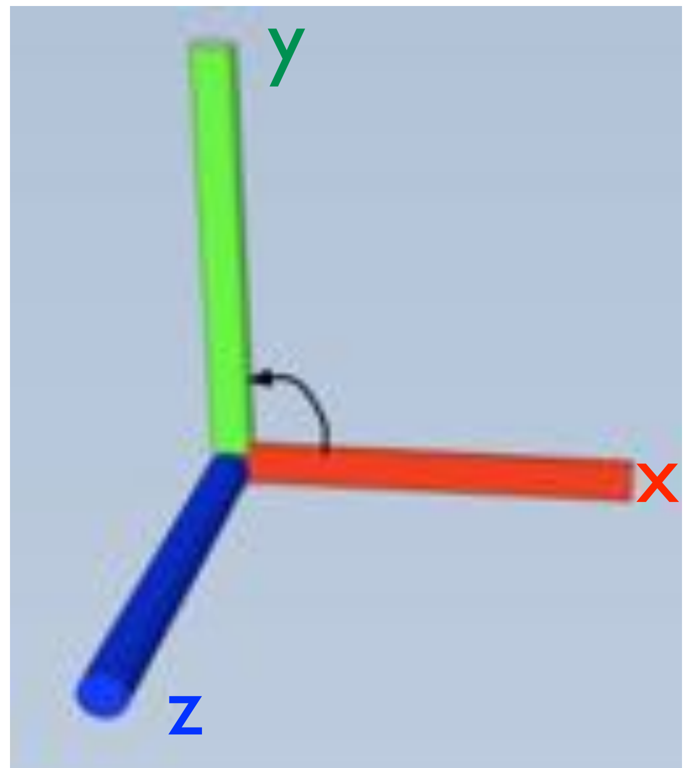
Escalamiento:

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$S(s_x, s_y, s_z) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \\ s_z \cdot z \\ 1 \end{bmatrix}$$

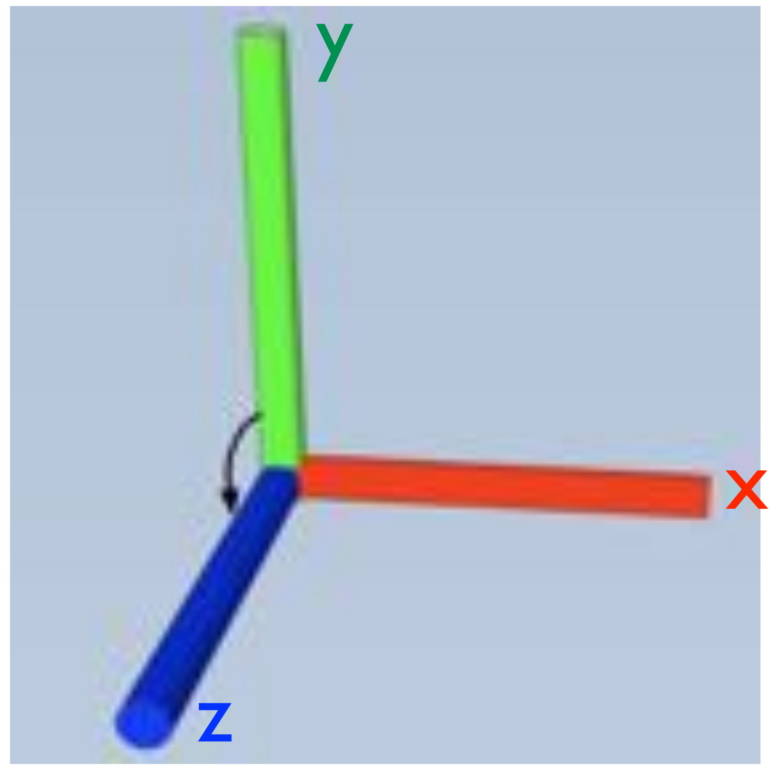
Alrededor del eje-z

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



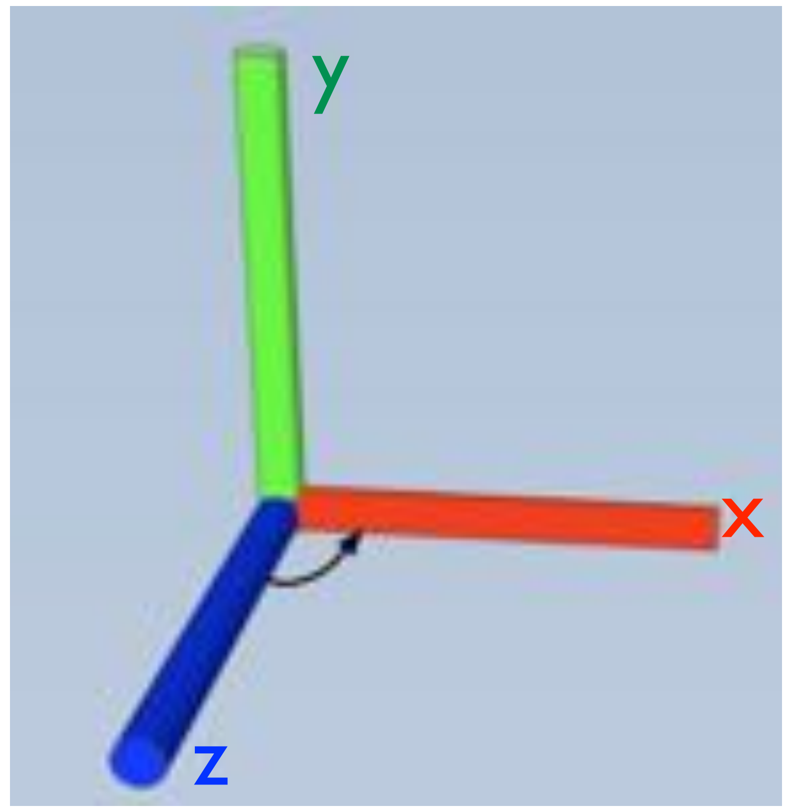
Alrededor del eje-x

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Alrededor del eje-y

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Rotaciones en 3D

- Los renglones y columas de la submatriz superior izquierda de 3x3 de $R_z(\theta)$, $R_x(\theta)$ y $R_y(\theta)$ son:
  - vectores unitarios mutuamente perpendiculares.
  - la submatriz tiene determinante 1.
  - ortogonales especiales.
- Una secuencia arbitraria de rotaciones y translaciones en 3D preserva ángulos, longitudes y paralelismo.

Inversa de transformaciones en 3D

- Todas las matrices de transformación tienen inversas.
- La inversa de T se obtiene negando d_x, d_y, y d_z.
- La inversa de S se obtiene reemplazando s_x, s_y, y s_z por su recíproco.
- La inversa de las tres rotaciones se obtiene negando el ángulo de rotación.
- La inversa de cualquier matriz ortogonal B es la transpuesta de B: $B^{-1} = B^T$

Composición de transformaciones

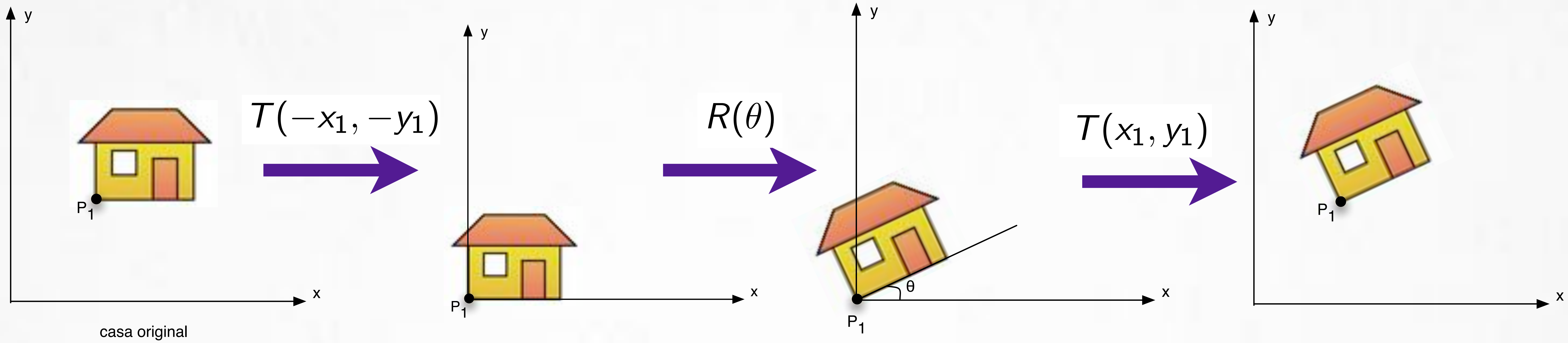
- Cualquier secuencia de transformaciones de rotación, escalamiento y translación se pueden multiplicar.
- El resultado es de la forma:

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & \quad 0 & \quad 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix}.$$

rotación y escalamiento

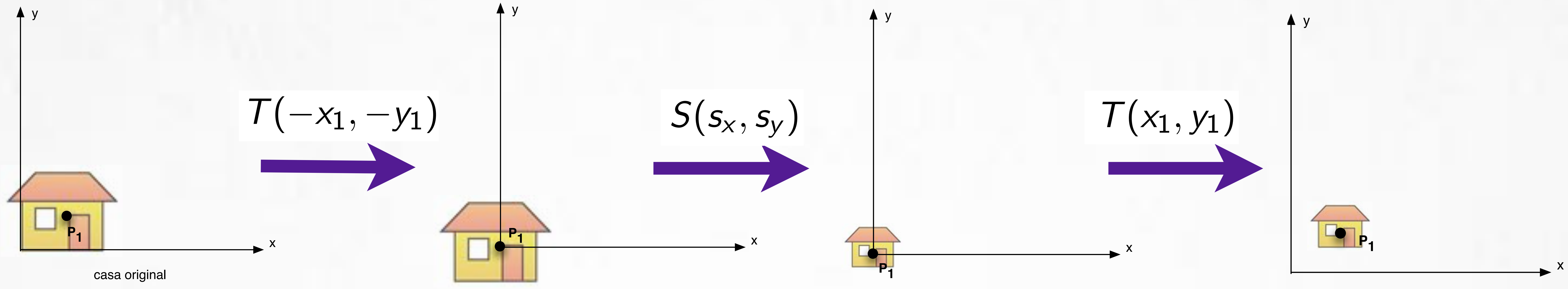
translación

Rotación alrededor de un punto arbitrario P_1



$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_1(1-\cos\theta)+y_1\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y_1(1-\cos\theta)-x_1\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escalamiento alrededor de un punto arbitrario P_1

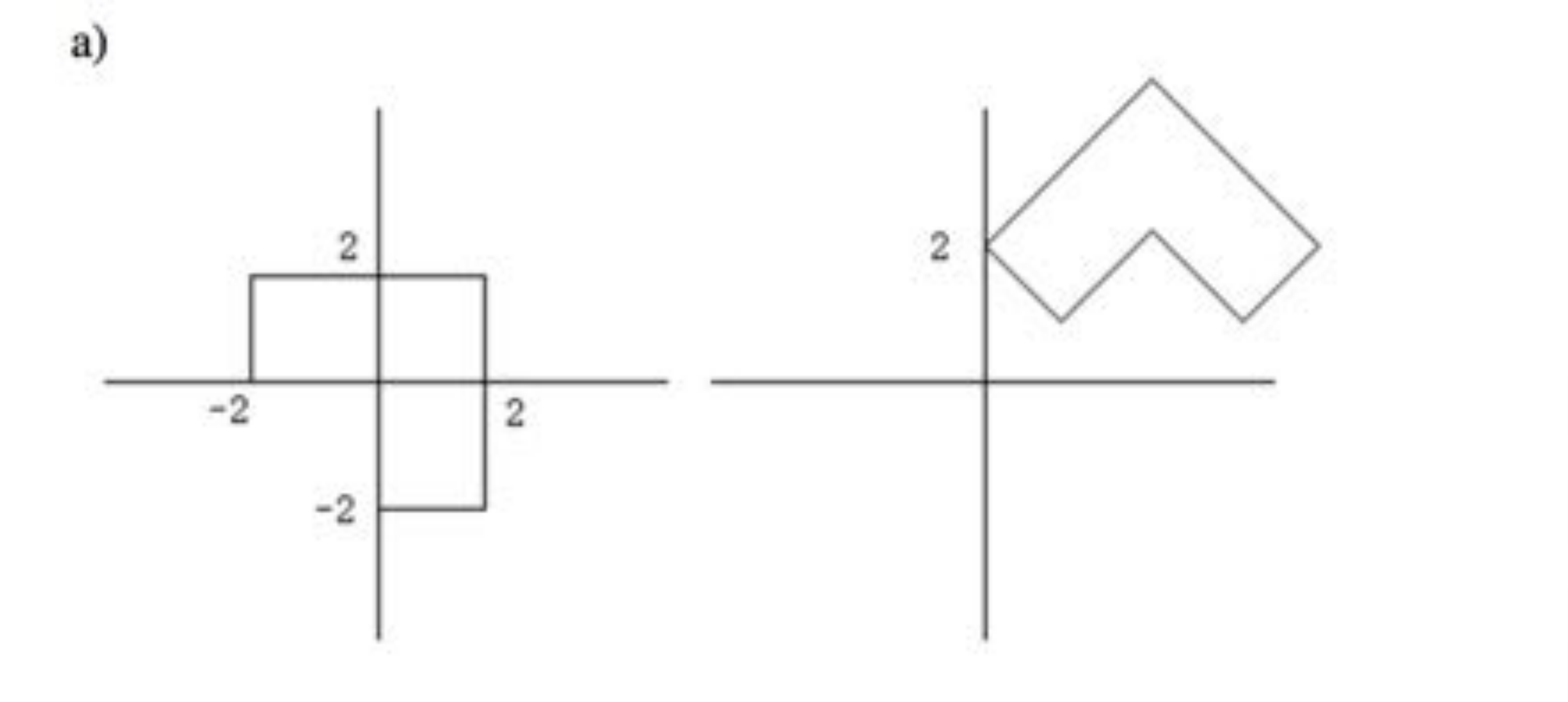


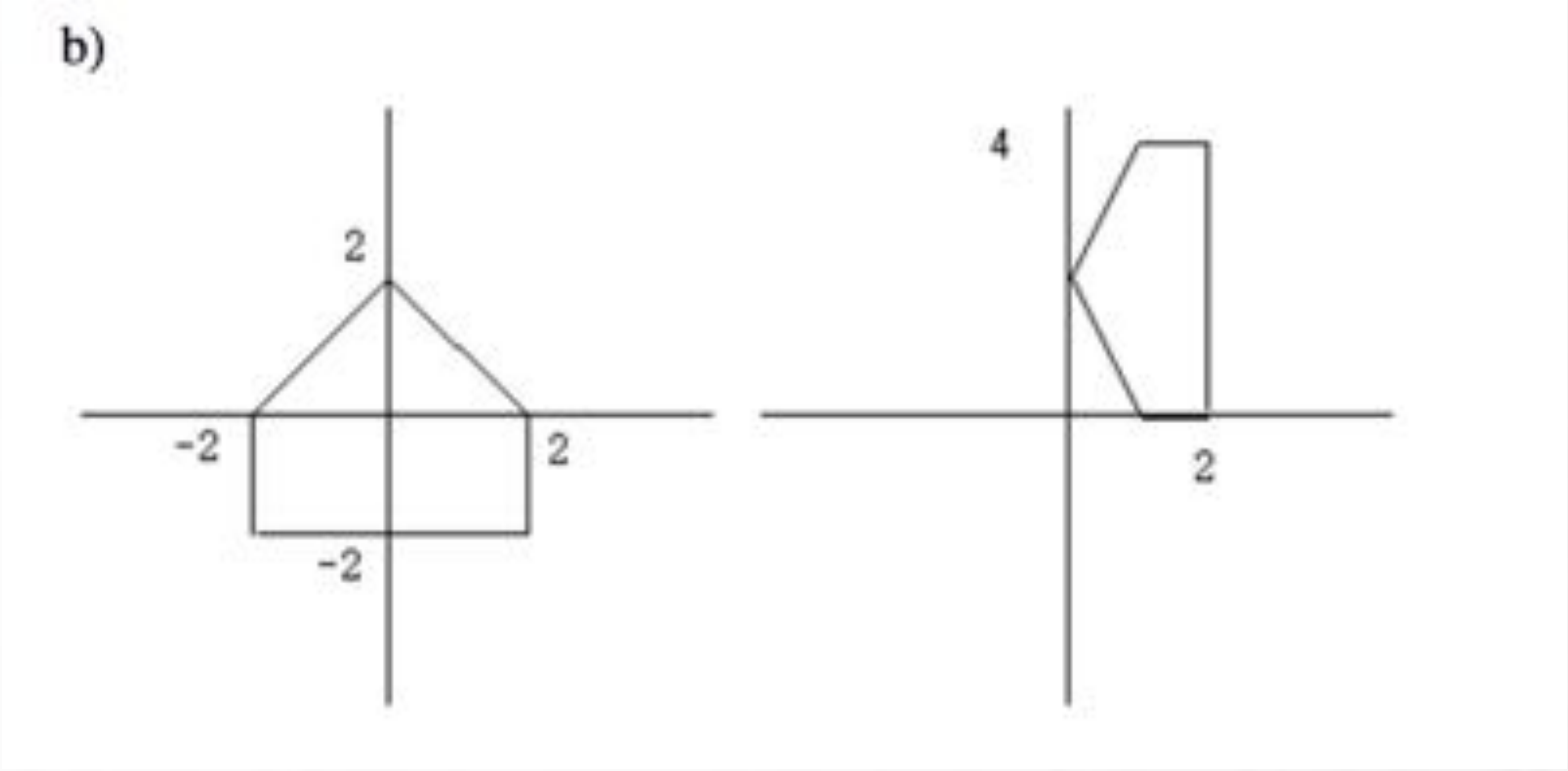
$$T(x_1, y_1) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_1, -y_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_1(1 - s_x) \\ 0 & s_y & y_1(1 - s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio

Encuentra las matrices de transformación para transformar el objeto (1) al objeto (2)



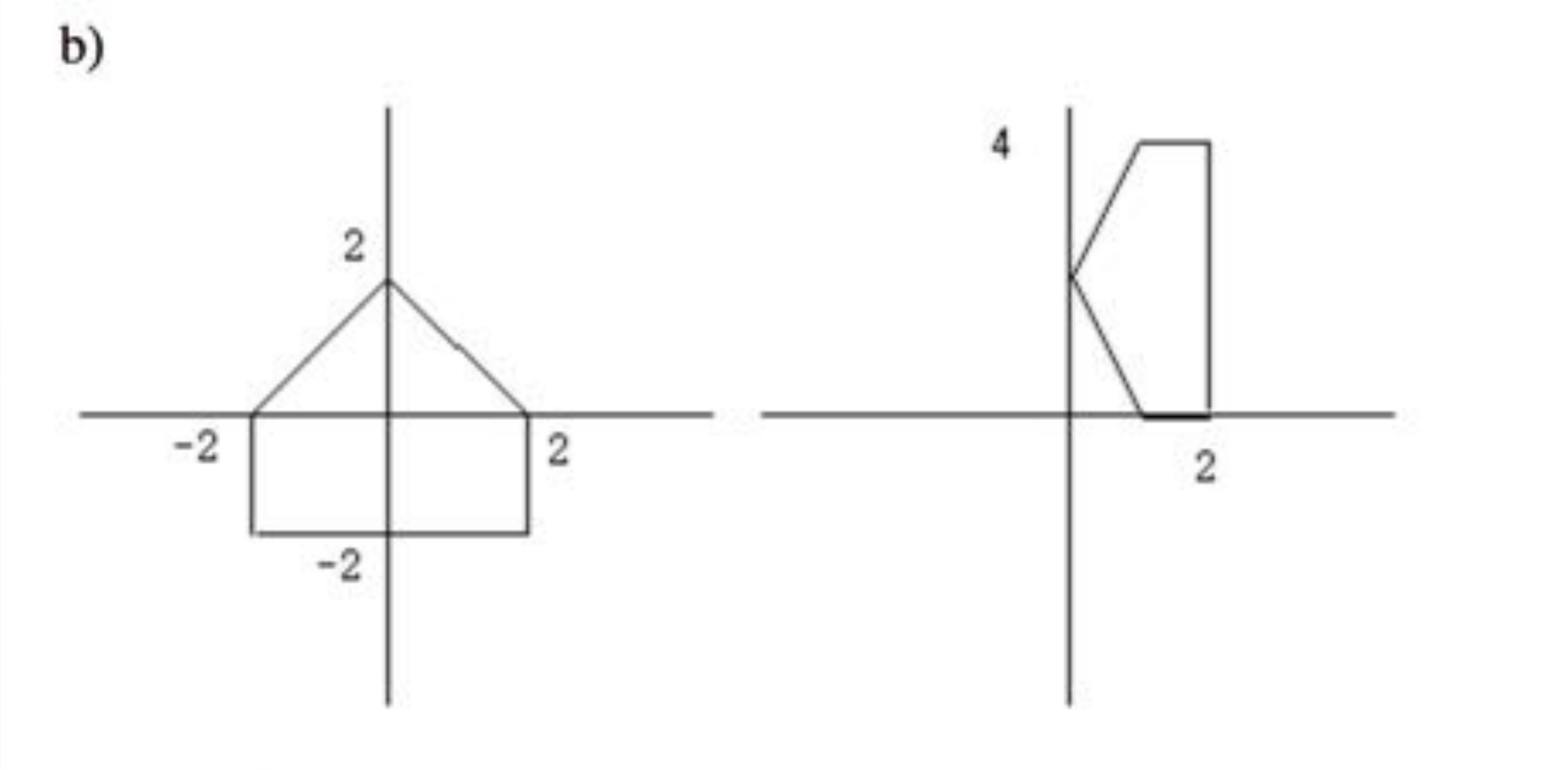


(1) (2)

http://www2.it.lut.fi/kurssit/08-09/CT20A5700/exercises/05/

Ejercicio

Encuentra las matrices de transformación para transformar el objeto (1) al objeto (2)



(1) (2)

http://www2.it.lut.fi/kurssit/08-09/CT20A5700/exercises/05/