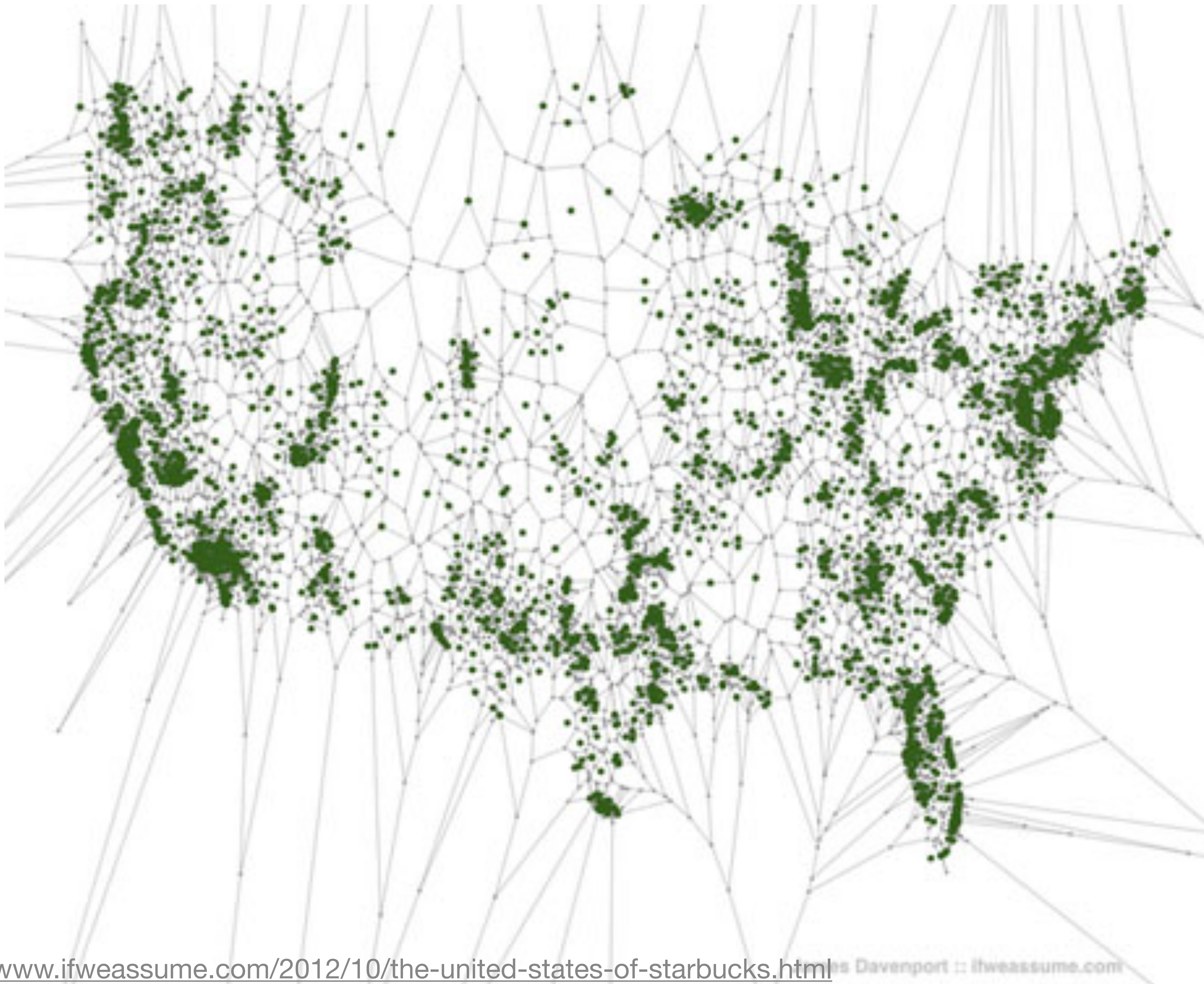
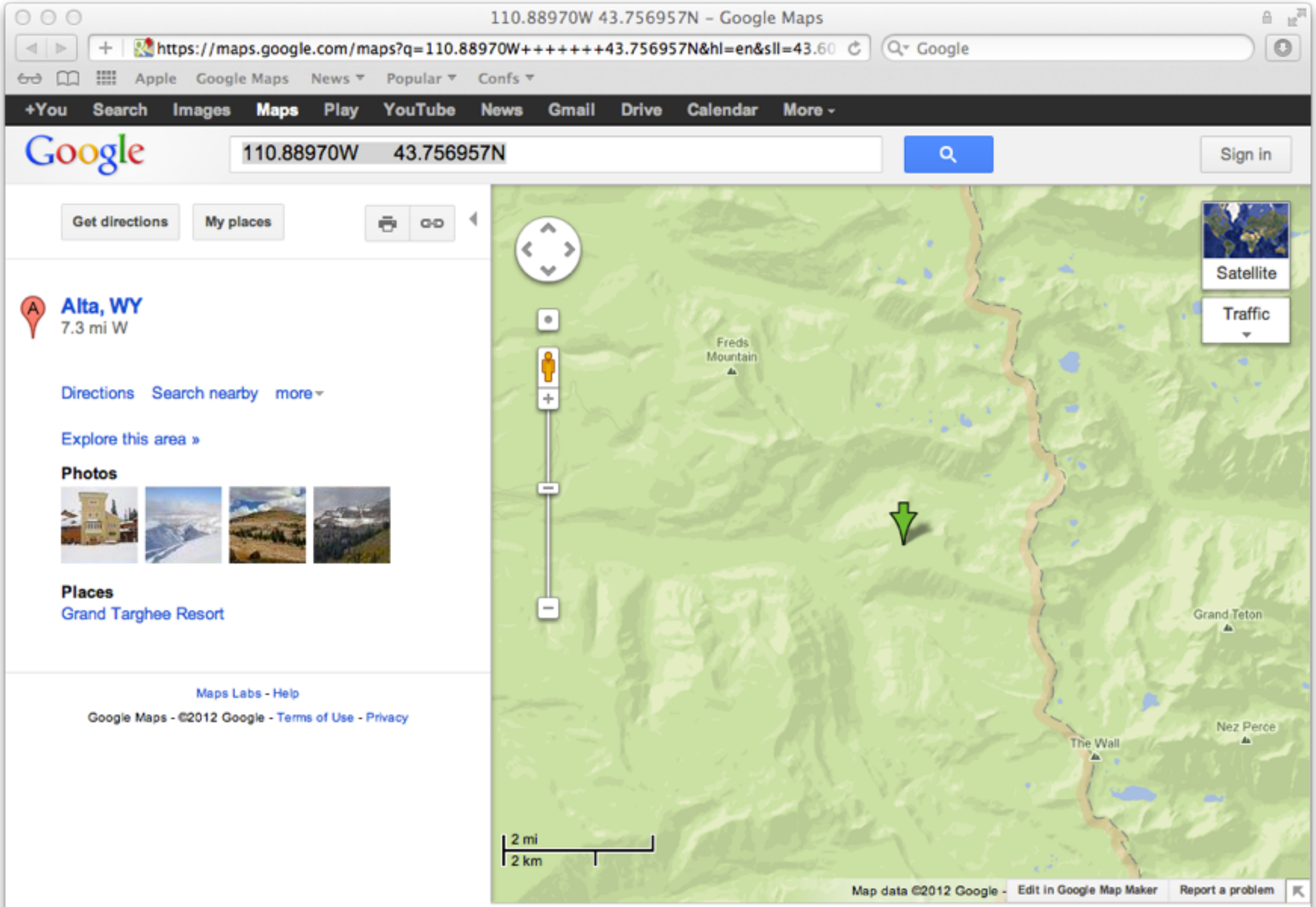
Diagramas de Voronoi



http://www.ifweassume.com/2012/10/the-united-states-of-starbucks.html

- furthest point from a company-owned Starbucks (~140 miles) .



http://www.ifweassume.com/2012/10/the-united-states-of-starbucks.html

Suposiciones de la aplicación

- El precio de un producto o servicio dado es el mismo en todos lugares.
- El costo de adquirir un producto o servicio es igual al precio + el costo de transporte al sitio.
- El costo de transporte a un sitio es igual a la distancia Euclideana al sitio x un precio dado por unidad de distancia.
- Los consumidores intentan minimizar el costo de adquirir el producto o servicio.
- Modelo de asignación de Voronoi.
- La subdivisión inducida por este modelo se conoce como diagrama de Voronoi.
- Cercanamente relacionada con la llamada triangulación de Delaunay.

M.de Berg, et.al. Computational Geometry. Algorithms and Applications. Springer. Ch. 7. pp. 145-180.

Definición y Propiedades

- Utilizaremos como métrica entre puntos la función de distancia Euclideana.

$$\operatorname{dist}(p,q) := \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}.$$

- Sea $P := \{ p1, p2, \dots, pn \}$ un conjunto de n puntos distintos en el plano llamados sitios.

- Definimos al diagrama de Voronoi de P como la subdivisión del plano en n celdas.

Propiedad:

Un punto q yace en la celda que corresponde al sitio p_i ssi $\operatorname{dist}(q, p_i) < \operatorname{dist}(q, p_j) \; \forall \; p_j \in P$ con $j \neq i$.

- Denotamos al diagrama de Voronoi de P como $Vor(P)$.

- La celda que corresponde al un sitio p_i se denota $V(p_i)$ y la llamamos la celda de Voronoi de p_i.

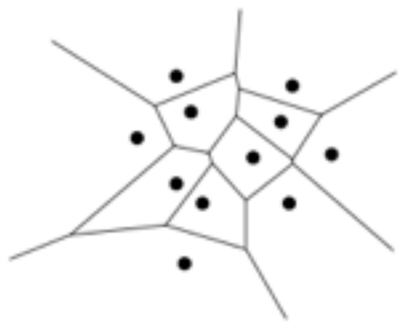
M.de Berg, et.al. Computational Geometry. Algorithms and Applications. Springer. Ch. 7. pp. 145-180.

Estructura de una celda

- Para dos puntos p y q en el plano definimos su mediatriz como el segmento perpendicular al segmento de recta pq.
- La mediatriz divide al plano en dos semi-planos.
- Denotamos al semi-plano abierto que contiene a p como $h(p,q)$ y al que contiene a q como $h(q,p)$.
- Notemos que $r \in h(p,q)$ ssi $dist(r,p) < dist(r,q)$. De esto obtenemos la siguiente observacion:

$$\mathcal{V}(p_i) = \bigcap_{1 \leqslant j \leqslant n, j \neq i} h(p_i, p_j).$$

- A menos que los sitios sean colineales no habra aristas que sean lineas completas en un diagrama de Voronoi.



M.de Berg, et.al. Computational Geometry. Algorithms and Applications. Springer. Ch. 7. pp. 145-180.

Teorema 1:

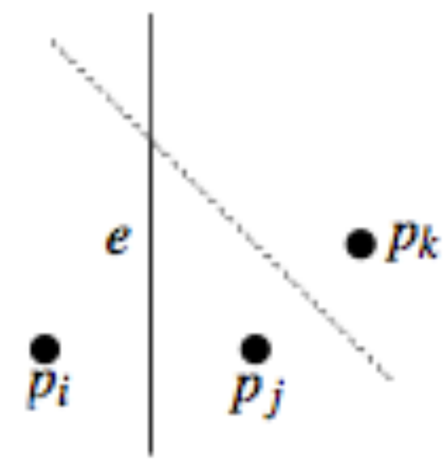
Sea P un conjunto de n sitios en el plano. Si todos los sitios son colineales $Vor(P)$ consta de $n-1$ lineas paralelas. De otra forma, $Vor(P)$ es un grafo conectado y sus aristas son, sea segmentos de recta o semi-rectas.

Suponemos que los sitios no son colineales.

Mostrar que las aristas de $Vor(P)$ son sea segmentos de recta o semi-rectas.

> Sabemos que las aristas de $Vor(P)$ son partes de rectas, partes de mediatrices entre pares de sitios.
>
> Para probar por contradicción supongamos que existe una arista e de $Vor(P)$ que es una línea completa. Sea e una parte de la frontera de las celdas de Voronoi $V(p_i)$ y $V(p_j)$.
>
> Sea $p_k \in P$ un punto que no es colineal a p_i y p_j.
>
> La mediatriz de p_j y p_k es no paralela a e y por lo tanto intersecta a e. Pero entonces, la parte de e que yace al interior de $h(p_k,p_j)$ no puede estar en el interior de $V(p_j)$, porque está más cerca de p_k que de p_j, una contradicción.

M.de Berg, et.al. Computational Geometry. Algorithms and Applications. Springer. Ch. 7. pp. 145-180.



Mostrar que $Vor(P)$ está conectado.

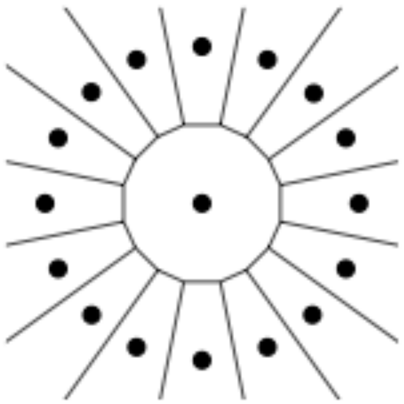
Si no fuera este el caso entonces habría una celda de Voronoi $V(p_i)$ separando el plano en dos.

Como las celdas de Voronoi son convexas, $V(p_i)$ consistiría de una tira acotada por dos líneas paralelas pero acabamos de probar que el diagrama de Voronoi no puede tener líneas completas, que es una contradicción.

M.de Berg, et.al. Computational Geometry. Algorithms and Applications. Springer. Ch. 7. pp. 145-180.

Complejidad de Vor(P)

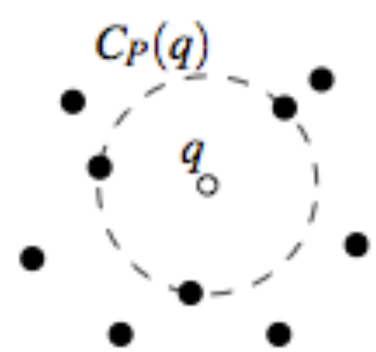
- Como hay n sitios, cada celda de Voronoi tiene a lo mas:
    - $n-1$ vértices y aristas.
- La complejidad de Vor(P) es a lo más cuadrática.
- No es claro si Vor(P) puede tener complejidad cuadrática:
    - ¿ejemplo de complejidad lineal para una sola celda?
    - ¿pueden tener muchas celdas complejidad lineal al mismo tiempo?
- Se puede mostrar que no es el caso y que en promedio, el número de vértices de las celdas de Voronoi es menor a seis.



M.de Berg, et.al. Computational Geometry. Algorithms and Applications. Springer. Ch. 7. pp. 145-180.

Complejidad de Vor(P)

- Las aristas de Vor(P) son parte de las mediatrices entre pares de sitios.
- Los vértices de Vor(P) son puntos de intersección entre estas mediatrices.
- Hay un número cuadrático de mediatrices aunque la complejidad de Vor(P) sea lineal.
- No todas las mediatrices definen aristas de Vor(P) y no todas las intersecciones son vértices de Vor(P).
- Para un punto q definimos el circulo vacío mas grande de q respecto a P (Cp(q)), como el cículo más grande que tenga a q en el centro y que no tenga ningún sitio de P en su interior.



M.de Berg, et.al. Computational Geometry. Algorithms and Applications. Springer. Ch. 7. pp. 145-180.

Teorema 2:

Para el diagrama de Voronoi $Vor(P)$ de un conjunto de puntos P se mantiene lo siguiente:

i) Un punto q es un vértice de $Vor(P)$ si y solo si su círculo vacío más grande $C_P(q)$ contiene **tres o más** sitios en su frontera.

ii) La mediatriz entre los sitios p_i y p_j definen una arista de $Vor(P)$ si y solo si existe un punto $q \in E^2$ tal que $C_P(q)$ contenga a ambos p_i y p_j en su frontera pero a ningún otro sitio.

M.de Berg, et.al. Computational Geometry. Algorithms and Applications. Springer. Ch. 7. pp. 145-180.

Supongamos un punto q tal que $C_P(q)$ contenga tres o más sitios en su frontera.

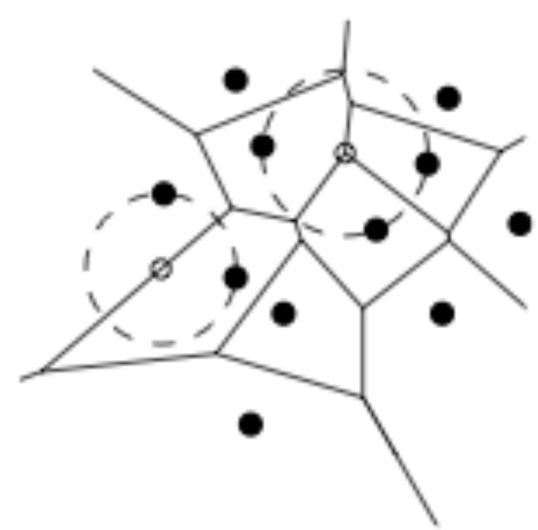
Sean p_i, p_j, p_k tres de estos sitios.

Como el interior de $C_P(q)$ está vacío q debe estar en la frontera de cada $\mathcal{V}(p_i)$, $\mathcal{V}(p_j)$, $\mathcal{V}(p_k)$ y q debe ser vértice de $\mathrm{Vor}(P)$.

Por otro lado, todo vértice q de $\mathrm{Vor}(P)$ incide en al menos 3 aristas y a al menos 3 celdas de Voronoi $\mathcal{V}(p_i)$, $\mathcal{V}(p_j)$, $\mathcal{V}(p_k)$

El vertice q debe ser equidistante a p_i, p_j, p_k y no puede haber otro sitio más cercano porque si no las celdas no se encontrarían en q.

Por esto, el interior del círculo con p_i, p_j, p_k en su frontera no contienen ningún otro sitio.



M.de Berg, et.al. Computational Geometry. Algorithms and Applications. Springer. Ch. 7. pp. 145-180.

Supongamos que hay un punto q con la propiedad mencionada en el teorema.

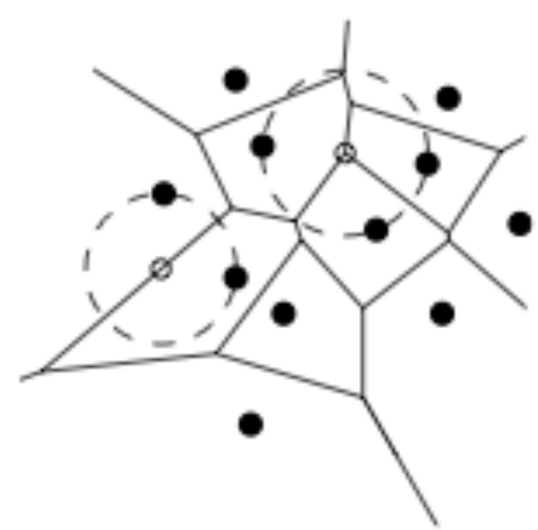
Como $C_P(q)$ no contiene ningún sitio en su interior y p_i y p_j están en la frontera tenemos que $dist(q,p_i) = dist(q,p_j) \leq dist(q,p_k)$ para todo $1 \leq k \leq n$.

De esto sigue que q yace en una arista o vértice de $Vor(P)$.

La primera parte del teorema implica que q no puede ser un vértice de $Vor(P)$, entonces q yace en una arista de $Vor(P)$, definida por la mediatriz de p_i y p_j.

De manera inversa, dejemos que la mediatriz de p_i y p_j defina una arista de Voronoi.

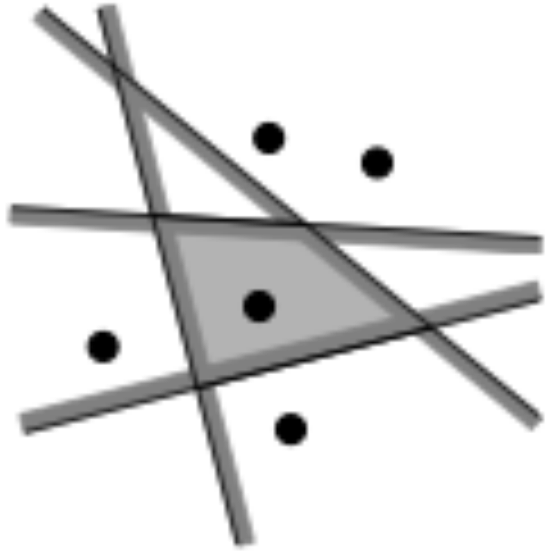
El círculo vacío más grande de cualquier punto q en el interior de esta arista debe contener a p_i y p_j en su frontera y a ningún otro sitio.



M.de Berg, et.al. Computational Geometry. Algorithms and Applications. Springer. Ch. 7. pp. 145-180.

Cálculo del Diagrama de Voronoi

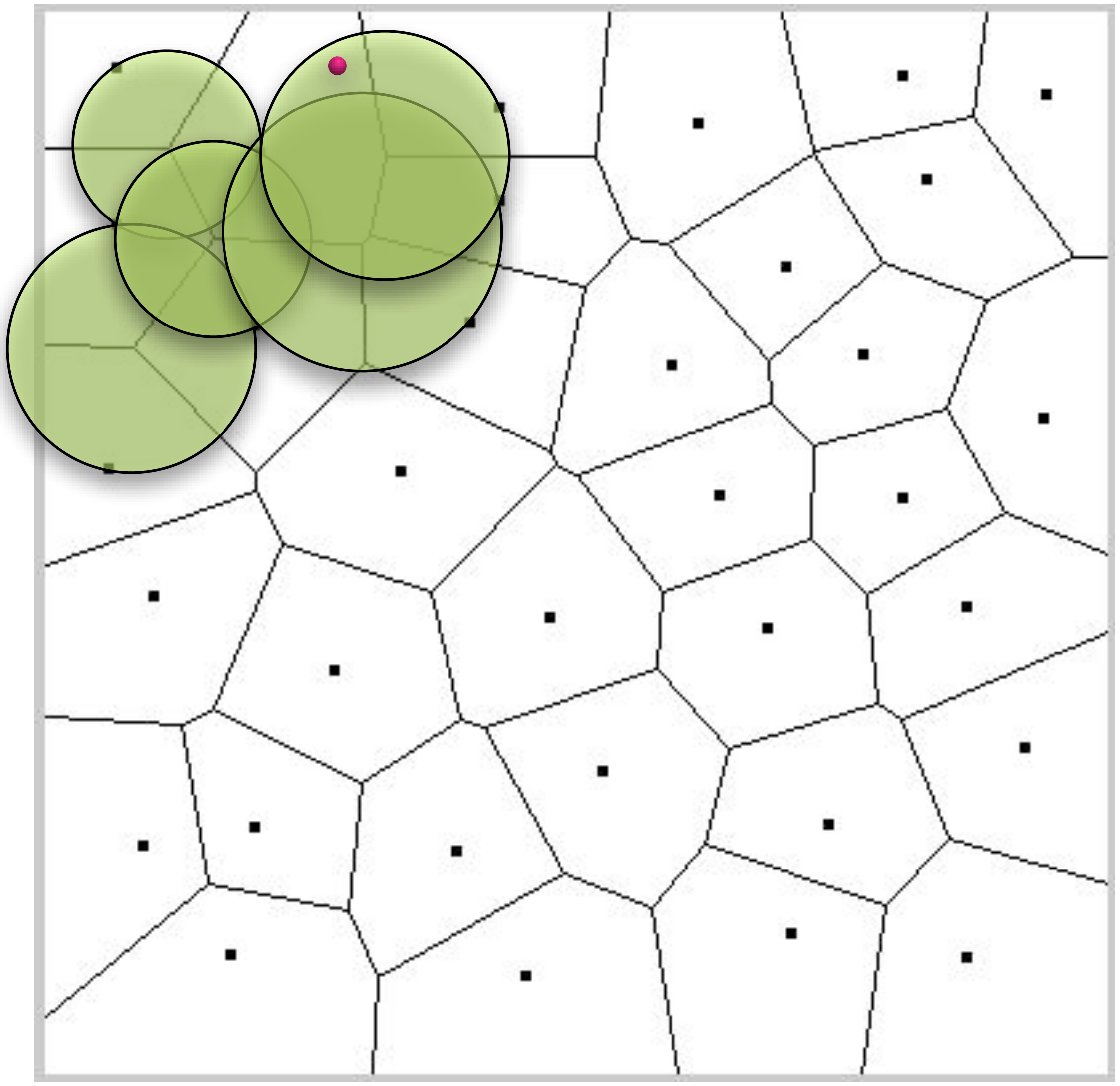
- IDEA:
  - Para cada sitio p_i calcular la intersección común de los semiplanos $h(p_i,p_j)$ (cf. cap. 4 M.de Berg et. al)
  - Esto tomaría $O(n\log n)$ para calcular cada celda de Voronoi haciendo un tiempo total de $O(n^2\log n)$ suponiendo que se pudieran ensamblar las celdas para construir el diagrama.
  - ¿Se puede mejorar?



M.de Berg, et.al. Computational Geometry. Algorithms and Applications. Springer. Ch. 7. pp. 145-180.

Algoritmo Incremental

- Suponemos tener un diagrama de Voronoi $Vor(P)$ para P sitios.
- Queremos construir el diagrama $Vor(P')$ después de agregar un sitio s.
- Supongamos que s cae dentro de uno de los círculos asociados con varios vértices de Voronoi $C(v_1)$, ..., $C(v_m)$.
- Estos vértices de $Vor(P)$ no pueden ser vértices de $Vor(P')$ porque se violaría la condición que dice que los círculos con centro en uno de los vértices de Voronoi deben estar vacíos.



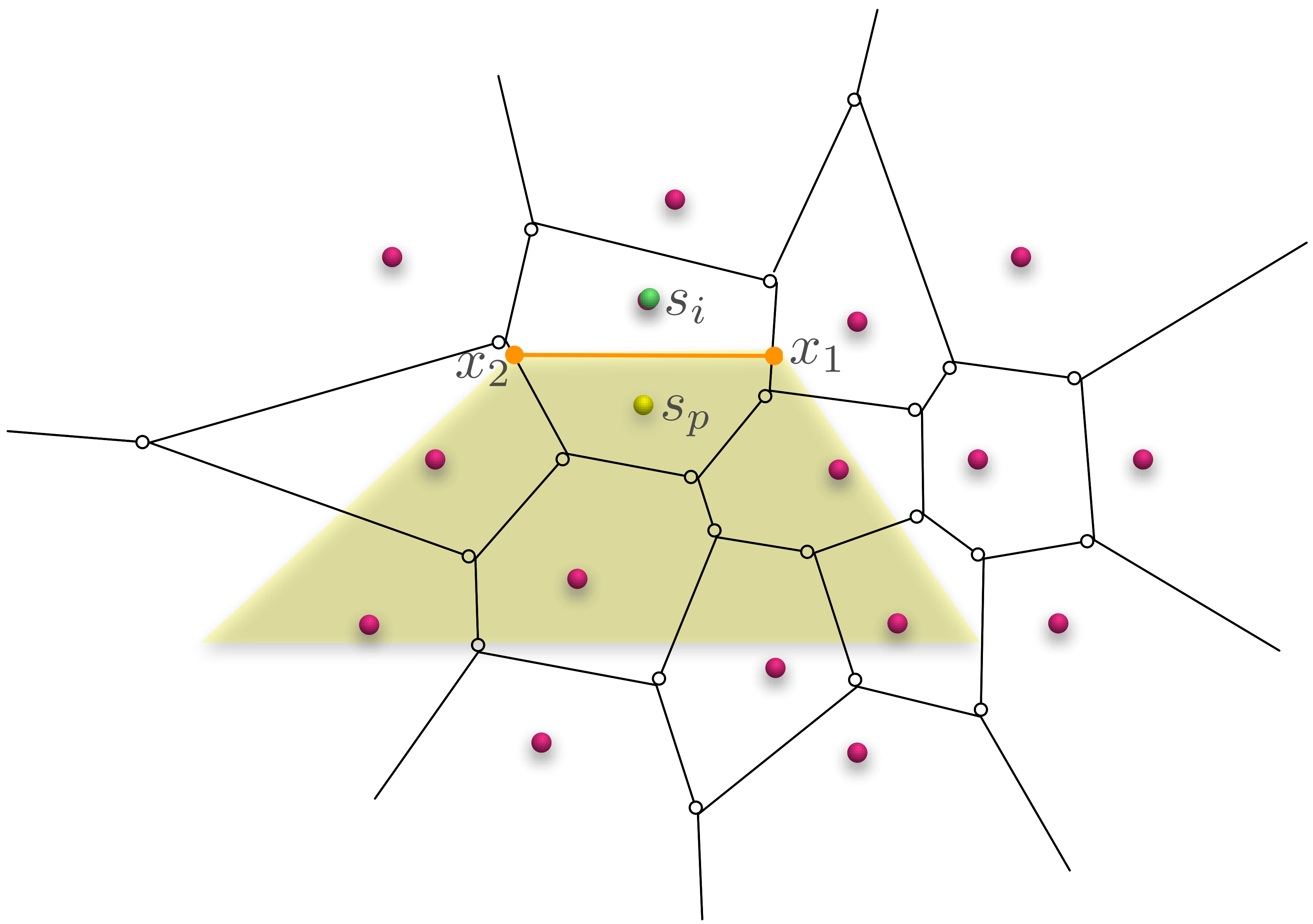
Algoritmo incremental

- Los vértices $C(v_1), \ldots, C(v_m)$ son los únicos vértices de Vor(P) que no se mantienen en Vor(P').
- El algoritmo toma $O(n)$ por intersección de puntos, para hacer una complejidad total de $O(n^2)$.
- A pesar de su complejidad cuadrática en el peor caso es uno de los métodos más populares para implementar la construcción de un diagrama de Voronoi.
- http://www.personal.kent.edu/~rmuhamma/Compgeometry/MyCG/CG-Applets/VoroDiagram/vorocli.htm

Algoritmo incremental

- Sea $Vor(P_k)$ el diagrama de Voronoi para los k primeros sitios $p1, p2, \ldots, pk$.
- El algoritmo comienza con $Vor(Pk)$ cuando $k=2$ o $k=3$ sitios y se modifica incrementalmente agregando los sitios uno a uno.
- La idea del algoritmo es convertir $Vor(P_{k-1})$ a $Vor(P_k)$ para cada nuevo sitio p_k que se agregue.
- El algoritmo es el siguiente:
  - Supongase construido $Vor(P_{k-1})$ y que se agrega un nuevo sitio p_k.
  - Encontrar el sitio p_i cuya celda de Voronoi contenga a pk.
  - Dibujar la mediatriz entre pi y p_k: $h(p_i,p_k)$.
  - La mediatriz cruza la frontera de $V(p_i)$ en dos puntos: x_1 y x_2.

Algoritmo incremental



Algoritmo incremental

- Sea $Vor(P_k)$ el diagrama de Voronoi para los k primeros sitios $p1, p2, \ldots, pk$.
- El algoritmo comienza con $Vor(Pk)$ cuando $k=2$ o $k=3$ sitios y se modifica incrementalmente agregando los sitios uno a uno.
- La idea del algoritmo es convertir $Vor(P_{k-1})$ a $Vor(P_k)$ para cada nuevo sitio p_k que se agregue.
- El algoritmo es el siguiente:
  - Supongase construido $Vor(P_{k-1})$ y que se agrega un nuevo sitio p_k.
  - Encontrar el sitio p_i cuya celda de Voronoi contenga a pk.
  - Dibujar la mediatriz entre pi y p_k: $h(p_i,p_k)$.
  - La mediatriz cruza la frontera de $V(p_i)$ en dos puntos: x_1 y x_2.

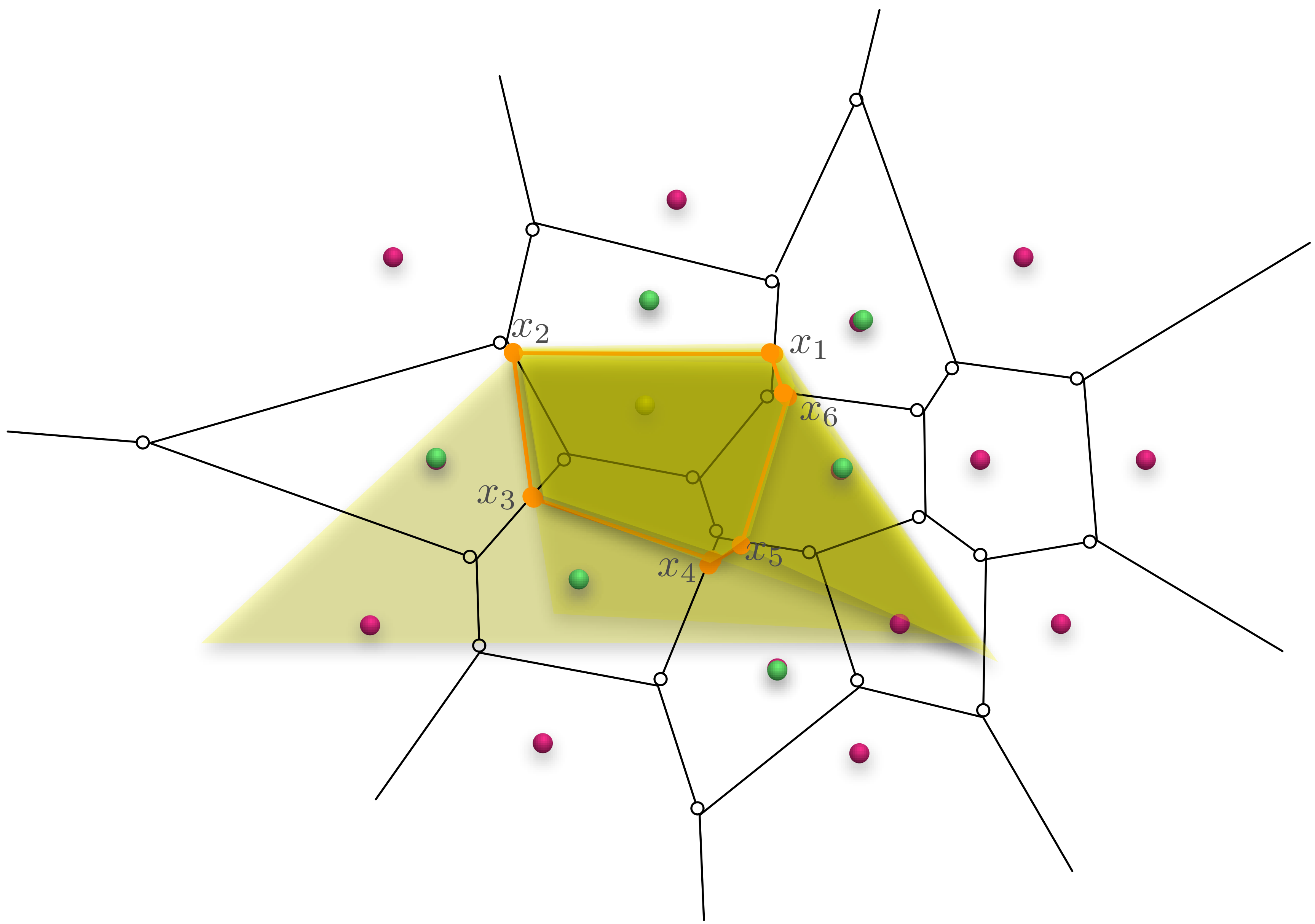
Algoritmo incremental

- El sitio sp está a la izquierda (según nuestras funciones de orientación de un segmento de recta) del segmento dirigido x1x2.
- El segmento x1x2 divide a la celda convexa del sitio s1 V(s1) en dos partes: la de la izquierda pertenece a la nueva celda V(sp).
  - la mediatriz x1x2 es una arista de la frontera del nuevo polígono V(sp).
- Siguiendo por el segmento x1x2 se expande la frontera de la celda V(sp) de la forma siguiente:
  - La mediatriz h(sp,si) cruza la frontera de V(si) en x2 entrando a la celda adyacente V(sj).
  - Trazar la mediatriz h(sp,sj) y encontrar el punto de intersección x3 entre la mediatriz y la frontera de V(sj).

Algoritmo incremental

- De manera similar encontrar la secuencia de segmentos de mediatrices de sp y sus sitios vecinos hasta llegar al punto de intersección inicial x1.
- La secuencia {x1x2, x2x3, ... , xm-1xm, xmx1 } es la frontera en orden contrario a las manecillas del reloj de la celda de Voronoi del nuevo sitio sp V(sp).
- Finalmente borramos de Vor(P) la estructura que queda dentro del nuevo polígono V(sp) para obtener Vor(P’).

Construcción incremental



Construcción incremental