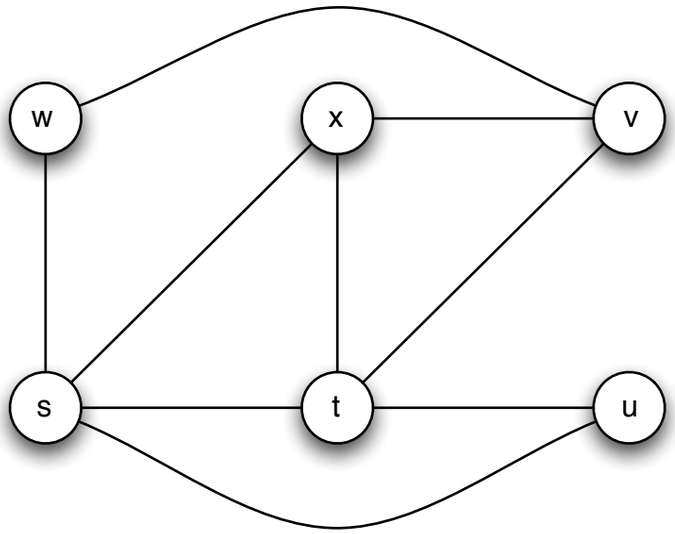
DFS

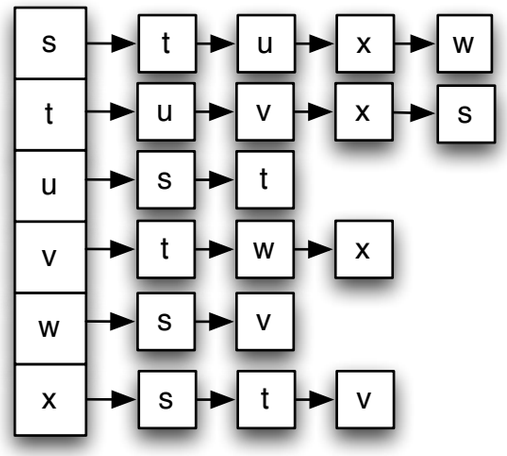
comp-420

Depth-First Search

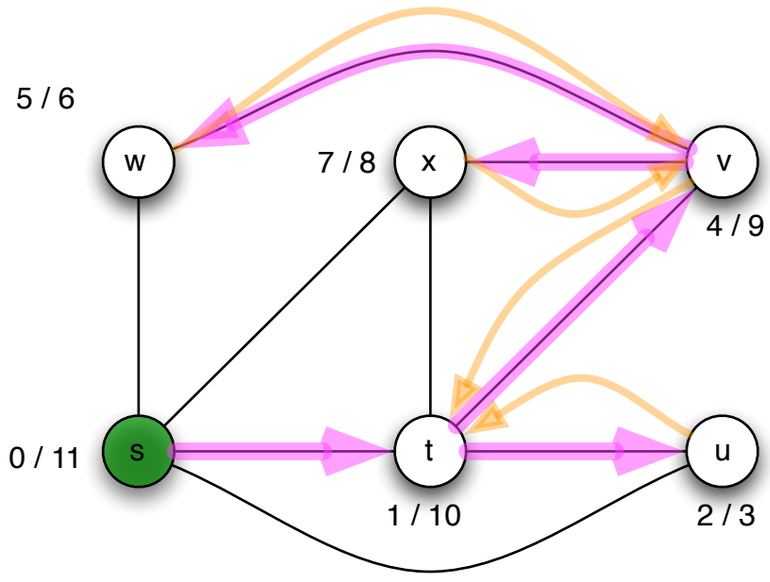
- Buscar lo más profundo de una gráfica mientras sea posible.
- Las aristas son exploradas a partir del vértice más recientemente descubierto que tenga aristas inexploradas.
- Cuando todas las aristas de v han sido exploradas, la búsqueda regresa (backtrack) hasta llegar a un vértice con aristas sin explorar.
- Este proceso se repite hasta que todos los vértices han sido descubiertos.

Depth-First Search

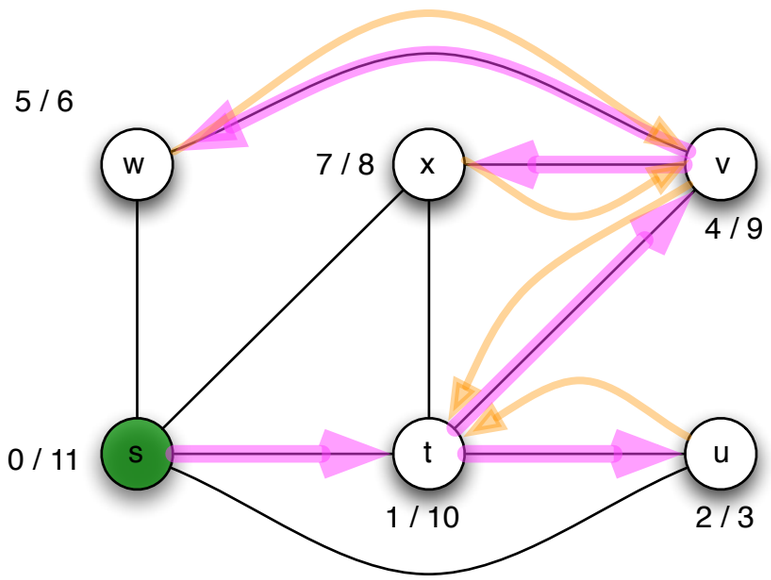


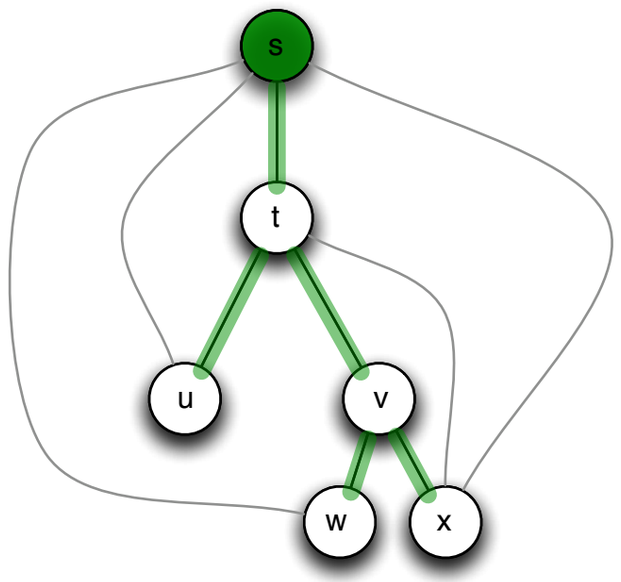


¿En qué orden visitamos los nodos?



Depth-First Tree





tree edges

back edges

Depth-First Search

- Supone una representación utilizando listas de adyacencia.
- El color de cada vértice $u \in V$ se almacena en la variable color[u].
- El predecesor de u se almacena en la variable π[u].
- La subgráfica de predecesores puede formar más de un árbol porque la búsqueda se puede repetir a partir de múltiples fuentes.
- La subgráfica de predecesores se define como:

$$G_\pi = (V, E_\pi)$$

$$E_\pi = \{(\pi[v], v) : v \in V \text{ y } \pi[v] \neq \text{NIL } \}.$$

- La subgráfica de predecesores en DFS forma un bosque compuesto de depth-first trees.
- Las aristas en E_π se llaman tree edges.

Depth-First Search

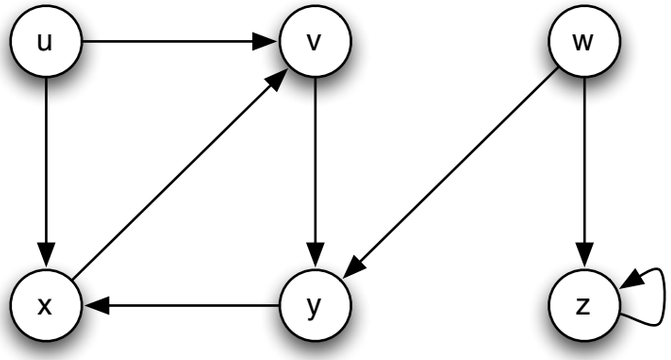
- DFS también mantiene un sello de tiempo (timestamp) en cada vértice.
- Cada vértice v tiene dos timestamps: d[v] que almacena el momento en que v es descubierto (coloreado de gris), y f[v] cuando se termina de examinar su lista de adyacencia (colorea de negro).
- d[v] y f[v] son números enteros entre 1 y 2|V|, porque...
  - hay un solo evento de descubrimiento y un evento de terminación para cada uno de los |V| vértices.
- Para cada vértice u,
  - d[u] < f[u].

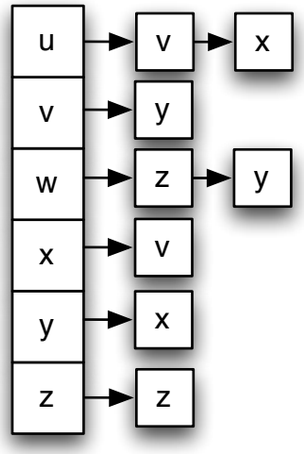
DFS(G)

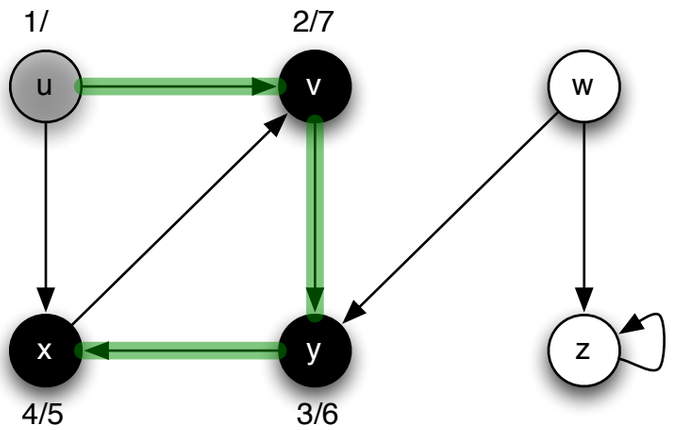
```
1   for each vertex u ∈ V[G]
2       do color[u] ← WHITE
3          π[u] ← NIL
4   time ← 0
5   for each vertex u ∈ V[G]
6       do if color[u] = WHITE
7          then DFS-VISIT(u)
```

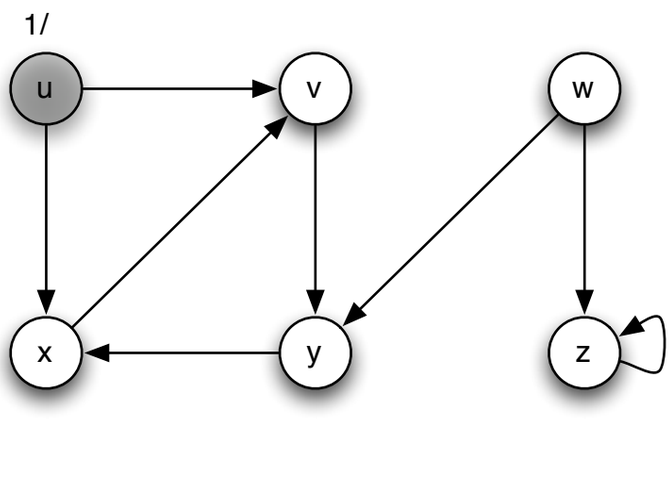
DFS-VISIT(u)

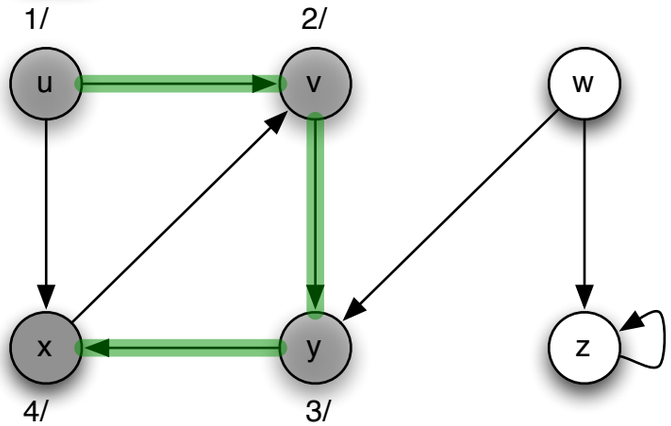
```
1   color[u] ← GRAY // White vertex u has just been discovered.
2   time ← time + 1
3   d[u] ← time
4   for each v ∈ Adj[u]          // Explore edge (u, v).
5       do if color[v] = WHITE
6           then π[v] ← u
7                DFS-VISIT(v)
8   color[u] ← BLACK             // Blacken u; it is finished.
9   f[u] ← time ← time + 1
```

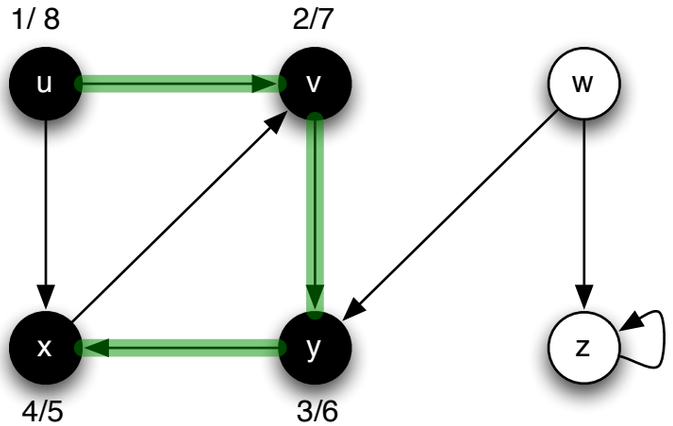

u
v
w
x
y
z

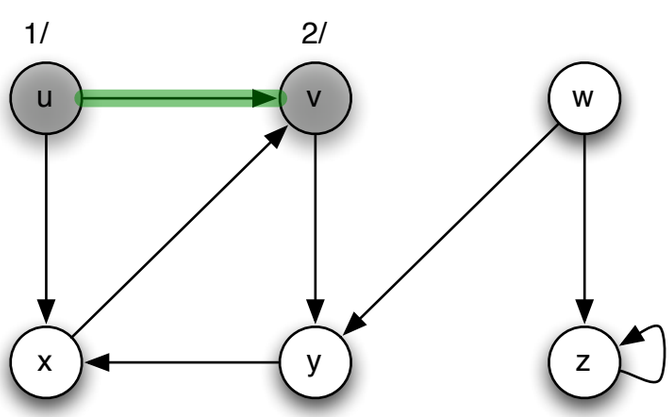

u
v
x
v
y
w
z
y
x
v
y
x
z
z

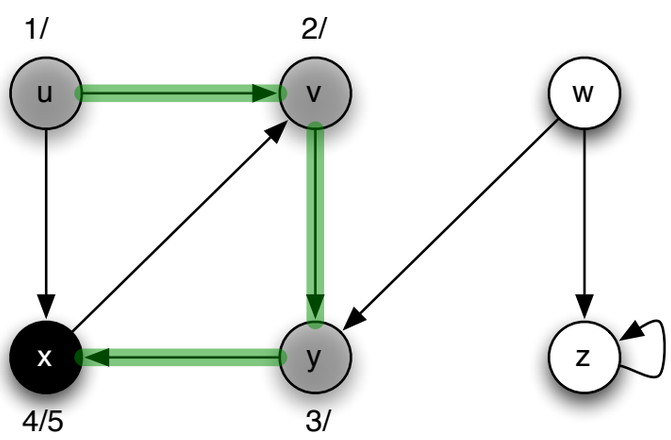

1/
2/7
u
v
w
x
y
z
4/5
3/6

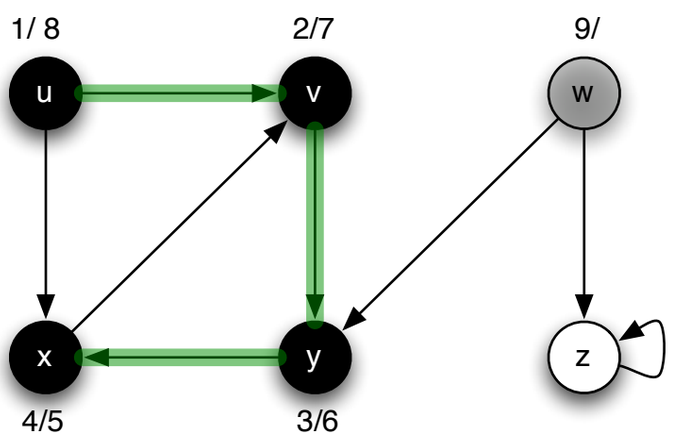

1/
u
v
w
x
y
z

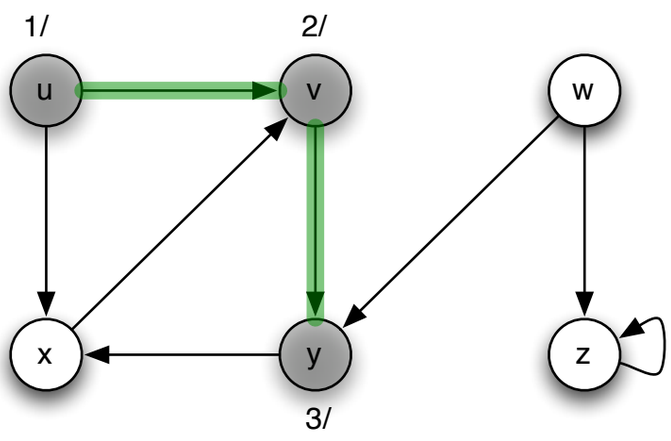

1/
2/
u
v
w
x
y
z
4/
3/

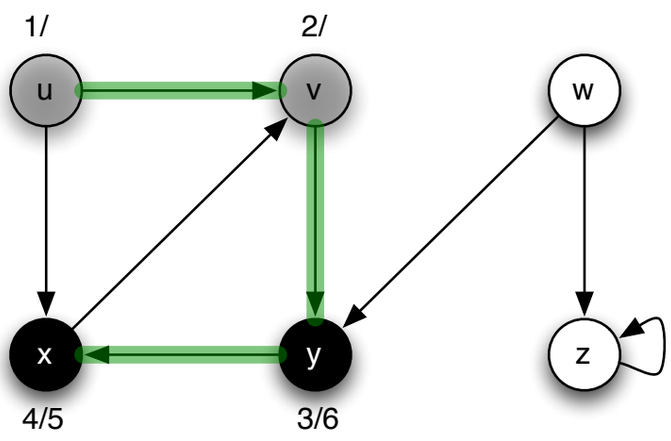

1/ 8
2/7
u
v
w
x
y
z
4/5
3/6

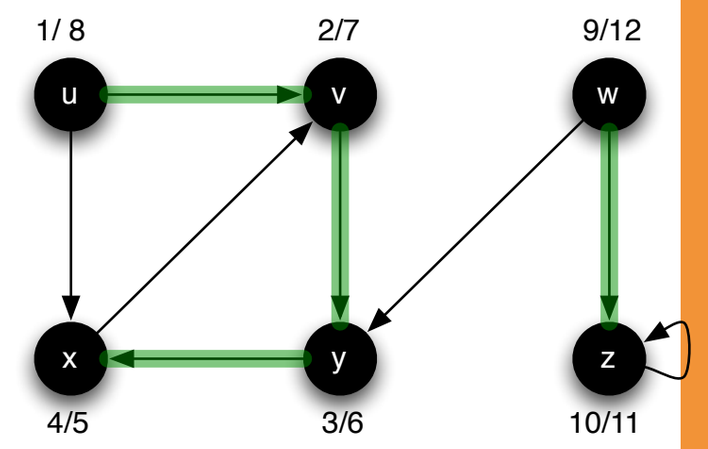

1/
2/
u
v
w
x
y
z


1/
2/
u
v
w
x
y
z
4/5
3/


1/ 8
2/7
9/
u
v
w
x
y
z
4/5
3/6


1/
2/
u
v
w
x
y
z
3/


1/
2/
u
v
w
x
y
z
4/5
3/6


1/ 8
2/7
9/12
u
v
w
x
y
z
4/5
3/6
10/11

DFS: Tiempo de Cálculo

- ¿Cuál es el tiempo de cálculo de los cíclos de las líneas 1 a 3?
- ¿y de las líneas 5 a 7? (sin contar el tiempo que toma la llamada a DFS-VISIT(v))
  - $\Theta(V)$
- El procedimiento DFS-VISIT(v) es llamado exactamente
  - una vez para cada vértice $v \in V$ porque se llama sólo en los vértices blancos y la primera acción es pintarlos de gris.
- Durante la ejecución de DFS-VISIT(v), el cíclo de las líneas 4 a 7 se ejecuta...
  - Adj[v] veces.

DFS: Tiempo de Cálculo

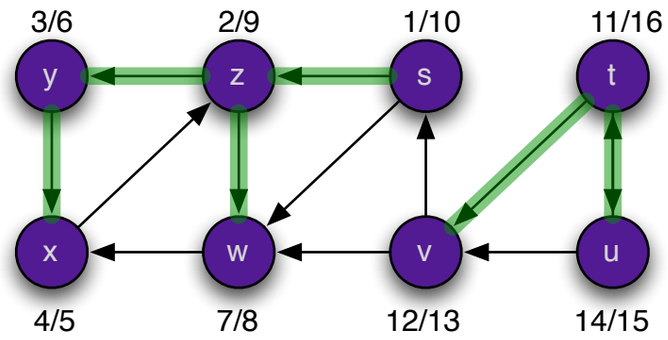
- Ya que $\sum_{v \in V} |Adj[v]| = \Theta(E)$, el costo total de ejecutar las las líneas 4 a 7 de DFS-VISIT(v) es $\Theta(E)$.

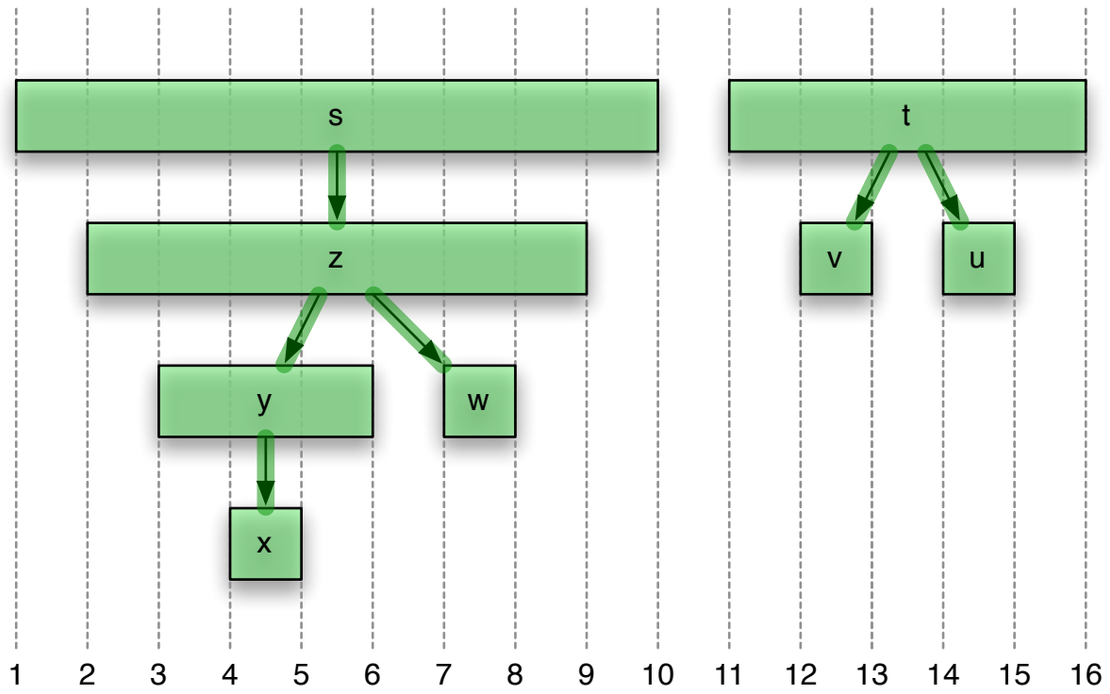
- El costo total de DFS es por lo tanto:

  - $\Theta(V+E)$.

Propiedades de DFS

- La subgráfica de predecesores, G_π forma un bosque de árboles ya que la estructura de los árboles produce exáctamente la estructura de llamadas recursivas de DFS-VISIT(v).
  - $u = \pi[v]$ si y solo si DFS-VISIT(v) fue llamada durante una búsqueda en la lista de adyacencia de u.
  - el vértice v es un descendiente de u en el bosque si y solo si v es descubierto durante el tiempo en que u es gris.
- Los tiempos de descubrimiento y terminación de un vértice tienen estructura de paréntesis:
  - si representamos el descubrimiento por "(u" y la terminación por "u)", el historial del algoritmo estará propiamente anidado.


3/6
2/9
1/10
11/16
y
z
s
t
x
w
v
u
4/5
7/8
12/13
14/15


s
t
z
v
u
y
w
x
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16

Teorema del Paréntesis

- En una búsqueda en profundidad (en una gráfica dirigida o no dirigida) G=(V,E), para cualquier par de vértices u y v, exactamente una de las siguientes condiciones se cumple:

  - Los intervalos [d[u],f[u]] y [d[v],f[v]] están completamente disjuntos y ningún vértice u o v son descendientes entre sí en el bosque depth-first.

  - El intervalo [d[u], f[u]] está enteramente contenido en el intervalo [d[v], f[v]], y u es descendiente de v en un árbol depth-first.

  - El intervalo [d[v], f[v]] está enteramente contenido en el intervalo [d[u], f[u]], y v es descendiente de u en un árbol depth-first.

Teorema del Paréntesis

- Para probar este teorema pensar en el caso en que d[u] < d[v] y en sus subcasos:
  - d[v] < f[u] : v ha sido descubierto mientras u era todavía gris. Esto implica que v es descendiente de u. Además como v fue descubierto más recientemente que u, sus nodos adyacentes serán explorados antes que el algoritmo regrese y termine de explorar u. En este caso el intervalo [d[v],f[v]] estará contenido en [[d[u],f[u]].
  - d[v] > f[u] : los intervalos están disjuntos, ninguno era gris, ninguno es descendiente de otro.
  - el caso en que d[v] < d[u] es simétrico.
- Corolario: un vértice v es un descendiente propio de otro vértice u en el bosque de profundidad para una gráfica (dirigida o no) si y solo si:

$$d[u] < d[v] < f[v] < f[u]$$

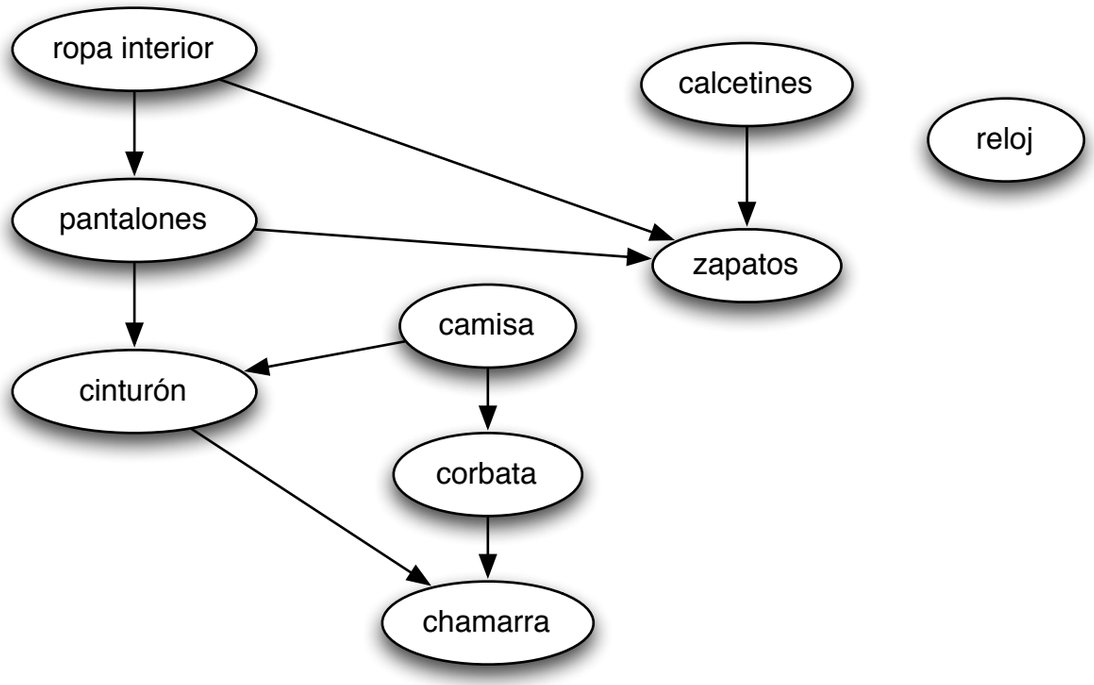
Topological Sort: aplicación de DFS

comp-420

Topological sort

- Ordenamiento topológico en una gráfica dirigida sin cíclos (directed acyclic graph o DAG).
- El ordenamiento topológico de un DAG G=(V,E) es un ordenamiento líneal de sus vértices tal que si G contiene una arista (u,v), entonces u aparece antes que v en el ordenamiento.
  - si la gráfica no es acíclica, no hay ordenamiento lineal posible.
- Ordenar los vértices en una línea horizontal de manera que las aristas vayan de izquierda a derecha.
- Se utiliza para ordenar eventos con precedencia.
- Se define una relación de orden parcial R sobre los nodos del DAG tal que xRy ssi existe un camino dirigido de x a y.
- El Topological sort es una extensión lineal de este orden, es decir un orden total compatible con el orden parcial dado por el DAG.

Topological sort

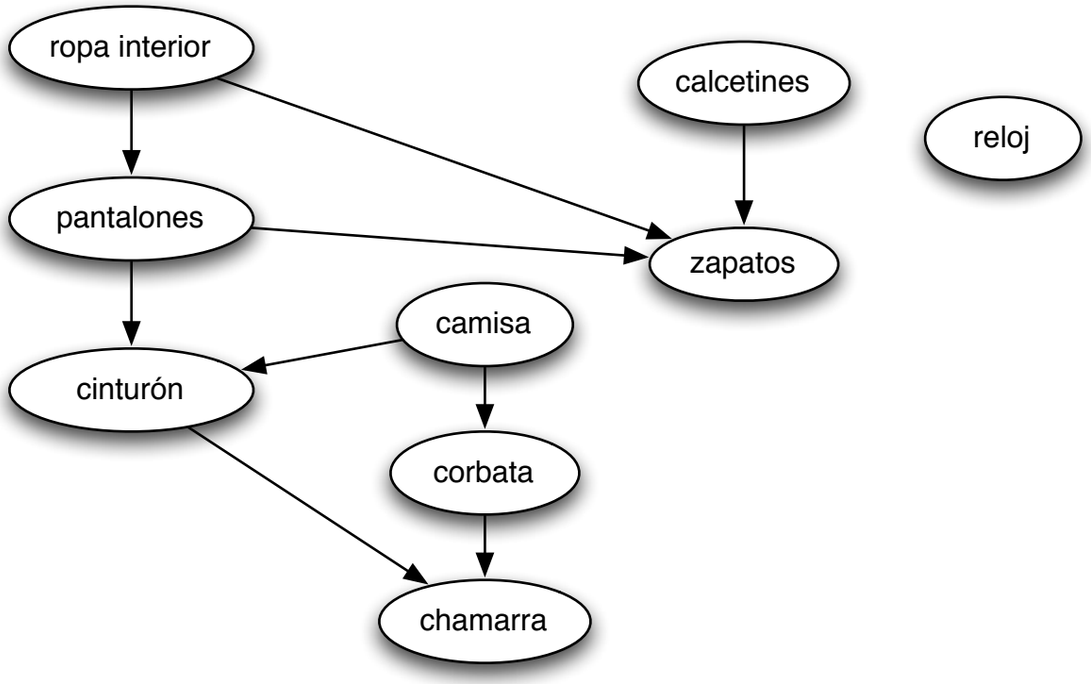


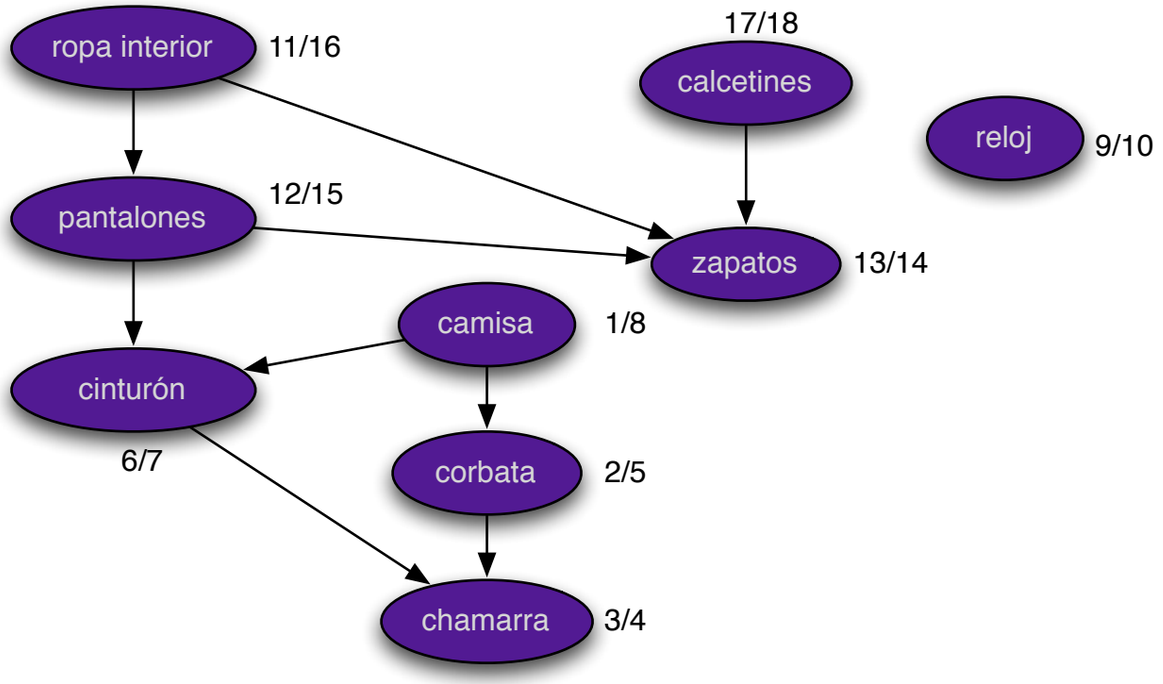
- Cada arista dirigida (u,v) significa que la prenda u debe ponerse antes que la prenda v.

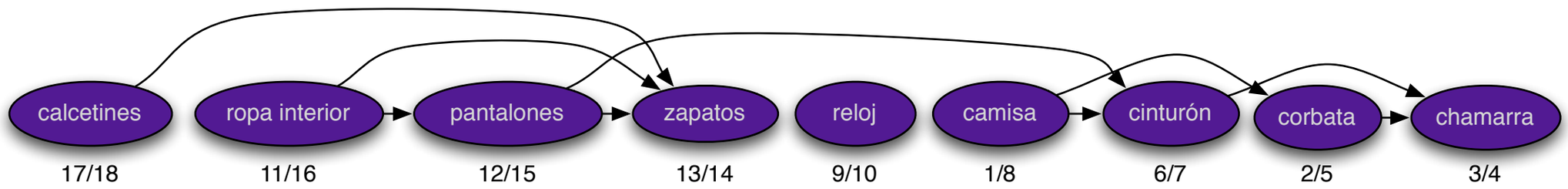
Topological-Sort(G)

1 call DFS(G) to compute finishing times $f[v]$ for each vertex v
2 as each vertex is finished, insert it onto the front of a linked list
3 **return** the linked list of vertices

Topological Sort







T-S: tiempo de cálculo

- DFS toma:
  - $\Theta(V+E)$
- ¿Tiempo de insertar un elemento en la lista?
  - $O(1)$
- ¿Cuántos elementos son insertados en la lista?
  - $|V|$ elementos.
- Tiempo total de cálculo:
  - $\Theta(V+E)$