



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

GRUPOS Y H-ESPACIOS EN HOMOTOPÍA DIRIGIDA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

P R E S E N T A :

RAÚL DAVID GOROCICA POLANCO

T U T O R :

DR. JOSÉ MARÍA CANTARERO LÓPEZ

MÉRIDA, YUCATÁN, MÉXICO
JULIO, 2025

A Leidy, Armando y Prisma

Agradecimientos

Gracias interminables a mi familia; su apoyo incondicional, esfuerzo y ejemplo a lo largo de los años me permitieron realizar este trabajo.

Agradezco profundamente a mi tutor de tesis, el Dr. José María Cantarero López, quien ha dedicado innumerables horas a ayudarme y resolver dudas de toda índole. Su guía no solo ha sido esencial para desarrollar el contenido, sino que fue mi principal fuente de motivación para continuar en estos senderos de las matemáticas.

A mis sinodales, el Dr. Didier Adán Solís Gamboa y el Dr. José Luis León Medina, agradezco por su invaluable asesoramiento y por el tiempo dedicado a la revisión de mi trabajo.

Asimismo, me gustaría expresar mi inmensa gratitud a mis profesores y profesoras de la Facultad de Matemáticas; este trabajo es fruto de compartir su conocimiento.

Apoyada por CONAHCYT (ahora SECIHTI) en el año 2023 mediante el proyecto de Ciencia de Frontera CF-2023-I-2649.

Apoyada por el Programa de tesis de licenciatura para alumnos externos del CIMAT en el año 2024.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Topología	5
1.1.1. Topología inicial y final inducida	5
1.1.2. Límites y colímites en Top	6
1.2. Categorías	9
1.2.1. Categorías monoidales y objetos exponenciables	9
1.3. Grupos de Lie	10
2. Espacios dirigidos	15
2.1. Estructuras dirigidas	15
2.2. Adjuntos del funtor olvido	17
2.3. Construcciones de espacios dirigidos	18
2.3.1. Estructura dirigida inicial y final inducida	19
2.3.2. Límites y colímites en dTop	20
2.3.3. Subespacio dirigido	22
2.3.4. Espacio cociente dirigido	22
2.3.5. Productos y coproductos de espacios dirigidos	23
2.3.6. d-espacios opuestos	24
2.4. Ejemplos	25
2.4.1. Espacios preordenados	25
2.4.2. Modelos estándar	28
2.4.3. Propiedades de los modelos estándar	29
2.4.4. Suspensiones	32
2.5. Caminos en espacios dirigidos	39
2.6. Espacios dirigidos exponenciables	39
3. Invariantes dirigidos	41
3.1. Invariantes puntuales	41
3.2. Homotopía en espacios dirigidos	43
3.2.1. La categoría fundamental	46
4. Estructuras dirigidas en grupos de Lie	49

4.1. Grupos dirigidos	50
4.2. Construcción de grupos de Lie dirigidos	55
4.2.1. Elección del abierto admisible en el grupo de Lie	57
4.2.2. Invarianza en la elección del isomorfismo lineal	61
4.3. Consecuencias y trabajo futuro	73
Bibliografía	79
Glosario de símbolos	81

Introducción

Los espacios dirigidos fueron introducidos por Marco Grandis en [Gra01a] a inicios del siglo. La idea detrás de estos surgió en un contexto más amplio de teoría de categorías con un trabajo previo del mismo autor, donde se exploraban construcciones de teoría de homotopía en otros contextos; específicamente, en [Gra01b] se estudió por primera vez a las *homotopías dirigidas*, las cuales difieren de su contraparte clásica, en general, por no ser reversibles. En este sentido, la reversibilidad se refiere a la cualidad de poder realizar ciertas construcciones dadas en la dirección contraria. Así, el propósito de los espacios dirigidos es modelar fenómenos no reversibles. Un campo donde ha resultado fructífera esta teoría es en ciencias de la computación, principalmente en el área de procesos concurrentes: en [FGH⁺16] se presenta un panorama reciente de esta intersección.

La distinción de los espacios dirigidos con los espacios topológicos es que los primeros tienen direcciones privilegiadas. Una manera de pensar en ellos es que son como ríos caudalosos, donde solo es posible navegar siguiendo la corriente del agua. Esta noción se concreta equipando a los espacios topológicos con una estructura de caminos, a los cuales llamaremos, inesperadamente (!), caminos dirigidos. Dicha estructura adicional cumple tres axiomas que enriquecen las construcciones usuales de topología, y a su vez, admiten que cualquier espacio topológico se vuelva dirigido al equiparlos con estructuras dirigidas triviales: la discreta y la natural. En la primera, se admiten únicamente a los caminos constantes, y en la segunda a todos los caminos. Los axiomas permiten replicar muchas construcciones de topología y obtener resultados análogos, pero habrá ocasiones en las que no sea posible ni siquiera plantear de forma directa los conceptos equivalentes de la teoría clásica.

Siendo un poco más concretos, una estructura dirigida sobre un espacio X es una familia de caminos dX en X que contiene a todos los constantes y es cerrada bajo concatenaciones y reparametrizaciones crecientes. A lo que llamaremos espacio dirigido es a la pareja (X, dX) para hacer hincapié en la estructura dirigida, y los caminos que están en dX son los denominados dirigidos. Se pueden hacer varias deducciones a partir de los axiomas que cumple dX , y una interesante es que se puede crear la estructura dirigida opuesta a dX al revertir todos los caminos que tiene. En ella, los caminos privilegiados son aquellos que van en el sentido opuesto con respecto a los de dX .

El primer ejemplo no trivial de un espacio dirigido es la recta real con la estructura

dirigida dada por su preorden, esto es, los caminos dirigidos son aquellos crecientes. Llamaremos recta real dirigida al espacio dirigido anterior y lo denotaremos con $\uparrow\mathbb{R}$ para distinguirlo del espacio subyacente. Si dibujáramos parte de la recta real en una pizarra con el cero en el centro, los números negativos a la izquierda y los positivos a la derecha, los caminos dirigidos de $\uparrow\mathbb{R}$ serían los que van de izquierda a derecha. En este sentido, la corriente del agua apunta a la derecha, y no se permiten los caminos a contracorriente. Esta estructura dirigida puede extrapolarse a cualquier espacio preordenado, especificando que los caminos dirigidos sean los que respeten el preorden. En especial, el intervalo dirigido $\uparrow\mathbb{I}$ tiene esa estructura, y con ella es un subespacio dirigido de $\uparrow\mathbb{R}$.

Otro ejemplo importante es el círculo dirigido $\uparrow\mathbb{S}^1$, cuyos caminos dirigidos son los que se mueven en sentido antihorario. A diferencia de $\uparrow\mathbb{R}$, en $\uparrow\mathbb{S}^1$ hay lazos dirigidos, i.e., caminos dirigidos no constantes que terminan en el mismo punto donde iniciaron. No solo eso, los lazos dirigidos de $\uparrow\mathbb{S}^1$ son irreversibles: no está permitido recorrerlos en el sentido contrario. Esta propiedad no puede lograrse con la estructura dirigida de espacios preordenados, razón por la que Grandis definió a los espacios dirigidos en un contexto más general.

Como se mencionó, hay una estrecha relación con teoría de categorías. Sucede que los espacios dirigidos forman una categoría que comparte muchas características con la de espacios topológicos, y existen funtores que los conectan. Los morfismos de esta categoría, denotada con $\mathbf{dTop}$, son los mapeos que preservan caminos dirigidos. Por ello, podría pasar que dos espacios dirigidos sean homeomorfos pero no isomorfos en $\mathbf{dTop}$; un caso donde sucede lo anterior es con $\uparrow\mathbb{R}$ y la recta real con la estructura dirigida natural. Para mencionar algo en común que tienen $\mathbf{dTop}$ y la categoría $\mathbf{Top}$ de espacios topológicos, es que poseen todos los límites y colímites de funtores que vienen desde categorías pequeñas. Esto quiere decir que es posible hacer productos, coproductos, pushouts, pullbacks y muchas otras construcciones de espacios dirigidos que vienen acompañadas de propiedades universales. Como se verá más adelante, el autor aprovecha cada oportunidad para dar argumentos en las demostraciones usando propiedades universales y diagramas conmutativos.

Gran parte del estudio que se ha realizado en el tema se concentra en comprender a los espacios dirigidos desde ese punto de vista, es decir, crear las herramientas categóricas necesarias que proporcionen información sobre los susodichos. No se esperaría que la transición de la categoría $\mathbf{Top}$ a $\mathbf{dTop}$ sea trivial, y efectivamente, no es necesario indagar profundamente para notar que se ha perdido un artilugio fundamental de topología algebraica: los grupos de homotopía superiores. Como se ha indicado implícitamente, tiene sentido hablar de homotopía en la nueva categoría, así como de la versión dirigida del grupo fundamental, llamada *la categoría fundamental*. Ésta tiene por objetos a los puntos del espacio subyacente y como morfismos $a \rightarrow b$ a los caminos dirigidos que inician en a y terminan en b .

Durante años, la categoría fundamental fue el tema predilecto de varios autores interesados en el área; muestra de ello son los libros y artículos [FRGH04], [GH07], [Bub09] y [BBL24]. Esto se debe a que la categoría fundamental de un espacio dirigido se

define de una forma compatible e intuitiva comparada con el grupoide fundamental del espacio subyacente, convirtiéndolo en un invariante poderoso en $\mathbf{dTop}$. Como ya se ha mencionado, con lo que no se ha tenido suerte es con las versiones superiores de la categoría fundamental, referidas como las *n-categorías fundamentales*; en [Gra06] se exploran algunos acercamientos, al igual que se aluden sus complicaciones.

Parte de la dificultad del problema anterior es que no se cuenta con un amplio repertorio de espacios dirigidos de los cuales basarse para encontrar nuevos invariantes, y aunque no se contribuya con este enfoque, resulta interesante examinar otras estructuras dirigidas alternativas a las que propone Grandis para algunos espacios relevantes. Con el propósito de fijarse una meta, se desearía que los espacios dirigidos resultantes sean homogéneos, pues es una característica de la que carecen las esferas dirigidas en contraste con las esferas clásicas de topología. Una manera de lograr lo anterior es construyendo grupos con estructuras dirigidas compatibles.

En el Capítulo 5 se explora la noción de grupos dirigidos, quienes se definen de forma análoga a los grupos topológicos agregando condiciones para que la estructura dirigida del grupo se preserve con las operaciones de multiplicación y de tomar inversos. No obstante, en la literatura solo hay un par de ejemplos no triviales, como el círculo dirigido y la recta real dirigida, al igual que productos de ellos. En congruencia, el presente trabajo concierne más a proponer estructuras dirigidas sobre grupos de Lie.

Los grupos de Lie llevan tal nombre en honor al matemático noruego Sophus Lie, quien cimentó las ideas detrás de éstos a finales del siglo diecinueve. En resumen, los grupos de Lie son variedades diferenciables con estructura de grupo tales que las operaciones de multiplicación y de obtener inversos son suaves. La importancia de los grupos de Lie en topología yace en que se usan para simular simetrías en otras variedades y dan lugar a espacios de interés, como los espacios homogéneos. La estructura de los grupos de Lie es bastante bien conocida, a tal grado que los grupos de Lie compactos y conexos pueden clasificarse en su totalidad. Esta clasificación se reduce, indirectamente, a entender a los grupos de Lie compactos, conexos, simplemente conexos y simples. La lista de estos últimos es pequeña (salvo isomorfismo), y en ella se encuentra el grupo especial unitario. En consecuencia, ese grupo juega un papel imperante para comprender a los grupos de Lie compactos y conexos ya que interviene de manera subyacente en todos ellos, justificando el especial énfasis que se tendrá con él en la tesis.

Del gran almacén de propiedades que poseen los grupos de Lie, la que permite lograr nuestra meta de equiparlos con estructuras dirigidas es que son localmente homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, y este espacio cuenta con una estructura dirigida de interés. El método para hacerlo consta de tres etapas. La primera es copiar la estructura dirigida de $\uparrow\mathbb{R}^n$, que es el producto de $\uparrow\mathbb{R}$ consigo mismo n veces, en el álgebra de Lie del grupo en cuestión. Luego, la estructura dirigida que se copió en el álgebra de Lie se transmite parcialmente al grupo de Lie mediante el mapeo exponencial, el cual es un homeomorfismo local. Por último, se propaga la estructura dirigida parcial utilizando la multiplicación del grupo. Con este proceso se logra crear grupos dirigidos, pero la construcción depende de dos elecciones que nos gustaría evitar. Por supuesto, se

abordan las repercusiones de las elecciones y algunas formas de contrarrestarlas.

En esencia, las consecuencias de la construcción de estructuras dirigidas sobre grupos de Lie se enuncian en el próximo teorema. En él, dG_f es la estructura dirigida que se propone en el Capítulo 5.

Teorema. *Sean G un grupo de Lie de dimensión finita y positiva, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$ un isomorfismo lineal. Entonces se cumple lo siguiente:*

- a) *La pareja (G, dG_f) es un grupo dirigido,*
- b) *el espacio dirigido (G, dG_f) es homogéneo,*
- c) *dG_f solo depende, a priori, de la elección del isomorfismo lineal f ,*
- d) *la estructura dirigida dG_f posee caminos no constantes,*
- e) *en particular, para $G = \mathbb{S}^1$ y un isomorfismo lineal f apropiado, (G, dG_f) es exactamente el mismo espacio dirigido que $\uparrow\mathbb{S}^1$,*
- f) *si $T: \uparrow\mathbb{R}^n \rightarrow \uparrow\mathbb{R}^n$ es lineal e isomorfismo en $\mathbf{dTop}$, entonces $dG_f = dG_{fT}$,*
- g) *las estructuras dG_{-f} y la opuesta de dG_f coinciden,*
- h) *si G es simplemente conexo y $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$ es otro isomorfismo lineal tal que $gf^{-1}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, hay un isomorfismo de grupos dirigidos entre (G, dG_f) y (G, dG_g) ,*
- i) *en general, (G, dG_f) no es un espacio dirigido localmente isomorfo a $\uparrow\mathbb{R}^n$.*

Además, existe una fuerte sospecha de la siguiente propiedad.

Conjetura. *Sean G un grupo de Lie de dimensión finita y positiva, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{g}$ un isomorfismo lineal. Entonces dG_f no coincide con la estructura dirigida natural de G . Es decir, hay caminos de G que no están en dG_f .*

Este enunciado es evidente en ciertos casos, como aquel del inciso e) del teorema previo, y aunque el caso general no ha podido ser demostrado por el autor, el mismo tiene un trabajo en progreso para probarlo. La conjetura puede marcar una gran diferencia en el valor del contenido desarrollado en el último capítulo de la tesis.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Topología

Con la finalidad de detallar algunas construcciones en espacios topológicos que luego serán retomadas en espacios dirigidos, primero mostramos la existencia de todos los límites y colímites en **Top**, cuya prueba se basa esencialmente en las topologías inicial y final inducidas por una familia de funciones. En la siguiente sección, veremos que la demostración de la existencia de límites y colímites en **dTop** es prácticamente igual, usando un argumento de estructura inicial y final inducida.

En lo que sigue, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{I}$ y $\mathbb{S}^1$ denotarán a los números reales, los complejos, el intervalo unitario y el círculo unitario con las topologías usuales, respectivamente.

1.1.1. Topología inicial y final inducida

La siguiente proposición nos enseña la forma de dotar a un conjunto de una topología con la cual cierta familia de funciones son continuas.

Proposición 1.1.1. *Dado un conjunto S , una familia de espacios topológicos $\{(X_j, \tau_j)\}$ y familias de funciones $\Omega = \{f_j: S \rightarrow X_j\}$, $\Psi = \{g_j: X_j \rightarrow S\}$ indizadas sobre un conjunto J , existen*

- a) *la topología τ_Ω en S más pequeña tal que todas las funciones $f_j: (S, \tau_\Omega) \rightarrow (X_j, \tau_j)$ son continuas, y*
- b) *la topología más grande τ^Ψ en S verificando que cualquier $g_j: (X_j, \tau_j) \rightarrow (S, \tau^\Psi)$ es continua.*

Demostración. Para lo primero, sea Γ el conjunto de todas las topologías τ en S tales que $f_j: (S, \tau) \rightarrow (X_j, \tau_j)$ es continua para cada $j \in J$; el conjunto Γ no es vacío porque si S está equipado con la topología discreta se cumple la continuidad de las funciones f_j . La intersección τ_Ω de las topologías $\tau \in \Gamma$ es una topología sobre S que satisface la continuidad de las f_j , pues dado un abierto U de X_j , el conjunto $f_j^{-1}(U)$ está en

cualquier topología $\tau \in \Gamma$. A τ_Ω lo nombramos *la topología inicial* en S inducida por la familia Ω .

Para el segundo inciso, basta con definir

$$\tau^\Psi = \{U \subseteq S \mid g_j^{-1}(U) \in \tau_j \text{ para todo } j \in J\}.$$

El conjunto τ^Ψ es una topología en S con la propiedad de que $g_j: (X_j, \tau_j) \rightarrow (S, \tau^\Psi)$ es continua para todo j , y es la más grande pues si hubiera una topología τ' en S cumpliendo lo anterior y tomamos un abierto $U \in \tau'$, entonces $g_j^{-1}(U) \in \tau_j$ para cada j , i.e., $U \in \tau^\Psi$. A τ^Ψ la llamamos *la topología final* en S inducida por Ψ . $\square$

Además de proveer topologías que nos garantizan la continuidad de las familias Ω y Ψ , la topología inicial y final proporcionan una caracterización de la continuidad de ciertas funciones:

Proposición 1.1.2. *Sea Y un espacio topológico. Con las hipótesis de la proposición previa,*

- a) *si S tiene la topología inicial τ_Ω , entonces la función $h: Y \rightarrow S$ es continua si y solo si $f_j h$ es continua para todo $j \in J$,*
- b) *si S está equipado con la topología final τ^Ψ , una función $q: S \rightarrow Y$ es continua si y solo si cada composición $q g_j$ es continua.*

Demostración. Sea Γ el conjunto de todas las topologías τ en S tales que $f_j: (S, \tau) \rightarrow (X_j, \tau_j)$ es continua para cada $j \in J$. Si h es continua, se sigue inmediatamente que cualquier $f_j h$ es continua por ser la composición de funciones continuas. Recíprocamente, supongamos que cada $f_j h$ es continua y definamos a τ_h como la colección de subconjuntos $U \subseteq S$ tales que $h^{-1}(U)$ es abierto en Y ; τ_h es una topología, y más aún, está en Γ porque si damos un abierto V de cualquier X_j , la preimagen $f_j^{-1}(V)$ pertenece a τ_h por la identidad $h^{-1}(f_j^{-1}(V)) = (f_j h)^{-1}(V)$. Después, cada f_j es continua si S tiene la topología τ_h , y como $\tau_\Omega \subseteq \tau_h$, dado $U \in \tau_\Omega$ se sigue $U \in \tau_h$ y $h^{-1}(U)$ es abierto en Y .

Para el inciso b), la necesidad es cierta por el primer argumento del párrafo anterior. Para la suficiencia, asumamos que cada $q g_j$ es continua; si V es un abierto de Y , entonces $q^{-1}(V) \in \tau^\Psi$, ya que $g_j^{-1}(q^{-1}(V)) = (q g_j)^{-1}(V) \in \tau_j$ para todo $j \in J$. $\square$

1.1.2. Límites y colímites en **Top**

Gracias a los resultados anteriores, podemos mostrar que en la categoría **Top** de espacios topológicos todos los límites y colímites existen.

Proposición 1.1.3. *Sea C una categoría pequeña y $F: C \rightarrow \mathbf{Top}$ un funtor covariante. Entonces existen el límite y colímite de F en **Top**.*

Demostración. Denotemos con J al conjunto de objetos de C y $(X_j, \tau_j) = F(j)$ para $j \in J$. Primero mostraremos la existencia del límite de F . Para ello, sea

$$\varprojlim_C F = \left\{ (x_j)_j \in \prod_{j \in J} X_j \mid F(\phi)(x_i) = x_{i'} \text{ para todo morfismo } \phi: i \rightarrow i' \right\}$$

equipado con la topología inicial inducida por las funciones de proyección

$$\begin{aligned} p_i: \varprojlim_C F &\rightarrow X_i \\ (x_j)_j &\mapsto x_i. \end{aligned}$$

Por como se definió, para todo morfismo $\phi: i \rightarrow i'$ en C , el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \varprojlim_C F & \\ p_i \swarrow & & \searrow p_{i'} \\ X_i & \xrightarrow{F(\phi)} & X_{i'} \end{array}$$

conmuta; si hubiera otro espacio Y y funciones continuas $\sigma_j: Y \rightarrow X_j$ cumpliendo lo anterior, la función

$$\begin{aligned} h: Y &\rightarrow \varprojlim_C F \\ y &\mapsto (\sigma_j(y))_{j \in J} \end{aligned}$$

es continua en vista de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{h} & \varprojlim_C F \\ & \searrow \sigma_i & \downarrow p_i \\ & & X_i \end{array}$$

para cualquier $i \in J$. La unicidad de h es resultado de la conmutatividad anterior.

Ahora probaremos la existencia del colímite de F . Sea

$$\varinjlim_C F = \prod_{j \in J} X_j / \sim, \quad (1.1)$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por $(x, i) \sim (F(\phi)(x), i')$ para cada

morfismo $\phi: i \rightarrow i'$ en C , y equipado con la topología final inducida por las funciones

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_i: X_i &\rightarrow \varinjlim_C F \\ x &\mapsto [x, i]. \end{aligned}$$

De esta forma para cualquier $\phi: i \rightarrow i'$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{F(\phi)} & X_{i'} \\ & \searrow \mathcal{J}_i \quad \swarrow \mathcal{J}_{i'} & \\ & \varinjlim_C F & \end{array}$$

conmuta por la igualdad $\mathcal{J}_i(x) = [x, i] = [F(\phi)(x), i'] = \mathcal{J}_{i'} F(\phi)(x)$.

Si hallamos otro espacio Y y mapeos $\sigma'_j: X_j \rightarrow Y$ que verifican lo anterior, podemos notar que $\sigma'_i(x) = \sigma'_{i'} F(\phi)(x)$ y por tanto la función

$$\begin{aligned} q: \varinjlim_C F &\rightarrow Y \\ [x, i] &\mapsto \sigma_i(x) \end{aligned}$$

está bien definida y de hecho es continua porque los diagramas

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\mathcal{J}_i} & \varinjlim_C F \\ & \searrow \sigma'_i & \downarrow q \\ & & Y \end{array}$$

conmutan; a su vez, q está determinado únicamente por la conmutatividad del diagrama previo. $\square$

Observación 1.1.4. La relación de equivalencia definida en (1.1) puede ser descrita como aquella donde $(x, i) \sim (x', i')$ si y solo si existe un zigzag de morfismos en C de la forma

$$\begin{array}{ccccccc} & i_1 & & i_3 & & i_{2n-1} & \\ & \swarrow \phi_1 \quad \searrow \omega_1 & & \swarrow \phi_3 \quad \searrow \omega_3 & & \swarrow \phi_{2n-1} \quad \searrow \omega_{2n-1} & \\ i_0 = i & & i_2 & & \dots & & i_{2n} = i' \end{array}$$

y elementos $x_\ell \in X_{i_\ell}$ con ℓ impar tales que $F(\phi_1)(x_1) = x$, $F(\omega_{2n-1})(x_{2n-1}) = x'$ y $F(\phi_\ell)(x_\ell) = F(\omega_{\ell-2})(x_{\ell-2})$ para todo $3 \leq \ell \leq 2n-1$ impar.

1.2. Categorías

Las siguientes definiciones nos permiten contextualizar algunos conceptos esenciales que se abarcan en varias de las referencias. A pesar de ello, se podría leer la mayoría del trabajo sin conocer estas definiciones y consultarlas cuando sea necesario.

Como notación general, dada una categoría C y objetos a, b de ella, $C(a, b)$ representa al conjunto de morfismos $a \rightarrow b$.

1.2.1. Categorías monoidales y objetos exponenciables

Se omite describir a detalle algunas condiciones de coherencia ya que no se usarán explícitamente en los capítulos posteriores. Los libros [Ric20] y [Rie16] proveen definiciones más minuciosas.

Definición 1.2.1. Una *categoría monoidal* consiste de una categoría C junto con un funtor $\otimes: C \times C \rightarrow C$ y un objeto e de C tal que

- a) la operación $\otimes$ es asociativa salvo isomorfismo natural, esto es, que para cualesquiera objetos a, b, c , se tiene $(a \otimes b) \otimes c \cong a \otimes (b \otimes c)$,
- b) el objeto e es la identidad de $\otimes$ salvo isomorfismo natural, o sea que $e \otimes c \cong c \cong c \otimes e$ para cada objeto c ,
- c) los tres isomorfismos anteriores cumplen unas condiciones de coherencia conocidas como las identidades del triángulo y del pentágono.

Observación 1.2.2. Un isomorfismo natural se refiere a una transformación natural entre funtores F y G tal que las componentes de la transformación son isomorfismos, y escribimos esto como $F \cong G$; cuando esto ocurre decimos que F y G son naturalmente isomorfos. Por ejemplo, la expresión $(a \otimes b) \otimes c \cong a \otimes (b \otimes c)$ nos dice que los funtores $F, G: C \times C \times C \rightarrow C$ dados por

$$F(a, b, c) = (a \otimes b) \otimes c, \quad G(a, b, c) = a \otimes (b \otimes c),$$

son naturalmente isomorfos.

Definición 1.2.3. Una *categoría monoidal simétrica* es una categoría monoidal C equipada con un isomorfismo natural s cuyas componentes son de la forma

$$s_{a,b}: a \otimes b \rightarrow b \otimes a.$$

Además, se debe satisfacer que la composición $s_{b,a} \circ s_{a,b}$ es el morfismo identidad de $a \otimes b$, una condición que relaciona a s con los isomorfismos naturales de la expresión $e \otimes c \cong c \cong c \otimes e$ y la identidad del hexágono con respecto al isomorfismo natural de la asociatividad de $\otimes$.

Definición 1.2.4. Sea C una categoría monoidal simétrica. Decimos que un ob-

jeto c es *exponenciable* si el funtor $- \otimes c: C \rightarrow C$ posee un adjunto por la derecha. Denotamos al adjunto con $(-)^c: C \rightarrow C$ o bien $\text{Hom}(c, -)$. Si todos los objetos de C son exponenciables, se dice que la categoría C es *cerrada*.

A pesar de que la colección de todas las categorías no forma una categoría, es posible forzarlo al restringir los objetos a categorías pequeñas.

Definición 1.2.5. La categoría **Cat** de categorías pequeñas tiene por morfismos de la categoría C a la categoría D a los funtores $C \rightarrow D$.

1.3. Grupos de Lie

A continuación se enuncian definiciones y resultados que nos servirán en el Capítulo 4. Este contenido es estándar y puede consultarse en varios libros sobre variedades suaves, como podría ser [Lee13]. Únicamente se mencionarán conceptos relacionados a grupos de Lie, omitiendo aquellos más elementales.

Definición 1.3.1. Un *grupo de Lie* es una variedad suave G con estructura de grupo tal que las operaciones de multiplicación y de tomar inversos

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G & G &\rightarrow G \\ (g, g') &\mapsto gg' & g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

son suaves.

Definición 1.3.2. Sea G un grupo de Lie. Un *subgrupo de Lie* de G es un subgrupo de G equipado con una topología y estructura suave que lo convierten en un grupo de Lie y a su vez subvariedad encajada de G .

El *grupo lineal general*

$$GL_n(F) = \{\text{Matrices de } n \times n \text{ invertibles con entradas en el campo } F = \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$$

es un grupo de Lie con la multiplicación de matrices usual. El *grupo especial lineal*

$$SL_n(F) = \{A \in GL_n(F) \mid \det A = 1\}$$

es un subgrupo de Lie de $GL_n(F)$, al igual que

$$\begin{aligned} U_n &= \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = A^*\}, \\ O_n &= \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}, \end{aligned}$$

llamados *grupo unitario* y *grupo ortogonal*, respectivamente. Similarmente, los grupos

especial unitario y especial ortogonal

$$\begin{aligned} SU_n &= U_n \cap SL_n(\mathbb{C}), \\ SO_n &= O_n \cap SL_n(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

son subgrupos de Lie de U_n y O_n . A todos estos grupos se les conoce coloquialmente como *grupos de Lie clásicos*.

Definición 1.3.3. Sean G, H grupos de Lie. Un *homomorfismo de grupos de Lie* es un mapeo suave $G \rightarrow H$ que es homomorfismo de grupos.

Los grupos de Lie forman una categoría cuyos morfismos consisten en los homomorfismos de grupos de Lie. Esta categoría está estrechamente relacionada con la de álgebras de Lie.

Definición 1.3.4. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial real equipado con un mapeo $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ denotado mediante $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ y llamado *corchete de Lie* de $\mathfrak{g}$, que para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ satisface:

a) Bilinealidad:

$$\begin{aligned} [aX + bY, Z] &= a[X, Z] + b[Y, Z], \\ [Z, aX + bY] &= a[Z, X] + b[Z, Y]. \end{aligned}$$

b) Antisimetría:

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

c) La identidad de Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Todo grupo de Lie tiene asociado un álgebra de Lie. En efecto, si G es un grupo de Lie, el conjunto de campos vectoriales (suaves) invariantes por la izquierda en G es un álgebra de Lie, al cual llamaremos *álgebra de Lie* de G , y usualmente lo denotaremos con $\mathfrak{g}$. Este espacio vectorial puede identificarse con el plano tangente de G en el elemento identidad; es decir, hay un isomorfismo de espacios vectoriales entre el plano tangente de G en la identidad y $\mathfrak{g}$. Este resultado es lo que nos permite relacionar la dimensión de un grupo de Lie en el sentido de variedades con la dimensión de su álgebra de Lie como espacio vectorial, pues coinciden.

Para nuestros fines, no es imperante describir el corchete de $\mathfrak{g}$, es suficiente con saber algunas de sus propiedades, en especial aquellas que se relacionan con el mapeo exponencial.

Definición 1.3.5. Un *homomorfismo de álgebras de Lie* es una transformación lineal que preserva los corchetes. Es decir, si $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ son álgebras de Lie, decimos que

$f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie si es lineal y

$$f([X, Y]) = [f(X), f(Y)]$$

para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{g}$. Si f posee una inversa (que también sea un homomorfismo de álgebras de Lie), diremos que f es un *isomorfismo de álgebras de Lie*.

En particular, dado un homomorfismo de grupos de Lie $f: G \rightarrow H$, su diferencial en el elemento identidad $df: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie; más aún, esta asignación es funtorial.

En el caso de los grupos de Lie clásicos, es sencillo identificar a sus correspondientes álgebras de Lie: el de $GL_n(F)$ es

$$\mathfrak{gl}_n = \{\text{Matrices de } n \times n \text{ con entradas en } F = \mathbb{R}, \mathbb{C}\},$$

mientras que

$$\mathfrak{sl}_n(F) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(F) \mid \text{tr } A = 0\}$$

es el de $SL_n(F)$. Con respecto a U_n y SU_n , sus álgebras de Lie son

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_n &= \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid A + A^* = 0\}, \\ \mathfrak{su}_n &= \mathfrak{u}_n \cap \mathfrak{sl}_n, \end{aligned}$$

respectivamente. Curiosamente, O_n y SO_n comparten el álgebra de Lie, siendo

$$\mathfrak{o}_n = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid A + A^T = 0\}.$$

Todas las álgebras de Lie anteriores están equipadas con el corchete conmutador, que es aquel dado por

$$[A, B] = AB - BA.$$

El último concepto fundamental que abarcaremos relaciona a los grupos de Lie con sus álgebras de Lie. Dado un grupo de Lie G y su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, existe un mapeo suave $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ llamado el *mapeo exponencial* de G que verifica las siguientes propiedades:

- a) para cada $s, t \in \mathbb{R}$ y $X \in \mathfrak{g}$, $\exp(sX + tX) = \exp(sX) \exp(tX)$,
- b) para todo entero m y $X \in \mathfrak{g}$, se tiene $\exp(mX) = \exp(X)^m$,
- c) el mapeo exponencial se restringe a un difeomorfismo entre una vecindad abierta del cero de $\mathfrak{g}$ y un abierto de G que contiene al elemento identidad,
- d) si $X, Y \in \mathfrak{g}$ son tales que $[X, Y] = 0$, entonces $\exp(X + Y) = \exp(X) \exp(Y)$, y
- e) la imagen del cero de $\mathfrak{g}$ es el elemento identidad de G , i.e., $\exp(0) = 1$.

Particularmente, el mapeo exponencial de los grupos de Lie clásicos consiste en la

exponencial de matrices, es decir, el mapeo dado por

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k.$$

Este mapeo que conecta a un grupo de Lie con su álgebra de Lie es la exponencial en el sentido de geometría Riemanniana; no es algo exclusivo de los grupos de Lie.

Capítulo 2

Espacios dirigidos

Comenzamos estudiando la categoría $d\mathbf{Top}$, cuya configuración nos permite tener “lazos irreversibles” en un espacio, y que establecerá la base de los capítulos venideros.

2.1. Estructuras dirigidas

La siguiente definición fue recuperada de [Gra09, p. 51].

Definición 2.1.1. Un *espacio dirigido*, también llamado *d-espacio* o *espacio con caminos distinguidos*, es un espacio topológico X equipado con un conjunto dX de aplicaciones continuas $a: \mathbb{I} \rightarrow X$, denominadas *caminos dirigidos* o *d-caminos* que satisfacen:

- I) todos los mapeos constantes $\mathbb{I} \rightarrow X$ son dirigidos,
- II) dX es cerrado bajo reparametrizaciones continuas crecientes $\lambda: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$,
- III) dX es cerrado bajo concatenación de caminos, es decir, si a y b son consecutivos en dX entonces la concatenación ordinaria $a \bullet b$ dada por

$$(a \bullet b)(t) = \begin{cases} a(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ b(2t - 1), & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

también es un camino en dX .

Observación 2.1.2. En el Axioma II) no se requiere que las reparametrizaciones sean sobreyectivas, por lo cual es válido restringir un camino dirigido a un subintervalo de $\mathbb{I}$ y éste seguirá siendo dirigido. Decimos que $\lambda: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ es creciente si $t \leq t'$ implica $\lambda(t) \leq \lambda(t')$. Además, cuando decimos que a y b son caminos consecutivos nos referimos a que $a(1) = b(0)$.

Si un conjunto de caminos satisface los axiomas previos, lo llamaremos *estructura dirigida* o simplemente *d-estructura* sobre X . Para hacer énfasis en la estructura

dirigida dX con la cual está equipado un espacio topológico X , denotaremos con (X, dX) al d-espacio en cuestión.

Así como un conjunto puede tener distintas topologías, un espacio puede tener varias estructuras dirigidas e incluso algunas pueden ser más finas que otras. En general, cualquier espacio topológico tiene al menos dos posibles formas de volverse espacio dirigido: la primera es dotando al espacio con la *d-estructura discreta* donde los d-caminos consisten únicamente en los caminos constantes, y la segunda manera es equipando al espacio con la *d-estructura natural* que admite a todos los caminos como dirigidos. Evidentemente la d-estructura discreta es la menos fina de todas, mientras que la natural es lo contrario.

A continuación, se introduce una notación para la *concatenación no ordinaria* de n caminos.

Definición 2.1.3. Dada una partición $0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < 1$ del intervalo unitario y caminos $a_1, \dots, a_n$ tales que a_i y a_{i+1} son consecutivos para todo $i < n$, denotaremos con $a_1 \blacksquare_{t_1} \dots \blacksquare_{t_{n-1}} a_n$ a la concatenación dada por

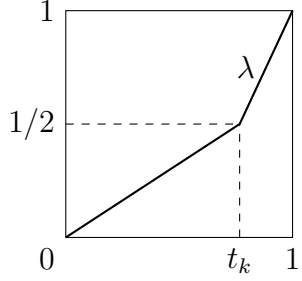
$$\alpha(t) = \begin{cases} a_1 \left(\frac{t}{t_1} \right), & \text{si } 0 \leq t \leq t_1, \\ a_2 \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right), & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2, \\ \vdots & \vdots \\ a_n \left(\frac{t - t_{n-1}}{1 - t_{n-1}} \right), & \text{si } t_{n-1} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Si es indiferente la elección de la partición, podemos escribir a la concatenación anterior como $a_1 \blacksquare \dots \blacksquare a_n$.

Es conveniente notar que toda estructura dirigida es cerrada bajo una concatenación finita de n caminos mediante cualquier partición de $\mathbb{I}$, pues se usará dicho resultado en la Sección 2.3.

Proposición 2.1.4. Sea (X, dX) un espacio dirigido. Si $a_1, \dots, a_n$ son caminos dirigidos consecutivos, entonces la concatenación $a_1 \blacksquare_{t_1} a_2 \blacksquare_{t_2} \dots \blacksquare_{t_{n-1}} a_n$ también es dirigida para cualquier partición $0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < 1$.

Demostración. El resultado es obvio para $n = 1$, y si suponemos que lo es para $n = k$ al tomar $k + 1$ caminos consecutivos $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ en dX y una partición $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < 1$, la concatenación $\alpha = a_1 \blacksquare_{t_1} \dots \blacksquare_{t_k} a_{k+1}$ está en dX porque es igual a la concatenación ordinaria del camino dirigido $\beta = a_1 \blacksquare_{s_1} \dots \blacksquare_{s_{k-1}} a_k$ con $s_i = t_i/t_k$ y el camino a_{k+1} , compuesta con la reparametrización λ que mapea el intervalo $[0, t_k]$ a $[0, 1/2]$ y $[t_k, 1]$ a $[1/2, 1]$ por medio de una función lineal a pedazos:



$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{t}{2t_k}, & \text{si } 0 \leq t \leq t_k, \\ \frac{t - t_k}{2(1 - t_k)} + \frac{1}{2}, & \text{si } t_k \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Esto es, $\alpha = (\beta \cdot a_{k+1})\lambda$. □

Observación 2.1.5. Aplicar una reparametrización a una concatenación de la forma $\alpha = a_1 \cdot_{t_1} \dots \cdot_{t_{n-1}} a_n$ es lo mismo que concatenar caminos compuestos con reparametrizaciones; esto quiere decir que para cualquier $\lambda: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ continua creciente existen mapeos $\lambda_{i_j}: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ tales que

$$\alpha\lambda = (a_1 \cdot_{t_1} \dots \cdot_{t_{n-1}} a_n)\lambda = (a_{i_1}\lambda_{i_1}) \cdot_{s_1} \dots \cdot_{s_{m-1}} (a_{i_m}\lambda_{i_m}).$$

Como las funciones continuas no toman en cuenta las estructuras dirigidas, es necesario requerir una condición adicional que relacione dichas estructuras entre los d-espacios.

Definición 2.1.6. Un *mapeo de espacios dirigidos* o *d-mapeo* $f: X \rightarrow Y$ es una función continua que preserve los d-caminos: si $a \in dX$, necesariamente $fa \in dY$.

Tendremos una categoría **dTop** de espacios dirigidos, cuyos objetos son espacios dirigidos y los morfismos d-mapeos; es evidente que la identidad 1_X de un d-espacio X es dirigido, al igual que la composición de d-mapeos es un d-mapeo.

2.2. Adjuntos del funtor olvido

A continuación se verificará que el funtor de olvido $U: \mathbf{dTop} \rightarrow \mathbf{Top}$ tiene un adjunto por la izquierda y derecha, $D \dashv U \dashv D'$, donde DS es el espacio S con la d-estructura discreta, mientras que $D'S$ tiene la d-estructura natural. En los mapeos, ambos funtores D y D' los preservan sin ninguna alteración como función. A nivel de espacios, S , DS y $D'S$ son exactamente lo mismo.

Proposición 2.2.1. Sea $U: \mathbf{dTop} \rightarrow \mathbf{Top}$ el funtor de olvido. Entonces D es adjunto izquierdo de U y D' es adjunto derecho.

Demostración. Sean S un espacio topológico y X un d-espacio. Para probar que $D \dashv U$, notemos que si $f: DS \rightarrow X$ es un d-mapeo, en particular es una función continua $S \rightarrow UX$. Por otro lado, si $g \in \mathbf{Top}(S, UX)$ y a es un d-camino en DS , obligatoriamente es un camino constante, de tal forma que ga también es constante y por ende un d-camino en X ; así, g es un d-mapeo $DS \rightarrow X$. Lo anterior nos muestra la biyección $\mathbf{dTop}(DS, X) \cong \mathbf{Top}(S, UX)$. Dado un mapeo $f: S \rightarrow Q$ de espacios, el

funtor $\mathbf{dTop}(D-, X)$ induce una función $f^*: \mathbf{dTop}(DQ, X) \rightarrow \mathbf{dTop}(DS, X)$ dada por $f^*(h) = hf$, pero el funtor $\mathbf{Top}(-, UX)$ induce la misma función, de modo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{dTop}(DS, X) & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{Top}(S, UX) \\ f^* \uparrow & & \uparrow f^* \\ \mathbf{dTop}(DQ, X) & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{Top}(Q, UX) \end{array}$$

conmuta. De forma totalmente análoga se muestra la naturalidad en X .

Ahora, mostremos que $U \dashv D'$. Cada aplicación continua $f: UX \rightarrow S$ igualmente es un d-mapeo $X \rightarrow D'S$, pues $D'S$ posee la d-estructura natural. La inclusión $\mathbf{dTop}(X, D'S) \subseteq \mathbf{Top}(UX, S)$ se debe a que los d-mapeos son continuos. Se sigue la biyección $\mathbf{Top}(UX, S) \cong \mathbf{dTop}(X, D'S)$ y la naturalidad en S y X se obtiene del mismo modo que en el párrafo anterior. $\square$

2.3. Construcciones de espacios dirigidos

Exploraremos algunas construcciones propias de topología. El producto, los subespacios y cocientes de d-espacios son totalmente análogos a los de la teoría clásica, añadiendo la información necesaria para identificar a los caminos dirigidos. Más aún, en la categoría $\mathbf{dTop}$ existen todos los límites y colímites; veremos que están contruidos de la misma forma que en $\mathbf{Top}$ y equipados con la d-estructura inicial o final para los mapeos estructurales.

Definición 2.3.1. Dado un espacio topológico S y una familia de d-estructuras $\{d_j\}$ para S indizada sobre un conjunto J , el *cierre bajo concatenaciones finitas* o simplemente *cierre* de $\{d_j\}$ es

$$\overline{\bigcup_{j \in J} d_j} := \{\alpha: \mathbb{I} \rightarrow S \mid \alpha = a_{j_1} \cdot \dots \cdot a_{j_n} \text{ para ciertos } a_{j_k} \in d_{j_k}\}.$$

Proposición 2.3.2. *El cierre de $\{d_j\}$ es una d-estructura en S .*

Demostración. El cierre contiene a todos los caminos constantes en S y es cerrado bajo reparametrizaciones crecientes ya que cualquier d_j lo es (ver Observación 2.1.5), e igualmente es cerrado bajo concatenación de caminos por la manera en que se definió. $\square$

Observación 2.3.3. De manera inmediata, la intersección de los d_j hereda los tres axiomas de estructura dirigida de los d_j , es decir, la intersección de las d-estructuras d_j es una estructura dirigida en S .

2.3.1. Estructura dirigida inicial y final inducida

De forma similar a lo realizado en la Proposición 1.1.1, veremos que las familias de funciones que comparten dominio (o codominio) inducen estructuras dirigidas de interés. La siguiente proposición será fundamental para las construcciones de espacios dirigidos que siguen.

Proposición 2.3.4. *Si tenemos una familia de espacios dirigidos $\{(X_j, dX_j)\}$ y familias de funciones continuas $\Omega = \{f_j: S \rightarrow X_j\}$, $\Psi = \{g_j: X_j \rightarrow S\}$ indizadas sobre un conjunto J , existen*

- a) *la d-estructura d^Ω en S más grande tal que las funciones $f_j: (S, d^\Omega) \rightarrow (X_j, dX_j)$ son d-mapeos,*
- b) *la d-estructura d_Ψ en S más pequeña con la cual cada $g_j: (X_j, dX_j) \rightarrow (S, d_\Psi)$ es un mapeo dirigido.*

Demostración. Para el inciso a), sea Γ el conjunto de todas las d-estructuras d en S tales que los mapeos $f_j: (S, d) \rightarrow (X_j, dX_j)$ son dirigidos; Γ contiene al menos a la d-estructura discreta de S . Definamos a d^Ω como el cierre de Γ . Si $\alpha \in d^\Omega$, esto es, $\alpha = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ para algunos $a_k \in d_k \in \Gamma$, entonces

$$f_j \alpha = f_j(a_1 \cdot \dots \cdot a_n) = (f_j a_1) \cdot \dots \cdot (f_j a_n),$$

donde cada camino $f_j a_k$ está en dX_j , de tal forma que $f_j \alpha \in dX_j$; en otras palabras, $f_j: (S, d^\Omega) \rightarrow (X_j, dX_j)$ es un d-mapeo. El cierre d^Ω es la d-estructura en S más grande que cumple lo anterior por el hecho de que $d \subseteq d^\Omega$ para cualquier $d \in \Gamma$.

Con respecto al inciso b), sea Λ el conjunto de todas las d-estructuras d en S que hacen a los mapeos $g_j: (X_j, dX_j) \rightarrow (S, d)$ dirigidos; Λ contiene al menos a la d-estructura natural de S . En especial, si $a \in dX_j$, obligatoriamente $g_j a \in d$ para todo $d \in \Lambda$, indicando que la intersección d_Ψ de todas las d-estructuras en Λ vuelve a caer en Λ y es la d-estructura deseada. $\square$

Definición 2.3.5. A d^Ω la llamamos *d-estructura final* inducida por la familia Ω , mientras que a d_Ψ la nombraremos *d-estructura inicial* inducida por Ψ .

Con la descripción anterior no queda claro cuáles son los caminos admitidos en d^Ω y d_Ψ , pero es posible dar una caracterización:

Proposición 2.3.6. *Sean $\{(X_j, dX_j)\}$ espacios dirigidos y $\Omega = \{f_j: S \rightarrow X_j\}$, $\Psi = \{g_j: X_j \rightarrow S\}$ familias de funciones continuas indizadas sobre un conjunto J . Entonces*

$$d^\Omega = \{a: \mathbb{I} \rightarrow S \mid f_j a \in dX_j, \forall j \in J\}, \quad (2.1)$$

$$d_\Psi = \left\{ \alpha: \mathbb{I} \rightarrow S \mid \begin{array}{l} \alpha \text{ es constante o existen } a_{j_k} \in dX_{j_k} \\ \text{con } \alpha = (g_{j_1} a_{j_1}) \cdot \dots \cdot (g_{j_n} a_{j_n}) \end{array} \right\}. \quad (2.2)$$

Demostración. El conjunto propuesto en (2.1) tiene a todos los caminos constantes, es cerrado bajo concatenación de caminos y reparametrizaciones porque las funciones f_j separan concatenaciones y reparametrizaciones (esto es, $f_j(a \cdot b) = f_j a \cdot f_j b$ y $f_j(a\lambda) = (f_j a)\lambda$ para cualesquiera $a, b \in d^\Omega$ consecutivos y reparametrización λ), y es sencillo verificar que es la d-estructura más grande en la familia Γ de estructuras dirigidas d en S tales que los mapeos $f_j: (S, d) \rightarrow (X_j, dX_j)$ son dirigidos.

El conjunto de la derecha en (2.2) es cerrado bajo reparametrizaciones porque aplicar una reparametrización a una concatenación es lo mismo que concatenar reparametrizaciones (ver Observación 2.1.5), y si tomamos $\alpha = (g_{j_1} a_{j_1}) \cdot \dots \cdot (g_{j_n} a_{j_n})$ para algunos $a_{j_k} \in dX_{j_k}$ y una d-estructura d sobre S tal que los mapeos $g_j: (X_j, dX_j) \rightarrow (S, d)$ son dirigidos, entonces $g_{j_k} a_{j_k} \in d$ para cada $1 \leq k \leq n$. Luego $\alpha \in d$, mostrando que el conjunto descrito es la d-estructura más pequeña en la familia Λ de estructuras dirigidas d en S satisfaciendo que los mapeos $g_j: (X_j, dX_j) \rightarrow (S, d)$ son dirigidos. $\square$

Debemos recordar que después de probar la Proposición 1.1.1, obtuvimos una forma de saber si ciertas funciones son continuas en términos de la continuidad de ciertas composiciones; con espacios dirigidos sucede lo mismo.

Proposición 2.3.7. Sean $\{(X_j, dX_j)\}$, Y espacios dirigidos y $\Omega = \{f_j: S \rightarrow X_j\}$, $\Psi = \{g_j: X_j \rightarrow S\}$ familias de funciones continuas. Se tiene que:

- a) el mapeo $h: Y \rightarrow S$ es dirigido con la d-estructura final d^Ω en S si y solamente si cada mapeo $f_j h$ es dirigido,
- b) un mapeo $q: S \rightarrow Y$ es dirigido con la d-estructura inicial d_Ψ en S si y solo si cada composición qg_j es dirigida.

Demostración. La necesidad del inciso a) es inmediata. Para la suficiencia, demos por hecho que cualquier mapeo $f_j h$ es dirigido y consideremos la d-estructura inicial d_h inducida por h ; podemos percatarnos de que d_h pertenece a Γ pues dado $\alpha \in d_h$, necesariamente es constante o bien $\alpha = (ha_1) \cdot \dots \cdot (ha_n)$ para ciertos $a_i \in dY$ según la identidad (2.2), y en ambos casos $f_j \alpha \in dX_j$. Por ende, para cualquier d-camino a de Y se tiene $ha \in d_h \subseteq d^\Omega$.

Sobre el inciso b), asumamos que cada composición qg_j es dirigida y retomemos la d-estructura final d^q inducida por q . Observemos que $b \in dX_j$ implica $qg_j b \in dY$, lo cual nos indica que $g_j b \in d^q$, es decir, el mapeo $g_j: (X_j, dX_j) \rightarrow (S, d^q)$ es dirigido. Así, d^q pertenece a Λ y para todo $a \in d_\Psi \subseteq d^q$ se cumple que $qa \in dY$. $\square$

Observación 2.3.8. Nos referiremos a este par de incisos como las *propiedades universales* de las estructuras dirigidas final e inicial, respectivamente.

2.3.2. Límites y colímites en dTop

El siguiente resultado nos muestra que dTop es una categoría bicompleta, al igual que nos facilita las construcciones usuales que se abarcan en topología.

Proposición 2.3.9. *Sea C una categoría pequeña y $F : C \rightarrow \mathbf{dTop}$ un funtor. Entonces el límite y colímite de F existen en $\mathbf{dTop}$.*

Demostración. Denotemos con J al conjunto de objetos de C y $(X_j, dX_j) = F(j)$ para $j \in J$. De la Proposición 1.1.3, sabemos que existe el límite de F en la categoría de espacios topológicos, y equipado con la d-estructura final d^Ω inducida por los mismos mapeos de proyección p_i , el diagrama en la categoría $\mathbf{dTop}$

$$\begin{array}{ccc} & \varprojlim_C F & \\ p_i \swarrow & & \searrow p_{i'} \\ X_i & \xrightarrow{F(\phi)} & X_{i'} \end{array}$$

conmuta para cualquier morfismo $\phi : i \rightarrow i'$ en C . Si existiera otro espacio dirigido Y y d-mapeos $\sigma_j : Y \rightarrow X_j$ satisfaciendo la propiedad previa, hay una única función continua h con la cual todos los diagramas

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{h} & \varprojlim_C F \\ & \searrow \sigma_i & \downarrow p_i \\ & & X_i \end{array}$$

conmutan, y es dirigida por la propiedad de la d-estructura final inducida.

Por otra parte, si al colímite de F que obtuvimos en $\mathbf{Top}$ le ponemos la d-estructura inicial d_Ψ inducida por los mapeos estructurales $\mathcal{J}_i$, el siguiente diagrama conmuta en $\mathbf{dTop}$

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{F(\phi)} & X_{i'} \\ \mathcal{J}_i \searrow & & \swarrow \mathcal{J}_{i'} \\ & \varinjlim_C F & \end{array}$$

y si encontramos otro espacio dirigido Y y d-mapeos $\sigma'_j : X_j \rightarrow Y$, existe una única función continua q que hace conmutar los diagramas

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\mathcal{J}_i} & \varinjlim_C F \\ & \searrow \sigma'_i & \downarrow q \\ & & Y \end{array}$$

y será dirigida por la propiedad de la d-estructura inicial inducida. □

2.3.3. Subespacio dirigido

Definición 2.3.10. El *subespacio dirigido* $X' \subset X$ de un d-espacio (X, dX) tiene la topología de subespacio con la d-estructura final d' inducida por el mapeo de inclusión $\iota: X' \rightarrow X$.

En específico, la estructura de subespacio es

$$d' = \{a: \mathbb{I} \rightarrow X' \mid \iota a \in dX\}.$$

Al conjunto d' lo llamaremos *d-estructura de subespacio*.

En particular, un mapeo $h: Y \rightarrow X'$ es dirigido con la d-estructura de subespacio si y solo si ιh es dirigido. A esta caracterización la nombraremos la *propiedad universal del subespacio dirigido*.

2.3.4. Espacio cociente dirigido

Definición 2.3.11. El *cociente dirigido* $X/\sim$ de un d-espacio (X, dX) bajo una relación de equivalencia $\sim$ está equipado con la topología cociente y la d-estructura inicial d_π inducida por el mapeo cociente $\pi: X \rightarrow X/\sim$ que a cada elemento lo lleva a su clase de equivalencia.

Al ser π un epimorfismo y d_π estar inducido por un único mapeo, podemos acortar la identidad (2.2) de la Proposición 2.3.6 a simplemente

$$d_\pi = \{(\pi a_1) \cdot \dots \cdot (\pi a_n) \mid a_i \in dX\}.$$

A d_π lo denominaremos *d-estructura cociente*.

Sabemos que un mapeo $q: X/\sim \rightarrow Y$ será dirigido con la d-estructura cociente si y solamente si $q\pi$ es dirigido.

Si $g: X \rightarrow Y$ es un mapeo dirigido y $g(x) = g(x')$ siempre que $x \sim x'$, existe una única función continua f tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow f & \\ X/\sim & & \end{array}$$

conmuta, y la cual está dada por $f([x]) = g(x)$. Además, como todo d-camino de $X/\sim$ es de la forma $\alpha = (\pi a_1) \cdot \dots \cdot (\pi a_n)$ con $a_i \in dX$ y por la conmutatividad del diagrama se cumple que $f\alpha = (f\pi a_1) \cdot \dots \cdot (f\pi a_n) = (ga_1) \cdot \dots \cdot (ga_n)$ es un camino dirigido en Y , esto es, f es dirigido. A este resultado lo llamaremos *propiedad universal del espacio dirigido cociente*.

En especial, si S es un subespacio (no vacío) de UX , podemos definir una relación de

equivalencia en X donde $x \sim x'$ en caso de que $x, x' \in S$ o bien $x, x' \notin S$ pero $x = x'$. En este caso, escribiremos $X/S := X/\sim$ y no es difícil probar que X/S es el colímite del diagrama

$$\{*\} \longleftarrow DS \xrightarrow{\text{inclusión}} X.$$

2.3.5. Productos y coproductos de espacios dirigidos

Consideremos una familia de espacios dirigidos $\{X_j\}$ indizada sobre J . Sean C la categoría discreta cuyo conjunto de objetos es J y $F: C \rightarrow \mathbf{dTop}$ el funtor que envía j a X_j .

Definición 2.3.12. El *producto dirigido* de los d-espacios X_j es el límite de F .

Cualquier tupla (x_j) del producto $\prod_j X_j$ satisface la condición $F(\phi)(x_i) = x_{i'}$ para todo morfismo $\phi: i \rightarrow i'$ en C , de tal forma que

$$\varprojlim_C F = \prod_{j \in J} X_j$$

y los d-mapeos estructurales son justamente las proyecciones $p_i: \prod_j X_j \rightarrow X_i$. Recordemos que el límite está equipado con la d-estructura final inducida por las proyecciones. Por la propiedad universal del límite, si hallamos un espacio dirigido Y junto con d-mapeos $\sigma_i: Y \rightarrow X_i$, existe un único mapeo dirigido h que hace conmutar

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad h \quad} & \prod_j X_j \\ & \searrow \sigma_i & \downarrow p_i \\ & & X_i \end{array}$$

para todo $i \in J$. A lo anterior lo recordaremos como la *propiedad universal del producto de espacios dirigidos*. Explícitamente, los d-caminos $a: \mathbb{I} \rightarrow \prod_j X_j$ en el producto son aquellos tales que $p_j a$ es dirigido en X_j para todo $j \in J$, es decir, son de la forma $a = (a_j)$ donde $a_j: \mathbb{I} \rightarrow X_j$ es un d-camino en X_j .

Definición 2.3.13. El *coproducto dirigido* o *suma dirigida* de los d-espacios X_j es el colímite de F .

Estrictamente, el colímite es

$$\varinjlim_C F = \prod_{j \in J} X_j / \sim$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por $(x, i) \sim (F(\phi)(x), i')$ para cada morfismo $\phi: i \rightarrow i'$ en C . Pero como los únicos morfismos en C son las identidades, las clases de equivalencia constan de un único elemento y por tal razón será verdad que el colímite de F es isomorfo en $\mathbf{dTop}$ a $\prod_j X_j$ equipado con la topología inicial

y la d-estructura final inducida por los mapeos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_i: X_i &\rightarrow \coprod_j X_j \\ x &\mapsto (x, i). \end{aligned}$$

De modo que si encontramos un espacio dirigido Y y mapeos dirigidos $\sigma'_j: X_j \rightarrow Y$, hay un único d-mapeo q con el cual los diagramas

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\mathcal{J}_i} & \coprod_j X_j \\ & \searrow \sigma'_i & \downarrow q \\ & & Y \end{array}$$

conmutan. Al hecho previo lo denominaremos *propiedad universal de la suma de espacios dirigidos*. Los mapeos dirigidos $\mathbb{I} \rightarrow \coprod_j X_j$ en la suma son los constantes o aquellos de la forma $\mathcal{J}_i a$ donde a es un d-camino en X_i .

2.3.6. d-espacios opuestos

El mapeo de reflexión $r: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ definido por $r(t) = 1 - t$ da lugar al *functor reversor*

$$R: \mathbf{dTop} \rightarrow \mathbf{dTop},$$

donde $RX = X^{\text{op}}$ tiene como espacio subyacente a UX y la d-estructura opuesta: el camino $a: \mathbb{I} \rightarrow UX$ es dirigido en X^{op} si y solo si ar es un d-camino en X . A X^{op} lo llamaremos el *d-espacio opuesto* de X . En morfismos, dado $f: X \rightarrow Y$, entonces $f^{\text{op}} := Rf: X^{\text{op}} \rightarrow Y^{\text{op}}$ se define como la misma función que f . Si a es un d-camino en X con $ar \in dX$, se denominará como *camino dirigido reversible*.

Definición 2.3.14. Sea X un espacio dirigido. Diremos que X es *reversivo* si es isomorfo a X^{op} . En caso de que $X = X^{\text{op}}$, se dirá que es *reversible*.

En la Sección 2.4.3 conoceremos algunos espacios dirigidos reversivos y uno que no lo es. Como muestra de espacio dirigido reversible tenemos a cualquiera que esté equipado con la d-estructura natural o la discreta.

Proposición 2.3.15. *El functor $R: \mathbf{dTop} \rightarrow \mathbf{dTop}$ es adjunto por la izquierda a sí mismo.*

Demostración. Más generalmente, cualquier functor $F: C \rightarrow C$ tal que $F \circ F = 1_C$ es adjunto a sí mismo. En efecto, basta con tomar a las transformaciones naturales $\eta: 1_C \Rightarrow F \circ F$ y $\varepsilon: F \circ F \Rightarrow 1_C$ que en cada componente son la identidad y éstas serán la unidad y counidad de la adjunción. Puesto que $R \circ R$ es el functor identidad de $\mathbf{dTop}$, el resultado se sigue. $\square$

Sabiendo lo anterior, es inmediato que R preserva límites y colímites ya que los adjuntos por la izquierda (derecha) preservan colímites (límites), lo cual puede consultarse en [Ric20, p. 54]. En particular, R separa productos:

$$\left(\prod_{j \in J} X_j \right)^{\text{op}} = \prod_{j \in J} X_j^{\text{op}}.$$

2.4. Ejemplos

Hasta el momento solo hemos definido a los espacios dirigidos, estudiado algunas de sus propiedades y construcciones a partir de otros d-espacios, pero no se han mostrado más formas de equipar a espacios con estructuras dirigidas particulares que difieran de la natural y discreta. En esta sección hablaremos brevemente sobre algunas estructuras importantes de espacios bien conocidos.

2.4.1. Espacios preordenados

Los ejemplos más simples y útiles para empezar a estudiar los espacios dirigidos son aquellos que surgen a partir de espacios topológicos preordenados. Recordemos que un espacio preordenado X tiene una relación $\prec$ que es reflexiva y transitiva.

Nombraremos $\mathbf{pTop}$ a la categoría de espacios preordenados cuyos morfismos son funciones continuas que preservan el preorden. No es difícil convencerse de que la composición de mapeos que preservan el preorden también lo preserva, y que la función identidad es de este tipo.

El funtor de olvido $O: \mathbf{pTop} \rightarrow \mathbf{Top}$ simplemente remueve el preorden de los objetos. Análogamente a lo que sucede en $\mathbf{dTop}$, la categoría $\mathbf{pTop}$ es bicompleta.

Proposición 2.4.1. *Sea C una categoría pequeña y $F: C \rightarrow \mathbf{pTop}$ un funtor. Entonces el límite y colímite de F existen en $\mathbf{pTop}$.*

Demostración. Sean J el conjunto de objetos de C y $F(j) = X_j$ con preorden $\prec_j$. Sabemos que el límite y colímite del funtor $OF: C \rightarrow \mathbf{Top}$ existen en $\mathbf{Top}$, los cuales están descritos en la Proposición 1.1.3.

Observemos que al límite de OF le podemos asociar el preorden $\prec$ donde $(x_j) \prec (x'_j)$ si $x_j \prec_j x'_j$ para todo $j \in J$. Luego, se puede comprobar directamente que el límite de OF equipado con el preorden $\prec$ es justamente el límite de F .

Similarmente, al colímite de OF le podemos dar un preorden que se hereda de los X_j de tal forma que sea el colímite de F , aunque no es tan directo como el caso anterior. Primero, diremos que $[x, i] \prec [x', i']$ si y solo si existen representantes $[y, j] = [x, i]$, $[y', j] = [x', i']$ tales que $y \prec_j y'$. Que la relación $\prec$ sea reflexiva es obvio, pero la condición de transitividad no es necesariamente cierta. Sin embargo, a partir de $\prec$ podemos crear una relación que sí lo sea. Diremos que $[x, i] \preceq [x', i']$ si y solo si

existen clases $[x_k, i_k]$ tales que

$$[x, i] \prec [x_1, i_1], \quad [x_1, i_1] \prec [x_2, i_2], \quad \dots, \quad [x_n, i_n] \prec [x', i'].$$

Si al colímite de OF lo equipamos con el preorden $\preceq$ resultará ser el colímite de F . Para demostrarlo, basta comprobar que el mapeo resultante de la propiedad universal del colímite de OF preserva el preorden $\preceq$. $\square$

Dado un espacio preordenado $(X, \prec)$, una forma natural de darle estructura dirigida es definiendo a los caminos dirigidos como aquellos que preservan el preorden usual de $\mathbb{I}$; en símbolos, $a: \mathbb{I} \rightarrow X$ es dirigido si $a(t) \prec a(t')$ cuando $t \leq t'$. En efecto,

- i) Los caminos constantes son dirigidos porque $\prec$ es reflexiva.
- ii) Dados caminos dirigidos consecutivos a, b , entonces su concatenación ordinaria satisface $(a \bullet b)(t) \prec (a \bullet b)(t')$ cuando $t \leq t'$, lo cual resulta evidente separando los casos:
 - a) $t, t' \leq \frac{1}{2}$. Entonces $(a \bullet b)(t) = a(2t) \prec a(2t') = (a \bullet b)(t')$.
 - b) $t \leq \frac{1}{2} \leq t'$. Se tiene $(a \bullet b)(t) = a(2t) \prec a(1) = b(0) \prec b(2t' - 1) = (a \bullet b)(t')$.
 - c) $\frac{1}{2} \leq t, t'$. Obligatoriamente $(a \bullet b)(t) = b(2t - 1) \prec b(2t' - 1) = (a \bullet b)(t')$.
- iii) Si $\lambda: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ es continua y creciente, la condición $t \leq t'$ implica $\lambda(t) \leq \lambda(t')$ y consecuentemente $a\lambda(t) \prec a\lambda(t')$, o sea que $a\lambda$ también es dirigido.

Naturalmente, denotaremos con $d_{\prec}$ a esta d-estructura. Este proceso nos define un funtor $\mathbf{d}: \mathbf{pTop} \rightarrow \mathbf{dTop}$ que manda el espacio X con preorden $\prec$ al d-espacio $(X, d_{\prec})$. En morfismos, dado $f: (X, \prec) \rightarrow (Y, \prec')$ en $\mathbf{pTop}$ entonces $\mathbf{d}(f)$ es la misma función: si $a \in d_{\prec}$ y $t \leq t'$ necesariamente $a(t) \prec a(t')$, de modo que $fa(t) \prec' fa(t')$ pues f preserva preorden, y en consecuencia $fa \in d_{\prec'}$.

También hay un funtor $\mathbf{p}: \mathbf{dTop} \rightarrow \mathbf{pTop}$ que a cada d-espacio (X, dX) lo envía al espacio X con el preorden $\prec_{dX}$ donde $x \prec_{dX} x'$ si y solo si podemos encontrar un d-camino que empieza en x y termina en x' . La relación $\prec_{dX}$ es reflexiva porque dX contiene todos los caminos constantes de X y es transitiva ya que dX es cerrado bajo concatenación de caminos. En morfismos, $\mathbf{p}$ no hace nada a nivel de funciones pues un d-mapeo $(X, dX) \rightarrow (Y, dY)$ también es un mapeo que preserva preorden $(X, \prec_{dX}) \rightarrow (Y, \prec_{dY})$.

Adicionalmente, los funtores $\mathbf{d}$ y $\mathbf{p}$ guardan una relación estrecha.

Proposición 2.4.2. *El funtor $\mathbf{d}$ es adjunto por la derecha de $\mathbf{p}$.*

Demostración. Sean (X, dX) un d-espacio y $(Y, \prec)$ un espacio preordenado. Cada mapeo que preserva preorden

$$f: (X, \prec_{dX}) \rightarrow (Y, \prec)$$

puede ser visto como d-mapeo

$$f: (X, dX) \rightarrow (Y, d_{\prec}).$$

Entonces la biyección

$$\mathbf{pTop}(\mathbf{p}X, Y) \cong \mathbf{dTop}(X, \mathbf{d}Y)$$

se da trivialmente, y es natural tanto en X como en Y . $\square$

En particular, $\mathbf{d}$ preserva límites, así que dada una familia $\{X_j\}$ de espacios preordenados indizada sobre un conjunto J , el producto $\prod_j X_j$ está equipado con el preorden $\prec$ descrito en la Proposición 2.4.1 y la estructura de caminos dirigidos que induce coincide con aquella que tiene el producto $\prod_j \mathbf{d}X_j$ en $\mathbf{dTop}$ (ver Sección 2.3.5). Esto nos permitirá saber, por ejemplo, que un camino es dirigido en $\uparrow\mathbb{I}^2$ si y solo si es creciente en cada coordenada (ver Definición 2.4.5 y Figura 2.2).

Por el contrario, si definimos los mapeos de *caras*

$$\partial^-: \{*\} \rightarrow \mathbb{I}, \quad \partial^+: \{*\} \rightarrow \mathbb{I}$$

mediante $\partial^-(*) = 0$, $\partial^+(*) = 1$ y calculamos el colímite del diagrama en la categoría $\mathbf{pTop}$, teniendo $\mathbb{I}$ el preorden usual, el espacio preordenado resultante $(\mathbb{I}/\partial\mathbb{I}, \preceq)$ cumpliría que $[x] \preceq [y]$ para cualesquier par de clases $[x], [y]$ en vista de que $[x] \preceq [1] = [0] \preceq [y]$. Así, al aplicarle $\mathbf{d}$ a $(\mathbb{I}/\partial\mathbb{I}, \preceq)$ se obtendría el espacio $\mathbb{I}/\partial\mathbb{I}$ con la d-estructura natural. Más adelante veremos que la Proposición 2.4.11 nos señala que el funtor $\mathbf{d}$ no preserva el colímite del diagrama anterior.

Sin embargo, existen más formas de darle estructura dirigida a un producto de espacios preordenados. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ podemos considerar el orden lexicográfico donde $(x, y) \prec_L (x', y')$ si $x < x'$ o bien $x = x'$ y $y \leq y'$. La Figura 2.1 nos muestra los sucesores de un punto p , i.e., aquellos puntos q tales que $p \prec_L q$; también nos presenta tres caminos: a y b son dirigidos, pero c no lo es. A este d-espacio lo llamaremos el *plano con orden lexicográfico* $\mathbb{R}_L^2$.

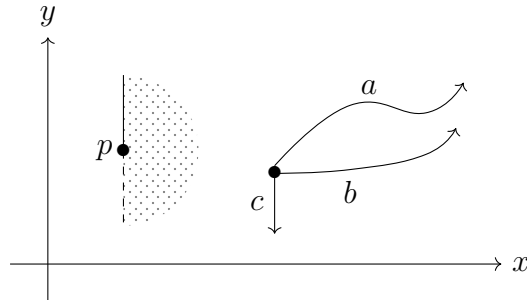


Figura 2.1: Estructura dirigida inducida por el orden lexicográfico.

2.4.2. Modelos estándar

A partir de ahora, consideraremos que los espacios $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{I}^n$, $\mathbb{S}^n$ tienen la d-estructura natural, admitiendo a todos los caminos como dirigidos. Sin embargo, en lo que sigue usaremos más frecuentemente a dichos espacios con otras estructuras.

Definición 2.4.3. La *recta real dirigida* $\uparrow\mathbb{R}$ es la recta real donde los caminos dirigidos son los mapeos crecientes $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$.

Observación 2.4.4. $\uparrow\mathbb{R}$ tiene la estructura dirigida inducida por su preorden usual.

Definición 2.4.5. El *intervalo dirigido* o *d-intervalo* $\uparrow\mathbb{I}$ tiene la estructura de subespacio dirigido de $\uparrow\mathbb{R}$, la cual coincide con la estructura dirigida inducida por su preorden usual.

Así mismo, $\uparrow\mathbb{R}^n$ y $\uparrow\mathbb{I}^n$ son el producto de $\uparrow\mathbb{R}$ y $\uparrow\mathbb{I}$ consigo mismo n veces, respectivamente. Por ejemplo, en $\uparrow\mathbb{I}^2$ los caminos a , b y c de la Figura 2.2 son dirigidos, mientras que d no lo es.

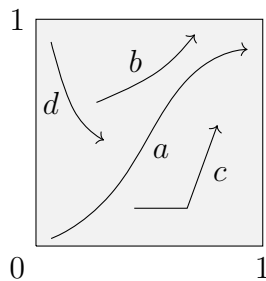


Figura 2.2: Cuadrado dirigido $\uparrow\mathbb{I}^2$.

Por otra parte, podemos observar que $\uparrow\mathbb{R}^2$ difiere en su d-estructura de aquella inducida por el orden lexicográfico; de hecho, todo d-camino de $\uparrow\mathbb{R}^2$ también es dirigido con el orden lexicográfico, pero el recíproco no es verdad ya que el camino a de la Figura 2.1 no es dirigido en $\uparrow\mathbb{R}^2$.

Definición 2.4.6. El *círculo dirigido* $\uparrow\mathbb{S}^1$ es el círculo estándar con la *estructura antihoraria*, es decir, los caminos dirigidos $a: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^1$ se mueven en dirección antihoraria.

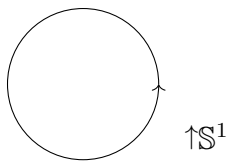


Figura 2.3: Círculo dirigido.

Más específicamente, $a: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^1$ es un d-camino en el círculo dirigido si y solo si $a(t) = \cos \rho(t) + i \sin \rho(t)$, donde $\rho: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y creciente.

En la próxima subsección analizaremos por qué la Definición 2.4.6 es equivalente a la siguiente cuando $n = 1$. Sabiendo eso, entonces quedará clara la razón por la cual se definen así las esferas dirigidas de mayor dimensión.

Definición 2.4.7. Sea $n > 0$. La n -esfera dirigida $\uparrow\mathbb{S}^n$ es el cociente dirigido de $\uparrow\mathbb{I}^n$ por su frontera $\partial\mathbb{I}^n$.

Observación 2.4.8. Como caso especial, $\uparrow\mathbb{S}^0$ tiene la topología discreta y la d-estructura natural, que en este caso coincide con la discreta. Así, $\uparrow\mathbb{S}^n = (\uparrow\mathbb{I}^n)/(\partial\mathbb{I}^n)$ para $n > 0$ y $\uparrow\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$.

El círculo tiene otra estructura de interés la cual surge de verlo como subespacio de $\mathbb{R} \times \uparrow\mathbb{R}$, y la retomaremos en la Sección 3.

Definición 2.4.9. El *círculo ordenado* $\uparrow O^1$ es el círculo estándar con la d-estructura de subespacio de $\mathbb{R} \times \uparrow\mathbb{R}$.

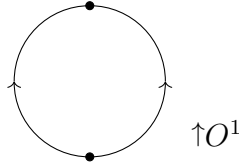


Figura 2.4: Círculo ordenado.

2.4.3. Propiedades de los modelos estándar

No es difícil imaginarse que $\uparrow\mathbb{R}$, $\uparrow\mathbb{I}$, $\uparrow\mathbb{S}^1$ y $\uparrow O^1$ son d-espacios reversivos, y tampoco es complicado de probar. Para el primero, el d-mapeo $\uparrow\mathbb{R} \rightarrow \uparrow\mathbb{R}^{\text{op}}$ dado por $t \mapsto -t$ es un isomorfismo. Con respecto al segundo, la asignación $t \mapsto 1 - t$ es el isomorfismo $\uparrow\mathbb{I} \rightarrow \uparrow\mathbb{I}^{\text{op}}$ deseado. Para el caso de $\uparrow\mathbb{S}^1$ y $\uparrow O^1$, el homeomorfismo $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ definido con $e^{it} \mapsto e^{-it}$ funciona.

A partir de lo anterior se deduce inmediatamente que $\uparrow\mathbb{R}^n$ y $\uparrow\mathbb{I}^n$ también son reversivos. Puesto que $\uparrow\mathbb{R} \cong \uparrow\mathbb{R}^{\text{op}}$ entonces

$$\uparrow\mathbb{R}^n \cong (\uparrow\mathbb{R}^{\text{op}})^n = (\uparrow\mathbb{R}^n)^{\text{op}}.$$

Lo mismo sucede con $\uparrow\mathbb{I}^n$. Similarmente, un isomorfismo entre $\uparrow\mathbb{S}^n$ y $(\uparrow\mathbb{S}^n)^{\text{op}}$ es aquel definido por

$$[t_1, \dots, t_n] \mapsto [1 - t_1, \dots, 1 - t_n].$$

Contrariamente, el d-espacio

$$X = \uparrow \mathbb{I} \amalg \uparrow \mathbb{I} / 1 \sim 1$$

que resulta de identificar los extremos superiores de dos copias de $\uparrow \mathbb{I}$ no es reversivo. Esto sucede porque en X hay caminos dirigidos no constantes que terminan en la clase del 1 por ambos lados, y en X^{op} no, como puede visualizarse en la Figura 2.5. Si hubiera un isomorfismo $X \rightarrow X^{\text{op}}$, entonces X^{op} también tendría un punto con esas características.

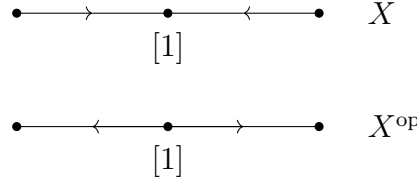


Figura 2.5: Ejemplo de espacio dirigido no reversivo.

El círculo dirigido es relevante porque es el primer ejemplo de un espacio dirigido que posee lazos dirigidos irreversibles (ver Definición 3.1.4), explicando el interés de estudiarlo como un colímite.

Proposición 2.4.10. *La d-estructura antihoraria de $\uparrow \mathbb{S}^1$ coincide con la estructura inicial inducida por los mapeos $\mathcal{J}_1: \{*\} \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\mathcal{J}_2: \uparrow \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dados por $\mathcal{J}_1(*) = 1$, $\mathcal{J}_2(t) = e^{2\pi i t}$.*

Demostración. Sean $\Psi = \{\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2\}$ y d_Ψ la d-estructura inicial inducida por Ψ . Es claro que $\mathcal{J}_1$ y $\mathcal{J}_2$ son dirigidos con la estructura antihoraria, lo cual significa que contiene a d_Ψ .

Si $a: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^1$ es un d-camino de $\uparrow \mathbb{S}^1$, i.e., $a(t) = e^{i\rho(t)}$ siendo $\rho: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y creciente, entonces

$$a(t) = \exp\left(2\pi i \frac{\rho(t)}{2\pi}\right) = \exp(2\pi i \alpha(t)) = \mathcal{J}_2 \alpha(t)$$

para $\alpha(t) = \rho(t)/2\pi$. El camino α sigue siendo creciente y su imagen es conexa y compacta en $\mathbb{R}$, así que es de la forma $[x, y]$ pero no podemos asegurar que está contenido en $\mathbb{I}$. Sean m el mayor entero tal que $m \leq x$ y M el menor entero con $y \leq M$. Surgen dos casos:

- a) $M - m \leq 1$. Basta con definir $\beta: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ mediante $\beta(t) = \alpha(t) - m$. La imagen de β sí está contenida en $\mathbb{I}$, pues $0 \leq x - m \leq \alpha(t) - m \leq y - m \leq M - m \leq 1$. Luego

$$\mathcal{J}_2 \beta(t) = \exp(2\pi i \beta(t)) = \exp(2\pi i \alpha(t) - 2m\pi i) = \exp(2\pi i \alpha(t)) = a(t).$$

Adicionalmente, β es un d-camino en $\uparrow\mathbb{I}$ ya que es creciente y entonces $a = \mathcal{J}_2\beta$ pertenece a d_Ψ .

- b) $M - m > 1$. Sean $k_1, \dots, k_n$ los enteros tales que $m < k_i < M$ indizados de menor a mayor, o sea $k_i < k_{i+1}$. En particular, como la imagen de α es conexa, $k_{i+1} = k_i + 1$. Por la propiedad del valor intermedio, existen t_i tales que $\alpha(t_i) = k_i$. Como α es creciente, necesariamente $t_i < t_{i+1}$. Sean $t_0 = 0$, $t_{n+1} = 1$ y para $1 \leq i \leq n+1$ definamos $\beta_i: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ por $\beta_i(s) = \alpha((t_i - t_{i-1})s + t_{i-1})$. Lo que hemos hecho es partir el camino α en caminos más pequeños, es decir,

$$\alpha = \beta_1 \cdot_{t_1} \dots \cdot_{t_n} \beta_{n+1}$$

y en consecuencia

$$\mathcal{J}_2\alpha = \mathcal{J}_2\beta_1 \cdot_{t_1} \dots \cdot_{t_n} \mathcal{J}_2\beta_{n+1}.$$

Por otro lado, los β_i son crecientes y su imagen es justamente $[k_i, k_{i+1}]$ (en el caso de β_0 es $[x, k_1]$ y para β_{n+1} es $[k_n, y]$), de tal forma que podemos definir $\gamma_i: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ con $\gamma_i(t) = \beta_i(t) - k_i$ y estos caminos serán dirigidos en $\uparrow\mathbb{I}$. Más aún, se verifica que $\mathcal{J}_2\beta_i = \mathcal{J}_2\gamma_i$ pues β_i y γ_i difieren por un entero. Finalmente,

$$a = \mathcal{J}_2\alpha = \mathcal{J}_2\gamma_1 \cdot_{t_1} \dots \cdot_{t_n} \mathcal{J}_2\gamma_{n+1} \in d_\Psi.$$

Lo anterior implica que la estructura antihoraria está contenida en d_Ψ . $\square$

Resulta que no solo la estructura está determinada por un par de mapeos, ya que $\uparrow\mathbb{S}^1$ es el coequalizador de d-mapeos muy sencillos.

Proposición 2.4.11. *El círculo dirigido puede obtenerse como el colímite del diagrama*

$$\{*\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^+} \\ \xrightarrow{\partial^-} \end{array} \uparrow\mathbb{I} \quad \partial^-(*) = 0, \partial^+(*) = 1.$$

Demostración. Notemos que los d-mapeos $\mathcal{J}_1: \{*\} \rightarrow \uparrow\mathbb{S}^1$, $\mathcal{J}_2: \uparrow\mathbb{I} \rightarrow \uparrow\mathbb{S}^1$ de la proposición anterior hacen conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^+} \\ \xrightarrow{\partial^-} \end{array} & \uparrow\mathbb{I} \\ & \searrow \mathcal{J}_1 \quad \swarrow \mathcal{J}_2 & \\ & \uparrow\mathbb{S}^1 & \end{array}$$

Si hay otro d-espacio Y que cumple lo anterior a través de mapeos $\sigma_1: \{*\} \rightarrow Y$, $\sigma_2: \uparrow\mathbb{I} \rightarrow Y$, podemos definir $q: \uparrow\mathbb{S}^1 \rightarrow Y$ mediante $e^{2\pi it} \mapsto \sigma_2(t)$ para $t \in [0, 1]$ (en esta parte $\sigma_2(0) = \sigma_2(1)$ pues se está asumiendo que $\sigma_2\partial^- = \sigma_1 = \sigma_2\partial^+$), por lo cual el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\{*\} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial^+} \\ \xrightarrow{\partial^-} \end{array} & \uparrow \mathbb{I} \\
& \searrow \mathcal{J}_1 & \swarrow \mathcal{J}_2 \\
& \uparrow \mathbb{S}^1 & \\
& \downarrow q & \\
& Y &
\end{array}
\begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array}$$

es conmutativo. La condición anterior determina de manera única a q , en el sentido de que si $q': \uparrow \mathbb{S}^1 \rightarrow Y$ satisface $q'\mathcal{J}_1 = \sigma_1$ y $q'\mathcal{J}_2 = \sigma_2$ entonces $q' = q$. Por último, q es un d-mapeo en vista de que $q\mathcal{J}_1 = \sigma_1$ y $q\mathcal{J}_2 = \sigma_2$ son dirigidos por la Proposición 2.3.7, ya que la estructura antihoraria coincide con la inicial inducida por $\mathcal{J}_1$ y $\mathcal{J}_2$. $\square$

Observación 2.4.12. Recordando la construcción que hicimos en la Subsección 2.3.2, el colímite del diagrama de la Proposición 2.4.11 es el espacio $X = I \coprod \{*\} / \sim$, donde la única clase con más de un elemento es $[0] = [*] = [1]$, equipado con la d-estructura inicial inducida por los mapeos $\mathcal{J}_1: \{*\} \rightarrow X$, $\mathcal{J}_2: \mathbb{I} \rightarrow X$ dados por $\mathcal{J}_1(*) = [0]$, $\mathcal{J}_2(t) = [t]$. Por como se construyó, el d-espacio X es isomorfo al cociente dirigido $\uparrow \mathbb{I} / \partial \mathbb{I}$, siendo $\partial \mathbb{I}$ la frontera de $\mathbb{I}$. Después, por la unicidad del colímite (salvo isomorfismo), es claro que $\uparrow \mathbb{I} / \partial \mathbb{I} \cong X \cong \uparrow \mathbb{S}^1$. Esto justifica el comentario realizado después de la Definición 2.4.6.

Por otro lado, de acuerdo con [Gra09, p. 55], $\uparrow O^1$ es el coecualizador del diagrama

$$\mathbb{S}^0 \xrightarrow{\iota} \uparrow \mathbb{I} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{J}'_2} \\ \xrightarrow{\mathcal{J}'_1} \end{array} \uparrow \mathbb{I} \amalg \uparrow \mathbb{I}$$

donde $\mathcal{J}'_1$ es la inclusión en el primer sumando y $\mathcal{J}'_2$ en el segundo, $\iota(-1) = 0$, $\iota(1) = 1$. El coecualizador es con respecto a $\mathcal{J}'_1 \iota$ y $\mathcal{J}'_2 \iota$.

2.4.4. Suspensiones

Análogamente a la teoría clásica de topología algebraica, las suspensiones nos permiten construir la $(n+1)$ -esfera dirigida a partir de la n -esfera. Sin embargo, habrá que tener cuidado al momento de plantear lo anterior pues el resultado varía con respecto a lo que ocurre en **Top**.

Definición 2.4.13. La suspensión libre ΣX de un d-espacio X es el colímite del diagrama

$$\begin{array}{ccc}
& X & \longrightarrow \{*\} \\
& \downarrow \partial^+ & \\
X & \xrightarrow{\partial^-} & \uparrow \mathbb{I} \times X \\
\downarrow & & \\
\{*\} & &
\end{array}$$

donde $\partial^-(x) = (x, 0)$ y $\partial^+(x) = (x, 1)$.

Observación 2.4.14. La suspensión libre ΣX viene acompañada de d-mapeos $\mathcal{J}$, v^- y v^+ con los cuales el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
& X & \longrightarrow & \{*\} & \\
& \downarrow \partial^+ & & \downarrow v^+ & \\
X & \xrightarrow{\partial^-} & \uparrow \mathbb{I} \times X & \searrow \mathcal{J} & \downarrow v^+ \\
\downarrow & & & & \Sigma X \\
\{*\} & \xrightarrow{v^-} & & &
\end{array}$$

es conmutativo y que exhiben a ΣX como un colímite. Si consideramos a ΣX como la construcción genérica de un colímite, $\mathcal{J}$ sería el d-mapeo $(t, x) \mapsto [t, x]$ y las bases $\{0\} \times X$ y $\{1\} \times X$ de $\uparrow \mathbb{I} \times X$ estarían colapsadas, independientemente, a un vértice inferior $v^-(*)$ y uno superior $v^+(*)$, respectivamente.

Se puede probar que la suspensión libre de $\uparrow \mathbb{S}^0$ es isomorfa a $\uparrow O^1$, pero en este caso vale la pena visualizar la construcción del colímite. El primer paso es tomar la unión disjunta de los d-espacios del diagrama, luego identificar a los distintos puntos con sus imágenes y por último colapsar esos puntos de forma independiente, como se muestra:

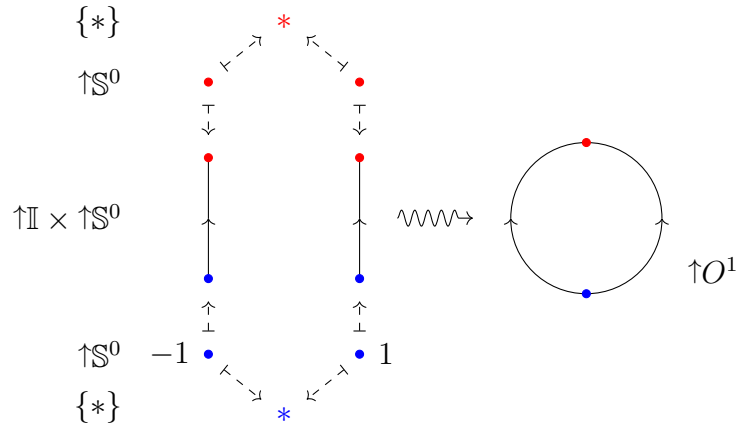


Figura 2.6: Suspensión libre de $\uparrow \mathbb{S}^0$.

Definición 2.4.15. Dado $x \in X$, la suspensión reducida $\Sigma(X, x)$ de un d-espacio X sobre x es

$$\Sigma X / \mathcal{J}(\mathbb{I} \times \{x\}).$$

Observación 2.4.16. En lo que sigue, identificaremos el cociente $\mathcal{J}(\mathbb{I} \times \{x\})$ con $\mathbb{I} \times x$ para simplificar la notación.

Ahora podemos plantear adecuadamente la relación que tienen las esferas dirigidas entre sí.

Proposición 2.4.17. Sea $n > 0$ y $x_n = [0, \dots, 0] \in \uparrow \mathbb{S}^n$, entonces

$$\Sigma(\uparrow \mathbb{S}^n, x_n) \cong \uparrow \mathbb{S}^{n+1}.$$

Demostración. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \uparrow \mathbb{S}^n & \longrightarrow & \{*\} \\ & & \downarrow \partial^+ & & \downarrow u^+ \\ \uparrow \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\partial^-} & \uparrow \mathbb{I} \times \uparrow \mathbb{S}^n & \xrightarrow{f} & \uparrow \mathbb{S}^{n+1} \\ \downarrow & & & & \downarrow u^- \\ \{*\} & \xrightarrow{\quad} & & & \end{array}$$

para $f(t, [t_1, \dots, t_n]) = [t, t_1, \dots, t_n]$ y $u^-(*) = u^+(*) = [0, \dots, 0]$. La función f está bien definida porque si cada t_i es diferente de 0 y 1, entonces la clase $[t_1, \dots, t_n]$ consta de un único elemento, y en caso contrario existe un índice i_0 tal que $t_{i_0} = 0$ o bien $t_{i_0} = 1$ de modo que

$$f(t, [t_1, \dots, t_{i_0}, \dots, t_n]) = [t, t_1, \dots, t_{i_0}, \dots, t_n] = [0, \dots, 0].$$

Además, es evidente que el diagrama anterior conmuta y que los mapeos u^- , u^+ son dirigidos. Por otro lado, consideremos el d-mapeo identidad $1: \uparrow \mathbb{I} \rightarrow \uparrow \mathbb{I}$ y el d-mapeo cociente $\pi: \uparrow \mathbb{I}^n \rightarrow \uparrow \mathbb{S}^n$. Estos últimos nos inducen un d-mapeo $h = 1 \times \pi: \uparrow \mathbb{I}^{n+1} \rightarrow \uparrow \mathbb{I} \times \uparrow \mathbb{S}^n$ que en la primera entrada es la identidad y en las restantes π . Luego, el d-mapeo cociente $q: \uparrow \mathbb{I}^{n+1} \rightarrow \uparrow \mathbb{S}^{n+1}$ satisface que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \uparrow \mathbb{I}^{n+1} & \xrightarrow{q} & \uparrow \mathbb{S}^{n+1} \\ h \downarrow & \nearrow f & \\ \uparrow \mathbb{I} \times \uparrow \mathbb{S}^n & & \end{array}$$

conmuta. De lo anterior se puede deducir que:

- a) f es continua. Puesto que $\uparrow \mathbb{S}^n$ tiene la topología final respecto a π , entonces $\uparrow \mathbb{I} \times \uparrow \mathbb{S}^n$ tiene la topología final inducida por h . Así que f es continua si y solo si q lo es.

- b) f preserva d-caminos. Sea α un d-camino en $\uparrow\mathbb{I} \times \uparrow\mathbb{S}^n$. Sabemos que α es de la forma (a, b) donde a y b son caminos dirigidos de $\uparrow\mathbb{I}$ y $\uparrow\mathbb{S}^n$, respectivamente. Adicionalmente, b es de la forma $(\pi b_1)_{t_1} \cdot \dots \cdot_{t_{m-1}} (\pi b_m)$ para ciertos d-caminos b_i en $\uparrow\mathbb{I}^n$. También podemos partir al camino a en m trozos con la misma partición $0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < 1$ utilizando reparametrizaciones crecientes $\lambda_i: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$, es decir,

$$a = (a\lambda_1)_{t_1} \cdot \dots \cdot_{t_{m-1}} (a\lambda_m).$$

Por ende

$$\begin{aligned} \alpha &= (a, b) = ((a\lambda_1)_{t_1} \cdot \dots \cdot_{t_{m-1}} (a\lambda_m), (\pi b_1)_{t_1} \cdot \dots \cdot_{t_{m-1}} (\pi b_m)) \\ &= (a\lambda_1, \pi b_1)_{t_1} \cdot \dots \cdot_{t_{m-1}} (a\lambda_m, \pi b_m) = h(a\lambda_1, b_1)_{t_1} \cdot \dots \cdot_{t_{m-1}} h(a\lambda_m, b_m), \end{aligned}$$

y posteriormente

$$f\alpha = fh(a\lambda_1, b_1)_{t_1} \cdot \dots \cdot_{t_{m-1}} fh(a\lambda_m, b_m) = q(a\lambda_1, b_1)_{t_1} \cdot \dots \cdot_{t_{m-1}} q(a\lambda_m, b_m),$$

donde cada $(a\lambda_i, b_i)$ es un d-camino en $\uparrow\mathbb{I}^{n+1}$. Así, $f\alpha$ es camino dirigido en $\uparrow\mathbb{S}^{n+1}$.

Por la universalidad de la suspensión, existe un único d-mapeo $\hat{f}$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow\mathbb{S}^n & \xrightarrow{\quad} & \{*\} & & \\ \downarrow \partial^+ & & \downarrow v^+ & & \searrow u^+ \\ \uparrow\mathbb{S}^n & \xrightarrow{\partial^-} & \uparrow\mathbb{I} \times \uparrow\mathbb{S}^n & \xrightarrow{\mathcal{J}} & \Sigma\uparrow\mathbb{S}^n \\ \downarrow & & \downarrow v^- & & \nearrow \hat{f} \\ \{*\} & \xrightarrow{\quad} & \Sigma\uparrow\mathbb{S}^n & \xrightarrow{\quad} & \uparrow\mathbb{S}^{n+1} \\ & \searrow u^- & & & \end{array}$$

conmuta. Puesto que para todo $t \in \mathbb{I}$ es cierto que

$$\hat{f}\mathcal{J}(t, x_n) = f(t, x_n) = f(t, [0, \dots, 0]) = [t, 0, \dots, 0] = [0, 0, \dots, 0],$$

entonces por la propiedad universal del espacio dirigido cociente existe un único d-

mapeo φ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma \uparrow \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\hat{f}} & \uparrow \mathbb{S}^{n+1} \\
 s \downarrow & \nearrow \varphi & \\
 \Sigma \uparrow \mathbb{S}^n / (\mathbb{I} \times x_n) & & \\
 \parallel & & \\
 \Sigma(\uparrow \mathbb{S}^n, x_n) & &
 \end{array}$$

es conmutativo. Por otro lado, si seleccionamos un punto $\uparrow \mathbb{I}^{n+1}$ que está en el borde, entonces su imagen bajo la composición

$$\uparrow \mathbb{I}^{n+1} \xrightarrow{h} \uparrow \mathbb{I} \times \uparrow \mathbb{S}^n \xrightarrow{\mathcal{J}} \Sigma \uparrow \mathbb{S}^n \xrightarrow{s} \Sigma(\uparrow \mathbb{S}^n, x_n)$$

es la clase con representante $[0, [0, \dots, 0]] \in \Sigma \uparrow \mathbb{S}^n$. Así, podemos hallar un único d-mapeo $\tilde{\varphi}$ que satisface la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \uparrow \mathbb{I}^{n+1} & \xrightarrow{s\mathcal{J}h} & \Sigma(\uparrow \mathbb{S}^n, x_n) \\
 q \downarrow & \nearrow \tilde{\varphi} & \\
 \uparrow \mathbb{S}^{n+1} & &
 \end{array}$$

No obstante, la identidad

$$\varphi \tilde{\varphi} q = \varphi s \mathcal{J} h = \hat{f} \mathcal{J} h = f h = q$$

implica que

$$\begin{array}{ccc}
 \uparrow \mathbb{I}^{n+1} & \xrightarrow{q} & \uparrow \mathbb{S}^{n+1} \\
 q \downarrow & \nearrow \varphi \tilde{\varphi} & \\
 \uparrow \mathbb{S}^{n+1} & &
 \end{array}$$

es conmutativo, pero por la unicidad de la propiedad universal del espacio dirigido cociente, se tiene que $\varphi \tilde{\varphi}$ es la identidad de $\uparrow \mathbb{S}^{n+1}$. Similarmente, podemos verificar que $\tilde{\varphi} \varphi s = s$ y con un proceso idéntico concluimos que $\tilde{\varphi} \varphi$ es la identidad de la suspensión reducida $\Sigma(\uparrow \mathbb{S}^n, x_n)$. $\square$

También será cierto que $\Sigma(\uparrow \mathbb{S}^0, -1) \cong \uparrow \mathbb{S}^1$, y una forma de visualizarlo es colapsando el intervalo $\uparrow \mathbb{I} \times \{-1\}$ de la Figura 2.6 a un solo punto. Por tanto la proposición previa es verdadera aún cuando $n = 0$.

La siguiente proposición nos permite demostrar formalmente que $\uparrow \mathbb{S}^n$ es reversivo. Para ello, es provechoso mencionar que es equivalente definir a $\Sigma(X, x)$ como el colímite de

$$\begin{array}{ccccc}
& \{*\} & & & \\
& \swarrow & & & \\
& \uparrow \mathbb{I} \times \{x\} & & X & \longrightarrow \{*\} \\
& \searrow & & \downarrow \partial^+ & \\
X & \xrightarrow{\partial^-} & \uparrow \mathbb{I} \times X & & \\
\downarrow & & & & \\
\{*\} & & & &
\end{array}$$

donde $\uparrow \mathbb{I} \times \{x\} \hookrightarrow \uparrow \mathbb{I} \times X$ es la inclusión del subespacio dirigido $\uparrow \mathbb{I} \times \{x\}$ en $\uparrow \mathbb{I} \times X$.

Proposición 2.4.18. Sean $\varphi: X \rightarrow X^{\text{op}}$ un isomorfismo y $x \in X$. Entonces φ induce un isomorfismo $\Sigma(X, x) \rightarrow R\Sigma(X, \varphi(x))$.

Demostración. Sea $r: \uparrow \mathbb{I} \rightarrow \uparrow \mathbb{I}^{\text{op}}$ el isomorfismo $t \mapsto 1 - t$. Puesto que $\Sigma(X, x)$ es el colímite de

$$\begin{array}{ccccc}
& \{*\} & & & \\
& \swarrow & & & \\
& \uparrow \mathbb{I} \times \{x\} & & X & \longrightarrow \{*\} \\
& \searrow & & \downarrow \partial^+ & \\
X & \xrightarrow{\partial^-} & \uparrow \mathbb{I} \times X & & \\
\downarrow & & & & \\
\{*\} & & & &
\end{array} \tag{2.3}$$

y como R los preserva, entonces el colímite del diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
& \{*\} & & & \\
& \swarrow & & & \\
& \uparrow \mathbb{I}^{\text{op}} \times \{\varphi(x)\} & & X^{\text{op}} & \longrightarrow \{*\} \\
& \searrow & & \downarrow (\partial^-)^{\text{op}} & \\
X^{\text{op}} & \xrightarrow{(\partial^+)^{\text{op}}} & \uparrow \mathbb{I}^{\text{op}} \times X^{\text{op}} & & \\
\downarrow & & & & \\
\{*\} & & & &
\end{array} \tag{2.4}$$

es justamente $R\Sigma(X, \varphi(x))$. Notemos que $(\partial^-)^{\text{op}}$ y $(\partial^+)^{\text{op}}$ intercambiaron lugares con respecto al Diagrama 2.3, pero que eso no afecta la veracidad de la afirmación.

Denotemos con C a la categoría

$$\begin{array}{ccccc}
& & a & & \\
& & \swarrow & & \\
& b & & c & \longrightarrow d \\
& \searrow & & \downarrow & \\
& e & \longrightarrow & f & \\
& \downarrow & & & \\
& g & & &
\end{array}$$

de modo que los diagramas (2.3) y (2.4) pueden ser vistos como objetos de la categoría $\text{Fun}(C, \mathbf{dTop})$, digamos F y F' , respectivamente. Definamos a $\eta: F \Rightarrow F'$ como la transformación natural cuyas componentes son

$$\eta_b = r \times \varphi|, \quad \eta_c = \eta_e = \varphi, \quad \eta_f = r \times \varphi$$

y la identidad $\{*\} \rightarrow \{*\}$ en las restantes, siendo $\varphi|$ la restricción de φ a $\{x\}$, que evidentemente es un isomorfismo. El hecho de que η sea una transformación natural se debe a que los diagramas

$$\begin{array}{ccc}
\uparrow \mathbb{I} \times \{x\} & \xrightarrow{r \times \varphi|} & \uparrow \mathbb{I}^{\text{op}} \times \{\varphi(x)\} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\uparrow \mathbb{I} \times X & \xrightarrow{r \times \varphi} & \uparrow \mathbb{I}^{\text{op}} \times X^{\text{op}}
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\varphi} & X^{\text{op}} \\
\partial^\alpha \downarrow & & \downarrow (\partial^\beta)^{\text{op}} \\
\uparrow \mathbb{I} \times X & \xrightarrow{r \times \varphi} & \uparrow \mathbb{I}^{\text{op}} \times X^{\text{op}}
\end{array}$$

son conmutativos cuando $\alpha \neq \beta$. A su vez, F y F' son isomorfos en $\text{Fun}(C, \mathbf{dTop})$ pues η es un isomorfismo natural. Por último, gracias a que $\mathbf{dTop}$ es cocompleta tenemos un funtor

$$\begin{aligned}
\varinjlim_C - : \text{Fun}(C, \mathbf{dTop}) &\rightarrow \mathbf{dTop} \\
F &\mapsto \varinjlim_C F
\end{aligned}$$

y esto nos asegura que

$$\Sigma(X, x) \cong \varinjlim_C F \cong \varinjlim_C F' \cong R\Sigma(X, \varphi(x)),$$

como se quería probar. $\square$

El círculo dirigido y su opuesto son isomorfos a través del d-mapeo $\uparrow \mathbb{S}^1 \rightarrow (\uparrow \mathbb{S}^1)^{\text{op}}$ dado por $[t] \mapsto [1 - t]$. Luego, si $k \geq 1$ y suponemos que $\varphi: \uparrow \mathbb{S}^k \rightarrow (\uparrow \mathbb{S}^k)^{\text{op}}$ es un isomorfismo que envía a la clase del borde $\partial \mathbb{I}^k$ a sí misma (denotada x_k), se tiene que

$$\uparrow \mathbb{S}^{k+1} \cong \Sigma(\uparrow \mathbb{S}^k, x_k) \cong R\Sigma(\uparrow \mathbb{S}^k, \varphi(x_k)) = R\Sigma(\uparrow \mathbb{S}^k, x_k) \cong (\uparrow \mathbb{S}^{k+1})^{\text{op}}.$$

Además, este isomorfismo $\uparrow \mathbb{S}^{k+1} \rightarrow (\uparrow \mathbb{S}^{k+1})^{\text{op}}$ manda la clase del borde x_{k+1} a sí misma, ya que es el único vórtice de $\uparrow \mathbb{S}^{k+1}$ y $(\uparrow \mathbb{S}^{k+1})^{\text{op}}$ (ver Definición 3.1.4 y Proposición

3.1.5). Así, que cada $\uparrow\mathbb{S}^n$ sea reversivo se sigue por inducción (el caso $n = 0$ es obvio).

2.5. Caminos en espacios dirigidos

En **Top**, el intervalo $\mathbb{I}$ con la topología usual juega un papel fundamental para definir conceptos en homotopía y obtener algunos resultados. Por ello, es conveniente elegir un d-espacio que nos permita trasladar ideas y conceptos de la teoría clásica a **dTop**. Como podría sospecharse, basaremos la homotopía en **dTop** usando al intervalo dirigido $\uparrow\mathbb{I}$.

Definición 2.5.1. Un *camino* en un espacio dirigido X es un d-mapeo $a: \uparrow\mathbb{I} \rightarrow X$.

Observación 2.5.2. Ahora tenemos tres conceptos que podrían confundirse: camino en un espacio topológico (que es simplemente una función continua cuyo dominio es $\mathbb{I}$), camino en un espacio dirigido (lo que acabamos de definir) y d-camino de un d-espacio (refiriéndose a la Definición 2.1.1). Sin embargo, veremos que los dos últimos en realidad son equivalentes.

Proposición 2.5.3. Sea X un d-espacio. Entonces $a \in dX$ si y solo si a es un camino en el d-espacio X .

Demostración. Si $a \in dX$ y λ es un d-camino en $\uparrow\mathbb{I}$, se sigue que $a\lambda \in dX$ pues $\lambda: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ es continua y creciente; luego $a: \uparrow\mathbb{I} \rightarrow X$ es un d-mapeo porque preserva los d-caminos de $\uparrow\mathbb{I}$. Recíprocamente, sea a' un camino en X . Como la identidad 1 de $\mathbb{I}$ es creciente y continua, entonces es un d-camino de $\uparrow\mathbb{I}$ y eso nos justifica que $a' = a' \circ 1 \in dX$ (porque a' es un d-mapeo $\uparrow\mathbb{I} \rightarrow X$). $\square$

De ahora en adelante, lo que determina si un camino en X es un d-mapeo o simplemente una función continua, es si X es un d-espacio o un espacio topológico, respectivamente.

2.6. Espacios dirigidos exponenciables

Es razonable deducir que **dTop** es una categoría monoidal simétrica con el producto de espacios dirigidos porque **Top** lo es con el producto usual de espacios topológicos. Lo único que habría que verificar es que los homeomorfismos de las Definiciones 1.2.1 y 1.2.3 preservan d-caminos, lo cual es evidente. Las condiciones de coherencia seguirán satisfaciéndose porque las componentes de los isomorfismos son, como funciones, las mismas que en **Top**.

En general, para cualesquiera d-espacios $\uparrow A$ y $\uparrow Y$ el conjunto $\mathbf{dTop}(\uparrow A, \uparrow Y)$ admite una estructura de espacio dirigido. Primero, llamemos A y Y a los espacios subyacentes de $\uparrow A$ y $\uparrow Y$, respectivamente. Al conjunto $\mathbf{dTop}(\uparrow A, \uparrow Y)$ podemos equiparlo con la topología de subespacio de **Top**(A, Y), el cual tiene la topología compacto-abierta. Luego al espacio $\mathbf{dTop}(\uparrow A, \uparrow Y)$ lo equipamos con la d-estructura donde un mapeo

$\alpha: \mathbb{I} \rightarrow \mathbf{dTop}(\uparrow A, \uparrow Y)$ es dirigido si y solo si el mapeo asociado $\hat{\alpha}: \mathbb{I} \times A \rightarrow Y$ dado por $\hat{\alpha}(t, a) = \alpha(t)(a)$ es un d-mapeo $\uparrow \mathbb{I} \times \uparrow A \rightarrow \uparrow Y$.

En el Teorema 1.4.8 del libro [Gra09, p. 59] se exhibe una demostración de que con la caracterización anterior sí se obtiene una estructura dirigida, es decir, que se cumplen los tres axiomas de la Definición 2.1.1. En dicha prueba, el espacio A es de Hausdorff localmente compacto, pero esa hipótesis no es necesaria para mostrar que $\mathbf{dTop}(\uparrow A, \uparrow Y)$ es un d-espacio con la estructura dirigida que hemos descrito. Explícitamente, ese teorema nos señala que:

Teorema 2.6.1. *Si $A = U(\uparrow A)$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces $\uparrow A$ es exponenciable en $\mathbf{dTop}$.*

Observación 2.6.2. En este caso, denotaremos $(\uparrow Y)^{\uparrow A}$ al d-espacio $\mathbf{dTop}(\uparrow A, \uparrow Y)$ y $(-)^{\uparrow A}: \mathbf{dTop} \rightarrow \mathbf{dTop}$ al funtor $X \mapsto X^{\uparrow A}$, que es justamente el adjunto por la derecha de $- \times \uparrow A: \mathbf{dTop} \rightarrow \mathbf{dTop}$.

La demostración se basa en que un espacio de Hausdorff localmente compacto A es exponenciable en $\mathbf{Top}$, así que para cualesquiera espacios $X = U(\uparrow X)$ y $Y = U(\uparrow Y)$ tenemos una biyección natural

$$\mathbf{Top}(X, Y^A) \rightarrow \mathbf{Top}(X \times A, Y)$$

la cual se restringe a una biyección entre $\mathbf{dTop}(\uparrow X, (\uparrow Y)^{\uparrow A})$ y $\mathbf{dTop}(\uparrow X \times \uparrow A, \uparrow Y)$ que sigue siendo natural.

Capítulo 3

Invariantes dirigidos

Una forma de distinguir dos d-espacios es fijarse en si son homeomorfos, ya que un isomorfismo de espacios dirigidos es un homeomorfismo. Evidentemente, esa herramienta es insuficiente si nuestro propósito es distinguir d-espacios cuyos espacios topológicos subyacentes son homeomorfos. Por ejemplo, es bien sabido que, como espacios, la suspensión libre de $\uparrow\mathbb{S}^0$ es isomorfa a la suspensión reducida $\Sigma(\uparrow\mathbb{S}^0, -1)$, pero esto no será cierto como espacios dirigidos.

3.1. Invariantes puntuales

Una de las primeras formas para obtener nuevos invariantes es cuestionarse la razón por la cual se sospecha que, en general, un espacio equipado con la d-estructura discreta no es isomorfo al mismo espacio equipado con la estructura natural. La siguiente proposición aclara este aspecto.

Proposición 3.1.1. *Sean (X, dX) , (Y, dY) d-espacios y $f: X \rightarrow Y$ un d-mapeo. Sean $d_x \subseteq dX$ los caminos que empiezan en x y $d_{f(x)} \subseteq dY$ los que inician en $f(x)$. Si f es un isomorfismo, entonces induce una biyección $d_x \rightarrow d_{f(x)}$.*

Demostración. Definamos $f_*: d_x \rightarrow d_{f(x)}$ mediante $f_*(a) = fa$. Si $a, b \in d_x$ son distintos, podemos encontrar $t \in \mathbb{I}$ tal que $a(t) \neq b(t)$, de modo que $fa(t) \neq fb(t)$ pues f es inyectiva. Luego, $f_*(a) \neq f_*(b)$ y f_* es inyectiva.

Sea $\alpha \in d_{f(x)}$. Como f es un isomorfismo, su inversa es un d-mapeo y por ello $f^{-1}\alpha$ es un d-camino en X que empieza en x en vista de que $f^{-1}\alpha(0) = f^{-1}f(x) = x$. Esto nos indica que f_* es sobreyectiva porque $f_*(f^{-1}\alpha) = ff^{-1}\alpha = \alpha$. $\square$

Por tanto, si X es un d-espacio con la estructura discreta y Y es un d-espacio que tiene al menos un camino dirigido no constante, podemos afirmar que no son isomorfos.

Retomando el ejemplo de las suspensiones, si suponemos que $\Sigma\uparrow\mathbb{S}^0 \cong \Sigma(\uparrow\mathbb{S}^0, -1)$ se tendría que el círculo ordenado $\uparrow O^1$ es isomorfo al círculo dirigido $\uparrow\mathbb{S}^1$, pero esto es imposible debido a que en $\uparrow O^1$ hay un único d-camino que inicia en $i \in \mathbb{C}$ (a saber,

el constante) mientras que cualquier punto de $\uparrow\mathbb{S}^1$ tiene una infinidad de caminos dirigidos que surgen de él.

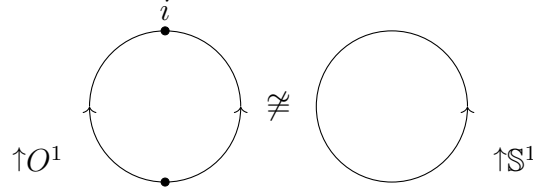


Figura 3.1: Círculo ordenado y círculo dirigido.

Un detalle clave de la Proposición 3.1.1 es que la biyección de los conjuntos d_x y $d_{f(x)}$ está inducida por f ; podría pasar que $X \not\cong Y$ y que d_x y $d_{f(x)}$ sí estén en biyección con alguna otra función distinta de f_* . Naturalmente, en este tipo de casos probar que los d-espacios no son isomorfos es más complicado.

Proposición 3.1.2. *El plano dirigido $\uparrow\mathbb{R}^2$ no es isomorfo al plano con orden lexicográfico $\mathbb{R}_L^2$.*

Demostración. Denotemos con $\prec$ al preorden de $\mathbb{R}^2$ dado por $(x, y) \prec (x', y')$ si y solo si $x \leq x'$, $y \leq y'$. Recordemos que la d-estructura inducida por este preorden coincide con la estructura del producto $\uparrow\mathbb{R}^2$, es decir, un camino a es dirigido en $\uparrow\mathbb{R}^2$ si y solamente si $t \leq t'$ implica $a(t) \prec a(t')$.

Ahora, supongamos que $f: \mathbb{R}_L^2 \rightarrow \uparrow\mathbb{R}^2$ es un isomorfismo. Para cada entero positivo n , definamos $x_n = \cos(\pi/n - \pi/2)$, $y_n = \sin(\pi/n - \pi/2)$. Luego, sean $p_n = x_n + iy_n$ y

$$\begin{aligned} a_n: \mathbb{I} &\rightarrow \mathbb{R}_L^2 \\ t &\mapsto tp_n. \end{aligned}$$

Cada a_n es un d-camino en $\mathbb{R}_L^2$, obteniendo una sucesión de caminos dirigidos como se muestra:

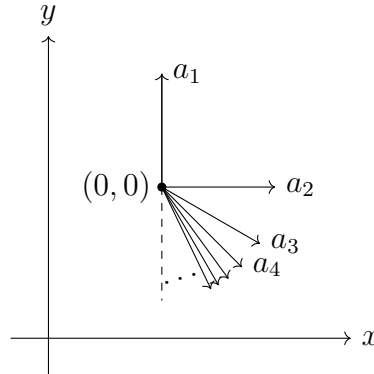


Figura 3.2: Sucesión de caminos dirigidos en $\mathbb{R}_L^2$.

La sucesión (a_n) converge al camino $a: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $a(t) = -it$, el cual no es dirigido en $\mathbb{R}_L^2$. Por otra parte, (fa_n) es una sucesión de caminos dirigidos en $\uparrow\mathbb{R}^2$ que

converge a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f a_n = f \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) = f a.$$

Notemos que para cualquier n se tiene $f a_n(t) \prec f a_n(t')$ cuando $t \leq t'$, de donde

$$f a(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f a_n(t) \prec \lim_{n \rightarrow \infty} f a_n(t') = f a(t').$$

Por ende $f a$ es dirigido en $\uparrow \mathbb{R}^2$, pero esto es imposible porque $f^{-1} f a = a$ sería dirigido en $\mathbb{R}_L^2$. $\square$

En este ejemplo, utilizando aritmética cardinal y el teorema de Cantor-Schröder-Bernstein, se puede demostrar que el conjunto de caminos dirigidos que inician en $(0, 0)$ de $\mathbb{R}_L^2$ está en biyección con el conjunto de d-caminos en $\uparrow \mathbb{R}^2$ que empiezan en el origen (y más generalmente, en cualquier punto). Sin embargo, lo importante es que ningún d-mapeo $f: \mathbb{R}_L^2 \rightarrow \uparrow \mathbb{R}^2$ puede inducir esa biyección.

Observación 3.1.3. Cabe mencionar que un homeomorfismo de espacios $X \rightarrow Y$ que preserva d-caminos no necesariamente es isomorfismo de d-espacios; la función identidad $\uparrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_L^2$ ilustra la veracidad de este enunciado.

Los lazos dirigidos nos brindan otro invariante dirigido que surge de fijarse en propiedades puntuales.

Definición 3.1.4. Sea (X, dX) un d-espacio. Un camino $a: \mathbb{I} \rightarrow X$ es un *lazo dirigido* o *d-lazo* si está en dX , no es constante y $a(0) = a(1)$. Por otra parte, decimos que $p \in X$ es un *vórtice* si toda vecindad de p contiene un lazo dirigido irreversible.

Por ejemplo, cualquier esfera dirigida $\uparrow \mathbb{S}^k$ con $k \geq 2$ tiene un único vórtice en el punto $x_k = [0, \dots, 0]$ (consultar [Gra09, p. 58]).

Proposición 3.1.5. Sean (X, dX) , (Y, dY) d-espacios. Si $f: X \rightarrow Y$ es un isomorfismo y p es un vórtice, entonces $f(p)$ también lo es.

Demostración. Sea U una vecindad de $f(p)$. La preimagen $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en X , así que contiene un lazo dirigido irreversible, digamos a . El camino $f a$ es un d-lazo que no es reversible; si lo fuera, se sigue que $f^{-1} f a r = a r \in dX$, lo cual no puede ocurrir. Además, $f a$ está contenido en U pues $a(t)$ está en $f^{-1}(U)$ para cualquier $t \in \mathbb{I}$. $\square$

3.2. Homotopía en espacios dirigidos

Tal y como se había dicho con anterioridad, la homotopía en $\mathbf{dTop}$ estará basada en $\uparrow \mathbb{I}$. Más específicamente, se basará en el cilindro que el intervalo dirigido induce.

Primero, veamos la estructura de primer orden en $\uparrow \mathbb{I}$ que lo relaciona con el d-espacio

de un solo punto $\{*\}$. Consta de cuatro d-mapeos:

$$\begin{array}{lll} \partial^\alpha: \{*\} \rightarrow \uparrow\mathbb{I}, & \partial^-(*) = 0, & (\text{caras}) \\ & \partial^+(*) = 1, & \\ e: \uparrow\mathbb{I} \rightarrow \{*\}, & e(t) = *, & (\text{degeneración}) \\ r: \uparrow\mathbb{I} \rightarrow \uparrow\mathbb{I}^{\text{op}}, & r(t) = 1 - t. & (\text{reflexión}) \end{array}$$

Si identificamos un punto x de un d-espacio X como un mapeo $x: \{*\} \rightarrow X$, esta estructura nos permite determinar:

- a) los puntos finales de un camino $a: \uparrow\mathbb{I} \rightarrow X$, a saber $a\partial^- = a(0)$ y $a\partial^+ = a(1)$,
- b) el camino constante en x , denotado con $0_x = xe$,
- c) el *camino reflejado* de a , definido como $-a = ar: \uparrow\mathbb{I} \rightarrow X^{\text{op}}$.

Además, la estructura de $\uparrow\mathbb{I}$ nos induce un *functor cilindro* $I: \mathbf{dTop} \rightarrow \mathbf{dTop}$ que en objetos está descrito por $I(X) = X \times \uparrow\mathbb{I}$ y en morfismos $f: X \rightarrow Y$ mediante $I(f) = f \times 1$, siendo $1: \uparrow\mathbb{I} \rightarrow \uparrow\mathbb{I}$ la identidad. El cilindro está acompañado de cuatro transformaciones naturales

$$\partial^\alpha: 1 \Rightarrow I, \quad e: I \Rightarrow 1, \quad r: IR \Rightarrow RI,$$

cuyas componentes son

$$\begin{array}{lll} \partial_X^\alpha: X \rightarrow IX, & \partial_X^-(x) = (x, 0), & (\text{caras}) \\ & \partial_X^+(x) = (x, 1), & \\ e_X: IX \rightarrow X, & e_X(x, t) = x, & (\text{degeneración}) \\ r_X: IRX \rightarrow RIX, & r_X(x, t) = (x, 1 - t). & (\text{reflexión}) \end{array}$$

Cuando sea claro, omitiremos el subíndice X de las componentes para facilitar la notación.

De acuerdo con el Teorema 2.6.1 y puesto que el intervalo $\mathbb{I}$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces $\uparrow\mathbb{I}$ es exponenciable en $\mathbf{dTop}$, es decir, que el functor cilindro tiene un adjunto por la derecha del cual hablaremos después.

Las homotopías dirigidas se definen de la manera esperada.

Definición 3.2.1. Sean $f, g: X \rightarrow Y$ dos d-mapeos. Una *homotopía dirigida* o *d-homotopía* $\varphi: f \rightarrow g$ es un d-mapeo $\varphi: IX \rightarrow Y$ tal que

$$\varphi(x, 0) = f(x), \quad \varphi(x, 1) = g(x),$$

para todo $x \in X$, o bien, $\varphi\partial^- = f$ y $\varphi\partial^+ = g$. Cuando suceda esto, diremos que f es homótopo a g y se escribirá $f \simeq g$.

Observación 3.2.2. Como pudimos observar, las transformaciones ∂^α nos devuelven

las *caras* de la homotopía $\varphi: f \rightarrow g$. Análogamente, la degeneración e da lugar a la *homotopía trivial* $0_f := fe: f \rightarrow f$, mientras que la reflexión r nos da la *homotopía reflejada* $\varphi^{\text{op}} := R(\varphi)r: g^{\text{op}} \rightarrow f^{\text{op}}$ de los d-mapeos $f^{\text{op}}, g^{\text{op}}: X^{\text{op}} \rightarrow Y^{\text{op}}$.

Por ejemplo, una d-homotopía de $1_{\uparrow\mathbb{I}}$ a ∂^+e está dada por

$$\varphi(x, t) = x + t - xt = (1 - t)x + t.$$

Notemos que no es lo mismo una d-homotopía de f a g que una de g a f . Por ejemplo, hay una homotopía dirigida trivial de ∂^- a ∂^+ , pero no puede haber una de ∂^+ a ∂^- . Efectivamente, si existiera un mapeo dirigido

$$\psi: \{*\} \times \uparrow\mathbb{I} \rightarrow \uparrow\mathbb{I}$$

tal que $\psi(*, 0) = 1$ y $\psi(*, 1) = 0$, entonces habría un camino dirigido en $\uparrow\mathbb{I}$ que empieza en 1 y termina en 0, lo cual no puede ocurrir.

Definición 3.2.3. Una *equivalencia homotópica futura* $(f, g; \varphi, \psi)$ entre espacios dirigidos X, Y consiste en un par de d-mapeos

$$f: X \rightarrow Y, \quad g: Y \rightarrow X,$$

y un par de homotopías dirigidas

$$\varphi: 1_X \rightarrow gf, \quad \psi: 1_Y \rightarrow fg,$$

que van de las identidades de X y Y a las respectivas composiciones de f y g .

Las equivalencias homotópicas futuras pueden componerse en el siguiente sentido: dada otra equivalencia homotópica futura $(h, k; \vartheta, \zeta)$ entre Y, Z

$$\begin{aligned} h: Y &\rightarrow Z, & \vartheta: 1_Y &\rightarrow kh, \\ k: Z &\rightarrow Y, & \zeta: 1_Z &\rightarrow hk, \end{aligned}$$

podemos obtener una equivalencia homotópica futura $(gkhf, hfgk; F, H)$ donde la d-homotopía $F: 1_X \rightarrow gkhf$ está dada por

$$F(x, t) = \begin{cases} \varphi(x, 2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(\vartheta(f(x), 2t - 1)), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

mientras que $G: 1_Z \rightarrow hfgk$ se define mediante

$$G(z, t) = \begin{cases} \zeta(z, 2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h(\psi(k(z), 2t - 1)), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Con esta regla de composición, ser d-espacios homotópicamente equivalentes en el

futuro es una relación de equivalencia.

Definición 3.2.4. Sean $f, g: X \rightarrow Y$ d-mapeos y $\varphi, \psi: f \rightarrow g$ d-homotopías. Una 2-homotopía dirigida $\Phi: \varphi \rightarrow \psi$ es un d-mapeo $\Phi: I^2X \rightarrow Y$ verificando que

$$\begin{aligned}\Phi(x, 0, s) &= 0_f(x, s) = f(x), & \Phi(x, 1, s) &= 0_g(x, s) = g(x), \\ \Phi(x, t, 0) &= \varphi(x, t), & \Phi(x, t, 1) &= \psi(x, t).\end{aligned}$$

En ese caso, se denotará con $\varphi \preceq_2 \psi$.

Las 2-homotopías dirigidas también tienen forma de componerse, es decir, si $\varphi \preceq_2 \psi$ y $\psi \preceq_2 \vartheta$, entonces $\varphi \preceq_2 \vartheta$. Sin embargo, ser 2-homótopos no es una relación de equivalencia; esto nos obliga a usar el cierre simétrico $\simeq_2$ de la relación $\preceq_2$. Si sucediera que $\varphi \simeq_2 \psi$, diremos que φ es 2-homótopo a ψ .

3.2.1. La categoría fundamental

En esta subsección se hablará muy brevemente de algunos resultados básicos de la categoría fundamental.

Recordemos que un camino en un d-espacio X es un mapeo dirigido $a: \uparrow\mathbb{I} \rightarrow X$, así que al identificar $\uparrow\mathbb{I}$ con el cilindro de un punto $\{*\} \times \uparrow\mathbb{I}$ podemos considerar al camino a como una homotopía $a: x \rightarrow x'$, donde $x: \{*\} \rightarrow X$ es el d-mapeo constante en $a(0)$ y $x': \{*\} \rightarrow X$ en $a(1)$. De este modo, si dos caminos $a, b: \uparrow\mathbb{I} \rightarrow X$ comparten los extremos, tiene sentido cuestionarse si son 2-homótopos o no. Denotaremos con $[a]$ a la clase de equivalencia del camino a bajo la relación $\simeq_2$.

Definición 3.2.5. Sea X un d-espacio. La *categoría fundamental* $\uparrow\Pi X$ de X tiene por objetos a los puntos de X y por morfismos $x \rightarrow x'$ a las clases de equivalencia $[a]$ de caminos en X que empiezan en x y terminan en x' .

Observación 3.2.6. La composición de morfismos en $\uparrow\Pi X$ está inducida por la concatenación de caminos dirigidos, i.e., si tenemos morfismos $a: x \rightarrow x'$ y $b: x' \rightarrow x''$, su composición es la clase

$$[a] \cdot [b] := [a \cdot b]: x \rightarrow x''$$

y las identidades se obtienen de las homotopías $0_x: x \rightarrow x$.

Además, es posible dar una noción de equivalencia homotópica futura entre categorías de forma análoga a la Definición 3.2.3.

Definición 3.2.7. Una *equivalencia homotópica futura* $(F, G; \varphi, \psi)$ entre categorías C, D consiste en un par de funtores

$$F: C \rightarrow D, \quad G: D \rightarrow C,$$

y un par de transformaciones naturales

$$\varphi: 1_C \rightarrow GF, \quad \psi: 1_D \rightarrow FG,$$

que van de las identidades de C y D a las respectivas composiciones de F y G .

De la Definiciones 3.2.1, 3.2.3, 3.2.5 y 3.2.7 se deduce directamente lo siguiente. Los detalles y demostraciones de los enunciados de esta sección pueden consultarse en los Capítulos 1 y 3 del libro [Gra09].

Teorema. Sean X, Y d -espacios. Entonces:

- a) los objetos y morfismos de $\uparrow\Pi X$ forman una categoría. Además, para todo d -mapeo $f: X \rightarrow Y$, se tiene un funtor $\uparrow\Pi f: \uparrow\Pi X \rightarrow \uparrow\Pi Y$ que envía el morfismo $[a]$ hacia la clase $[fa]$,
- b) existe un funtor $\Pi: d\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Cat}$ que envía un d -mapeo $f: X \rightarrow Y$ al funtor $\Pi f: \Pi X \rightarrow \Pi Y$ y éste preserva productos y coproductos,
- c) si $a: x \rightarrow x'$ es un camino reversible en X , el morfismo $[a]$ es invertible en $\uparrow\Pi X$,
- d) una d -homotopía $\varphi: f \rightarrow g$ entre d -mapeos $f, g: X \rightarrow Y$ da lugar a una transformación natural

$$\varphi_*: \uparrow\Pi f \rightarrow \uparrow\Pi g.$$

En consecuencia, $\uparrow\Pi$ transforma una equivalencia homotópica futura de espacios dirigidos en una equivalencia (futura) de categorías.

Capítulo 4

Estructuras dirigidas en grupos de Lie

En este capítulo se propondrán algunas maneras de darle estructura dirigida a grupos de Lie. El principal motivo de hacer esto es tener más ejemplos de esferas con estructura dirigida, en especial si son homogéneas, y la razón de esto se explica en los siguientes párrafos.

Los grupos de homotopía conforman invariantes elementales para espacios topológicos, y estos están fundamentados en varias propiedades de las esferas. Con espacios dirigidos, se podrían definir invariantes de forma análoga usando las esferas dirigidas, pero no serían tan poderosos como en el caso clásico. Una de las razones por las que sucede esto es que, si $n \geq 1$, entonces para cualquier par de puntos en $\uparrow\mathbb{S}^n$ se pueden construir lazos dirigidos que los toquen, y de esa propiedad se sigue que:

Proposición 4.0.1. *Si $f: \uparrow\mathbb{S}^n \rightarrow X$ es un d -mapeo y X no posee lazos dirigidos, f es constante.*

Demostración. Primero mostremos que dado un punto de $\uparrow\mathbb{S}^n$, se puede construir un lazo dirigido basado en el vórtice (o en 1 si $n = 1$) que pase por él. Sea $x \in \uparrow\mathbb{S}^n$. Si x es la clase del borde, entonces el camino $\alpha_x(t) = [t, \dots, t]$ es un lazo dirigido que pasa por él. En caso contrario, $x = [x_1, \dots, x_n]$ con $x_i \neq 0, 1$ para todo i , y el camino $\alpha_x(t) = [t, x_2, \dots, x_n]$ cumple lo que se desea.

Si suponemos que f no es constante, existirían x, y en la n -esfera satisfaciendo que $f(x) \neq f(y)$. Luego $f(\alpha_x \cdot \alpha_y)$ también sería un lazo dirigido en X . Notemos que $f\alpha_x \cdot f\alpha_y$ no es un camino constante pues $f\alpha_x$ y $f\alpha_y$ pasan por $f(x)$ y $f(y)$, respectivamente, contradiciendo que X no posee lazos dirigidos. $\square$

De este modo, las esferas $\uparrow\mathbb{S}^n$ no ayudan a distinguir d -espacios que no tengan lazos dirigidos, como lo son $\uparrow\mathbb{R}^m$ y cualquiera de sus subespacios dirigidos.

Aunque la categoría fundamental de un espacio dirigido es sencilla de definir, la construcción de las versiones en dimensiones superiores, es decir, las n -categorías fun-

damentales, ha sido complicada; en [Gra12, p. 116] se comenta que es difícil aún con $n = 2$. Dicho esto, no se pretende que encontrar estructuras dirigidas homogéneas para las esferas ayude directamente a plantear otros análogos de los grupos de homotopía, pues de acuerdo con [Gra02, p. 370], las propiedades en dimensiones superiores probablemente deban ser estudiadas a través de categorías fundamentales superiores de manera similar a lo realizado con conjuntos simpliciales en [Gra01b]. Sin embargo, estas estructuras podrían ayudar a entender a los espacios dirigidos de otra forma o modelar otras situaciones en áreas afines como la física.

4.1. Grupos dirigidos

Comenzaremos mencionando algunas propiedades que nos gustaría replicar, usando como ejemplo a $\uparrow\mathbb{S}^1$. El espacio $\mathbb{S}^1$ es un grupo topológico con la multiplicación de números complejos, es decir, las funciones

$$\begin{aligned}\mu: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{S}^1 & \nu: \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ (z, z') &\mapsto zz' & z &\mapsto z^{-1}\end{aligned}$$

son continuas. Puesto que los caminos dirigidos del círculo dirigido son aquellos de la forma $\alpha(t) = e^{i\rho(t)}$ con $\rho: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ creciente, al multiplicarlo con otro d-camino $\alpha'(t) = e^{i\rho'(t)}$ obtenemos el camino

$$\alpha(t)\alpha'(t) = e^{i(\rho(t)+\rho'(t))},$$

el cual también es dirigido. Por otro lado, como $e^{-i\rho(t)}$ es el inverso de $e^{i\rho(t)}$, entonces el camino $\alpha^{-1}(t) = (\alpha(t))^{-1}$ es dirigido en $(\uparrow\mathbb{S}^1)^{\text{op}}$. En otras palabras, los mapeos

$$\mu: \uparrow\mathbb{S}^1 \times \uparrow\mathbb{S}^1 \rightarrow \uparrow\mathbb{S}^1, \quad \nu: \uparrow\mathbb{S}^1 \rightarrow (\uparrow\mathbb{S}^1)^{\text{op}},$$

son dirigidos. Este hecho nos lleva a la siguiente definición.

Definición 4.1.1. Sea G un d-espacio. Decimos que G es un grupo dirigido si es un grupo y las operaciones de multiplicación y de inverso

$$\mu: G \times G \rightarrow G, \quad \nu: G \rightarrow G^{\text{op}},$$

son dirigidas.

Observación 4.1.2. Cuando no haya riesgo de confusión, simplemente escribiremos gg' en lugar de $\mu(g, g')$ y g^{-1} en lugar de $\nu(g)$. Dado un par de caminos α, β en G , el camino producto $\alpha\beta$ está descrito por $\alpha\beta(t) = \alpha(t)\beta(t)$; el camino inverso α^{-1} de α está dado por $\alpha^{-1}(t) = (\alpha(t))^{-1}$.

Otro ejemplo de grupo dirigido es $\uparrow\mathbb{R}$ con la suma, ya que si $a \leq a'$ y $b \leq b'$ entonces $a + b \leq a' + b'$ y $-a' \leq -a$. Similarmente, cualquier $\uparrow\mathbb{R}^n$ es un grupo dirigido con la suma usual. Además, los d-espacios opuestos de grupos dirigidos también lo son.

Proposición 4.1.3. *Si G es un grupo dirigido, entonces G^{op} igual lo es.*

Demostración. Puesto que el mapeo de multiplicación μ de G es dirigido y el funtor reversor $R: \mathbf{dTop} \rightarrow \mathbf{dTop}$ separa productos, se tiene que el mapeo

$$\mu: G^{\text{op}} \times G^{\text{op}} \rightarrow G^{\text{op}}$$

es dirigido. Similarmente, el mapeo de obtener inversos $\nu: G^{\text{op}} \rightarrow G$ preserva caminos dirigidos. $\square$

Más aún, una consecuencia directa de la definición de grupo dirigido es que G y G^{op} son d-espacios isomorfos.

Proposición 4.1.4. *Cualquier grupo dirigido es reversivo.*

Demostración. Puesto que la operación de inversos

$$\nu: G \rightarrow G^{\text{op}}$$

es dirigida, entonces su inversa (que es la misma función)

$$\nu^{\text{op}}: G^{\text{op}} \rightarrow (G^{\text{op}})^{\text{op}} = G$$

igualmente lo es, i.e., $G \cong G^{\text{op}}$. $\square$

Sabemos que $\uparrow\mathbb{S}^1$ es un espacio dirigido reversivo mediante el isomorfismo

$$\begin{aligned} \nu: \uparrow\mathbb{S}^1 &\rightarrow (\uparrow\mathbb{S}^1)^{\text{op}} \\ e^{ix} &\mapsto e^{-ix}, \end{aligned}$$

pero dicho mapeo también es un homomorfismo. Esta idea nos lleva a distinguir un isomorfismo de espacios dirigidos de un isomorfismo de grupos dirigidos.

Definición 4.1.5. Sean G, H grupos dirigidos. Un isomorfismo de grupos dirigidos $f: G \rightarrow H$ se refiere a un homomorfismo de grupos que es isomorfismo de espacios dirigidos.

Observación 4.1.6. Particularmente, un isomorfismo de grupos dirigidos es un isomorfismo de espacios dirigidos.

En este caso, $\uparrow\mathbb{S}^1$ y $(\uparrow\mathbb{S}^1)^{\text{op}}$ son grupos dirigidos isomorfos. Pero, en general, el mapeo de obtener inversos no es homomorfismo; por ejemplo, con el grupo lineal general $GL_n(F)$, no sucede que $A^{-1}B^{-1}$ sea igual a $(AB)^{-1}$ para cualquier par de matrices $A, B \in GL_n(F)$.

Al igual que su contraparte topológica, una de las primeras propiedades que surgen inmediatamente de la definición de grupos dirigidos es que son homogéneos.

Definición 4.1.7. Sea X un d-espacio. Si para cualesquiera puntos x, y de X existe un isomorfismo $f: X \rightarrow X$ tal que $f(x) = y$, diremos que X es homogéneo.

Dado un elemento g de un grupo topológico G , el mapeo

$$L_g: G \rightarrow G, \quad L_g(x) = gx,$$

es un homeomorfismo cuya inversa es $L_{g^{-1}}$, y cuando $g = yx^{-1}$ se tiene que $L_g(x) = y$. Con esta idea en mente, es sencillo verificar lo siguiente.

Proposición 4.1.8. *Todo grupo dirigido es homogéneo.*

Demostración. Sean G un grupo dirigido y $g \in G$. El mapeo L_g es dirigido por ser la composición del d-mapeo

$$G \rightarrow G \times G, \quad x \mapsto (g, x),$$

y la multiplicación de G . Del mismo modo, el mapeo inverso $L_{g^{-1}}$ es dirigido y por tanto L_g es un isomorfismo de espacios dirigidos. $\square$

Es bien sabido que las únicas esferas que admiten una estructura de grupo topológico son $\mathbb{S}^0$, $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^3$. Con la estructura que poseen $\uparrow\mathbb{S}^0$ y $\uparrow\mathbb{S}^1$ son grupos dirigidos, pero $\uparrow\mathbb{S}^3$ no puede serlo porque no es homogéneo al tener un vórtice en la clase de la frontera. En efecto, si suponemos que $\uparrow\mathbb{S}^3$ es homogéneo, habría un automorfismo f satisfaciendo $f([0, 0, 0]) = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, contradiciendo que un isomorfismo preserva vórtices (ver Proposición 3.1.5).

Esto nos obliga a plantear nuevas estructuras dirigidas en $\mathbb{S}^3$ con la finalidad de obtener un grupo dirigido. Para ello, veamos que hay una forma natural de extender ciertas d-estructuras definidas sobre un grupo topológico G de forma que, con la estructura resultante, G sea un grupo dirigido y minimal en cierto sentido.

Proposición 4.1.9. *Dado un grupo topológico G y una estructura dirigida d_0 en G cumpliendo que $\nu: (G, d_0) \rightarrow (G, d_0)^{op}$ es dirigido, entonces existe una d-estructura dG tal que $d_0 \subseteq dG$ con la cual G es un grupo dirigido.*

Demostración. Definamos a dG como la d-estructura más pequeña verificando que la familia de mapeos

$$\begin{aligned} \mu^{i-1}: (G, d_0)^i &\rightarrow (G, dG) \\ (g_1, \dots, g_i) &\mapsto g_1 \cdots g_i \end{aligned}$$

son dirigidos, tomando $i \geq 2$. Puesto que el camino constante en el elemento identidad de G pertenece a d_0 , necesariamente $d_0 \subseteq dG$.

Con la caracterización de la Proposición 2.3.6, sabemos que un par de caminos $\alpha, \beta: \mathbb{I} \rightarrow G$ pertenecen a dG si y solo si

$$\alpha = \alpha_1 \cdot_{t_1} \dots \cdot_{t_{n-1}} \alpha_n, \quad \beta = \beta_1 \cdot_{s_1} \dots \cdot_{s_{m-1}} \beta_m,$$

donde cada α_i y β_i son un producto finito de caminos que están en d_0 . Recordemos que

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1 \lambda_1(t), & \text{si } 0 \leq t \leq t_1, \\ \alpha_2 \lambda_2(t), & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2, \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n \lambda_n(t), & \text{si } t_{n-1} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

tomando a λ_i como la reparametrización que manda al conjunto $[t_{i-1}, t_i]$ a $[0, 1]$ de forma lineal. Análogamente,

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta_1 \lambda'_1(t), & \text{si } 0 \leq t \leq s_1, \\ \vdots & \vdots \\ \beta_m \lambda'_m(t), & \text{si } s_{m-1} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Sea $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_q = 1$ la partición que se crea tomando los valores t_i y s_i de menor a mayor. Luego, el producto de α y β es

$$\alpha\beta = (\alpha_1 r_1)(\beta_1 r'_1)_{p_1} \cdot (\alpha_{\sigma_2} r_2)(\beta_{\sigma'_2} r'_2)_{p_2} \dots_{p_{q-1}} (\alpha_n r_p)(\beta_m r'_p),$$

siendo σ_i y σ'_i los enteros tales que $t_{\sigma_i-1} < p_i \leq t_{\sigma_i}$ y $s_{\sigma'_i-1} < p_i \leq s_{\sigma'_i}$, mientras que r_i y r'_i mapean el conjunto $[p_{i-1}, p_i]$ a $[\lambda_{\sigma_i}(p_{i-1}), \lambda(p_i)]$ y $[\lambda'_{\sigma'_i}(p_{i-1}), \lambda'_{\sigma'_i}(p_i)]$ mediante rectas, respectivamente. Si α_{σ_i} es el producto de k caminos y $\beta_{\sigma'_i}$ de k' caminos, entonces $\gamma_i = (\alpha_{\sigma_i} r_i)(\beta_{\sigma'_i} r'_i)$ es un producto de $k + k'$ caminos reparametrizados con r_i o r'_i , los cuales siguen perteneciendo a d_0 , i.e., $\gamma_i \in dG$. Consecuentemente, $\alpha\beta$ está en dG porque sabemos que éste último es cerrado bajo concatenaciones.

Por último, para probar que $\nu: (G, dG) \rightarrow (G, dG)^{\text{op}}$ es dirigido basta con mostrar que para todo $i \geq 2$, la composición

$$(G, d_0)^i \xrightarrow{\mu^{i-1}} (G, dG) \xrightarrow{\nu} (G, dG)^{\text{op}}$$

es dirigida, y esto es cierto porque el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (G, d_0)^i & \xrightarrow{\mu^{i-1}} & (G, dG) \xrightarrow{\nu} (G, dG)^{\text{op}} \\ \nu^i \downarrow & & \uparrow (\mu^{i-1})^{\text{op}} \\ ((G, d_0)^{\text{op}})^i & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & ((G, d_0)^i)^{\text{op}} \\ (g_1, \dots, g_i) & \mapsto & (g_i, \dots, g_1) \end{array}$$

es conmutativo, las flechas verticales y la inferior son dirigidas. Que la flecha inferior sea dirigida es gracias a que $((G, d_0)^{\text{op}})^i = ((G, d_0)^i)^{\text{op}}$.

Con todo lo anterior, los mapeos

$$\mu: (G, dG) \times (G, dG) \rightarrow (G, dG), \quad \nu: (G, dG) \rightarrow (G, dG)^{\text{op}},$$

preservan d-caminos y (G, dG) es un grupo dirigido. $\square$

Observación 4.1.10. Para poder referirnos a la estructura dirigida que se está extendiendo, diremos que dG es la *propagación de d_0* bajo la multiplicación del grupo.

Adicionalmente, dG es la estructura dirigida más pequeña que cumple lo anterior.

Proposición 4.1.11. *Sea G un grupo topológico y d_0 una estructura dirigida en G cumpliendo que $\nu: (G, d_0) \rightarrow (G, d_0)^{\text{op}}$ es dirigido. Si (G, d) es un grupo dirigido y $d_0 \subseteq d$, entonces $dG \subseteq d$.*

Demostración. El mapeo $\mu: (G, d_0) \times (G, d_0) \rightarrow (G, d)$ es dirigido por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} (G, d) \times (G, d) & \xrightarrow{\mu} & (G, d) \\ \uparrow 1_G \times 1_G & \nearrow \mu & \\ (G, d_0) \times (G, d_0) & & \end{array}$$

y porque $1_G: (G, d_0) \rightarrow (G, d)$ es dirigido. Por inducción, todos los mapeos

$$\mu^{i-1}: (G, d_0)^i \rightarrow (G, d)$$

son dirigidos ya que

$$\begin{array}{ccc} (G, d_0)^i & \xrightarrow{\mu^{i-1}} & (G, d) \\ \downarrow 1 & & \uparrow \mu \\ (G, d_0)^{i-1} \times (G, d) & \xrightarrow{\mu^{i-2} \times 1_G} & (G, d) \times (G, d) \end{array}$$

es un diagrama conmutativo y las flechas verticales e inferior preservan caminos dirigidos. Así podemos afirmar que $dG \subseteq d$, pues construimos a dG como la d-estructura más pequeña con esa propiedad. $\square$

Notemos que en las proposiciones anteriores el grupo topológico G ya cuenta con una estructura dirigida d_0 , así que el siguiente paso sería cuestionarse cómo crear esa estructura desde cero. Una manera de resolver lo anterior es aprovechar que los grupos de Lie son variedades diferenciables.

4.2. Construcción de grupos de Lie dirigidos

Sea G un grupo de Lie de dimensión finita y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. El mapeo exponencial descrito en la Sección 1.3

$$\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$$

es suave (en particular, continuo), satisface que $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$ y se restringe a un difeomorfismo para alguna vecindad del cero de $\mathfrak{g}$ y un abierto de G que contiene al elemento identidad. Esta última propiedad será lo que nos permita definir una estructura dirigida d_0 en G , junto con el hecho de que $\mathfrak{g}$ y $\mathbb{R}^n$ son espacios vectoriales isomorfos, siendo n la dimensión de G .

De hecho, cualquier isomorfismo lineal

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$$

también es un homeomorfismo, pues la topología que tiene $\mathfrak{g}$ es justamente la inducida por ser isomorfo a $\mathbb{R}^n$, y esta topología no depende de la elección del isomorfismo. Por tal razón, tiene sentido equipar a $\mathfrak{g}$ con la d -estructura inicial inducida por f , denotada con $\mathfrak{d}_f$. En este caso, $\alpha \in \mathfrak{d}_f$ si y solo si $f^{-1}\alpha$ es dirigido en $\uparrow\mathbb{R}^n$.

Proposición 4.2.1. *El d -espacio $(\mathfrak{g}, \mathfrak{d}_f)$ es un grupo dirigido con la suma.*

Demostración. Claramente los mapeos $f: \uparrow\mathbb{R}^n \rightarrow (\mathfrak{g}, \mathfrak{d}_f)$ y $f^{-1}: (\mathfrak{g}, \mathfrak{d}_f) \rightarrow \uparrow\mathbb{R}^n$ son dirigidos. Si A, B pertenecen a $\mathfrak{g}$ entonces $f^{-1}(A) + f^{-1}(B) = f^{-1}(A + B)$ porque f^{-1} es lineal, de tal modo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{g}, \mathfrak{d}_f) \times (\mathfrak{g}, \mathfrak{d}_f) & \xrightarrow{+} & (\mathfrak{g}, \mathfrak{d}_f) \\ f^{-1} \times f^{-1} \downarrow & & \uparrow f \\ \uparrow\mathbb{R}^n \times \uparrow\mathbb{R}^n & \xrightarrow{+} & \uparrow\mathbb{R}^n \end{array}$$

es conmutativo. Así, la operación de suma en $(\mathfrak{g}, \mathfrak{d}_f)$ es dirigida gracias a que $\uparrow\mathbb{R}^n$ es un grupo dirigido con la suma usual. Idénticamente, la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \longmapsto & -A \\ (\mathfrak{g}, \mathfrak{d}_f) & \longrightarrow & (\mathfrak{g}, \mathfrak{d}_f)^{\text{op}} \\ f^{-1} \downarrow & & \uparrow f^{\text{op}} \\ \uparrow\mathbb{R}^n & \longrightarrow & (\uparrow\mathbb{R}^n)^{\text{op}} \\ x & \longmapsto & -x \end{array}$$

nos garantiza que el mapeo de la parte superior es dirigido, como se deseaba. □

Ahora volvamos al problema original. Podemos hallar una vecindad $\mathcal{U}$ del cero en $\mathfrak{g}$ y un abierto $\mathcal{U}$ en G que contiene a la identidad tales que $\exp: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ es un

difeomorfismo, y en especial un homeomorfismo. Denotaremos con $\log: \mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{U}$ a su inversa.

Observación 4.2.2. Se puede elegir a $\mathcal{U}$ de forma que si $g \in \mathcal{U}$ entonces $g^{-1} \in \mathcal{U}$; si $\mathcal{U}$ no cumpliera esta propiedad, el conjunto $\mathcal{U} \cap \nu^{-1}(\mathcal{U})$ es un abierto en G que sí la cumple, siendo $\nu: G \rightarrow G$ el mapeo dado por $g \mapsto g^{-1}$.

Definición 4.2.3. Diremos que un abierto $\mathcal{U}$ de un grupo de Lie G es *admisibile* en G si cumple que

- contiene al elemento identidad,
- existe una vecindad $\mathfrak{U}$ del cero en $\mathfrak{g}$ tal que el mapeo exponencial $\mathfrak{g} \rightarrow G$ se restringe a un difeomorfismo $\mathfrak{U} \rightarrow \mathcal{U}$,
- es cerrado bajo inversos, esto es, $g \in \mathcal{U}$ implica $g^{-1} \in \mathcal{U}$.

Llamaremos $\Lambda(G)$ al conjunto de abiertos admisibles en G .

Con todo lo anterior, podemos transferir una parte de la d-estructura $\mathfrak{d}_f$ a G de la siguiente manera: si $\mathcal{U}$ es admisible en G , diremos que un camino $\alpha: \mathbb{I} \rightarrow G$ es *dirigido localmente en $(\mathcal{U}, \mathfrak{d}_f)$* si y solo si $\alpha(\mathbb{I}) \subseteq \mathcal{U}$ y $\log \alpha \in \mathfrak{d}_f$. Definamos

$$d\mathcal{U}_f = \{\alpha: \mathbb{I} \rightarrow G \mid \alpha \text{ es dirigido localmente en } (\mathcal{U}, \mathfrak{d}_f) \text{ o es constante}\}.$$

Proposición 4.2.4. *El conjunto $d\mathcal{U}_f$ es una estructura dirigida en G .*

Demostración. Evidentemente $d\mathcal{U}_f$ tiene a todos los caminos constantes. Dados caminos consecutivos $\alpha, \beta \in d\mathcal{U}_f$, podría pasar que:

- α y β son dirigidos localmente en $(\mathcal{U}, \mathfrak{d}_f)$, implicando que $(\alpha \cdot \beta)(\mathbb{I}) \subseteq \mathcal{U}$ e igualmente $\log(\alpha \cdot \beta) = \log \alpha \cdot \log \beta \in \mathfrak{d}_f$,
- α es dirigido localmente en $(\mathcal{U}, \mathfrak{d}_f)$ y β es constante, de donde $\beta(I) = \{\alpha(1)\}$ es subconjunto de $\mathcal{U}$ y $\log \beta \in \mathfrak{d}_f$ en vista de que $\mathfrak{d}_f$ contiene a todos los caminos constantes, y así β también es dirigido localmente en $(\mathcal{U}, \mathfrak{d}_f)$,
- α es constante y β es dirigido localmente en $(\mathcal{U}, \mathfrak{d}_f)$, pero este caso es idéntico al anterior,
- o bien, α y β son constantes, pero obviamente $\alpha \cdot \beta$ sería constante.

De cualquier forma, $\alpha \cdot \beta \in d\mathcal{U}_f$. Por último, si α es dirigido localmente en $(\mathcal{U}, \mathfrak{d}_f)$ y λ es una reparametrización creciente, es claro que $\alpha\lambda$ es dirigido localmente en $(\mathcal{U}, \mathfrak{d}_f)$. $\square$

Además de ser una d-estructura, $d\mathcal{U}_f$ satisface que:

Proposición 4.2.5. *El mapeo $\nu: (G, d\mathcal{U}_f) \rightarrow (G, d\mathcal{U}_f)^{op}$ descrito por $g \mapsto g^{-1}$ es dirigido.*

Demostración. Tomemos α en $d\mathcal{U}_f$. Si α es constante, no hay nada que verificar. Luego, consideremos que α es dirigido localmente en $(\mathcal{U}, \mathfrak{d}_f)$. Como hemos elegido a $\mathcal{U}$ de tal forma que $g \in \mathcal{U}$ implica $g^{-1} \in \mathcal{U}$, necesariamente $\alpha^{-1}(\mathbb{I}) \subseteq \mathcal{U}$ y por ende $\alpha^{-1}r(\mathbb{I}) \subseteq \mathcal{U}$, siendo r el mapeo de reflexión. Restaría mostrar que $\log(\alpha^{-1}r) \in \mathfrak{d}_f$, lo cual es verdad pues

$$\log(\alpha^{-1}r) = (\log(\alpha^{-1}))r = (-\log \alpha)r.$$

En el argumento anterior se está haciendo uso de la identidad $\log(g^{-1}) = -\log(g)$, que el mapeo $(\mathfrak{g}, \mathfrak{d}_f) \rightarrow (\mathfrak{g}, \mathfrak{d}_f)^{\text{op}}$ dado por $A \mapsto -A$ es dirigido y también que $\log \alpha$ está en $\mathfrak{d}_f$. $\square$

Finalmente, es posible definir una d-estructura en G para que sea un grupo dirigido.

Definición 4.2.6. Sean G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Dados $\mathcal{U} \in \Lambda(G)$ y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$ un isomorfismo lineal, la estructura dirigida $dG_f^{\mathcal{U}}$ sobre G es aquella que surge de propagar $d\mathcal{U}_f$ bajo la multiplicación del grupo.

Observación 4.2.7. Evidentemente $(G, dG_f^{\mathcal{U}})$ es un grupo dirigido.

Notemos que la construcción de la estructura dirigida $dG_f^{\mathcal{U}}$ depende, en principio, de dos factores: el primero es la elección del abierto $\mathcal{U} \in \Lambda(G)$ y el segundo es el isomorfismo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$. En las siguientes subsecciones se analiza cómo influyen estos en la estructura dirigida resultante.

4.2.1. Elección del abierto admisible en el grupo de Lie

Se desearía que la d-estructura con la cual un grupo de Lie G es grupo dirigido sea independiente de la elección del abierto admisible en G . De la Definición 4.2.6 se deduce lo siguiente:

Proposición 4.2.8. Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$ un isomorfismo lineal. Si $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \in \Lambda(G)$ son tales que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$, entonces $dG_f^{\mathcal{U}} \subseteq dG_f^{\mathcal{U}'}$.

Demostración. Tomemos $\alpha \in d\mathcal{U}_f$. Si α es dirigido localmente en $(\mathcal{U}, \mathfrak{d}_f)$ también lo es en $(\mathcal{U}', \mathfrak{d}_f)$ debido a que $\alpha(\mathbb{I}) \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ y al componerlo con la inversa del difeomorfismo $\mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}'$ se obtiene el mismo camino que hacerlo con la inversa de la otra restricción $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, el cual pertenece a $\mathfrak{d}_f$. Por lo tanto, $d\mathcal{U}_f \subseteq d\mathcal{U}'_f$ y posteriormente $dG_f^{\mathcal{U}} \subseteq dG_f^{\mathcal{U}'}$, ya que un camino $\mathbb{I} \rightarrow G$ pertenece a $dG_f^{\mathcal{U}}$ si y solo si es una concatenación finita de productos de caminos en $d\mathcal{U}_f$. $\square$

Si sucediera que $d\mathcal{U}'_f \subseteq dG_f^{\mathcal{U}}$, bastaría aplicar la Proposición 4.1.11 para obtener que $dG_f^{\mathcal{U}'} \subseteq dG_f^{\mathcal{U}}$, es decir, estas últimas estructuras son exactamente la misma.

Definición 4.2.9. Sea $\mathcal{U}'$ un abierto admisible en G . Diremos que $\mathcal{U}'$ es *propagado* si siempre que tomemos $\mathcal{U} \in \Lambda(G)$ con $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ sucede que $d\mathcal{U}'_f \subseteq dG_f^{\mathcal{U}}$, para todo

isomorfismo lineal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$. Si todo conjunto admisible en G es propagado, se dice que G es *naturalmente propagado*.

En casos como este, la estructura dirigida que obtenemos es la misma sin importar cuál abierto admisible en G se haya seleccionado.

Proposición 4.2.10. *Si G es naturalmente propagado, se satisface que $dG_f^{\mathcal{U}} = dG_f^{\mathcal{U}'}$ para cualesquiera $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \in \Lambda(G)$ e isomorfismo lineal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$. El conjunto $\mathcal{U}_0$ es admisible en G y cumple que $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}, \mathcal{U}'$, por lo cual

$$dG_f^{\mathcal{U}} = dG_f^{\mathcal{U}_0} = dG_f^{\mathcal{U}'}$$

como se quería demostrar. $\square$

Este escenario no es imposible, pues la hipótesis de la Proposición 4.2.10 se satisface al considerar el grupo de matrices unitarias U_1 .

Proposición 4.2.11. *El grupo de Lie U_1 es naturalmente propagado.*

Demostración. Sean $G = U_1$ y $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{g}$ un isomorfismo lineal. El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de U_1 consta de los números complejos de la forma $i\theta$ con $\theta \in \mathbb{R}$. El mapeo exponencial es el usual, i.e., aquel dado por $i\theta \mapsto e^{i\theta}$.

Consideremos que $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \in \Lambda(G)$ son tales que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ y elijamos $\alpha \in d\mathcal{U}'_f$. Sabemos que α es de la forma $\exp fa$, donde $a: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\exp f(\theta) \in \mathcal{U}$ para todo $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Luego, sea k un entero positivo cumpliendo que

$$\frac{1}{k}(a(1) - a(0)) < \varepsilon.$$

Definamos el camino $a': \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $a'(t) = \frac{1}{k}(a(t) - a(0))$, el cual es dirigido en $\uparrow\mathbb{R}$. Puesto que $a = ka' + a(0)$ y f es lineal, obtenemos la identidad

$$\alpha = \exp fa = \exp(ka' + fa(0)) = (\exp fa')^k \exp fa(0),$$

donde $\exp fa' \in d\mathcal{U}_f$ en vista de que

$$-\varepsilon < 0 \leq \frac{1}{k}(a(t) - a(0)) \leq \frac{1}{k}(a(1) - a(0)) < \varepsilon$$

para todo $t \in \mathbb{I}$. De este modo $\alpha \in dG_f^{\mathcal{U}}$ al considerar a $\exp fa(0)$ como un camino constante. $\square$

No obstante, no es claro si cualquier grupo de Lie es naturalmente propagado. Afortunadamente, hay una forma de garantizar que la estructura dirigida construida no dependa de esta primera elección y que no afecte cuando el grupo sí es naturalmente propagado.

Definición 4.2.12. Sean G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Dado un isomorfismo lineal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$, la estructura dirigida dG_f sobre G es la intersección de todas las d-estructuras $dG_f^{\mathcal{U}}$ con $\mathcal{U} \in \Lambda(G)$.

Proposición 4.2.13. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- a) *El espacio dirigido (G, dG_f) es un grupo dirigido,*
- b) *si G es naturalmente propagado, entonces $dG_f = dG_f^{\mathcal{U}_0}$ para cualquier abierto admisible $\mathcal{U}_0$,*
- c) *si G tiene dimensión positiva, la estructura dG_f posee caminos no constantes.*

Demostración. Puesto que el mapeo de multiplicación

$$\mu: (G, dG_f^{\mathcal{U}}) \times (G, dG_f^{\mathcal{U}}) \rightarrow (G, dG_f^{\mathcal{U}})$$

es dirigido para todo $\mathcal{U} \in \Lambda(G)$, entonces

$$\mu: (G, dG_f) \times (G, dG_f) \rightarrow (G, dG_f)$$

también lo es. Por el mismo argumento, la operación de obtener inversos

$$\nu: (G, dG_f) \rightarrow (G, dG_f)^{\text{op}}$$

es dirigida. Esto completa el primer inciso.

Para lo segundo, supongamos que G es naturalmente propagado. Por la Proposición 4.2.10, se tiene que

$$dG_f^{\mathcal{U}_0} = \bigcap_{\mathcal{U} \in \Lambda(G)} dG_f^{\mathcal{U}_0} = \bigcap_{\mathcal{U} \in \Lambda(G)} dG_f^{\mathcal{U}} = dG_f.$$

Por último, probemos c). Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base estándar de $\mathbb{R}^n$ y

$$v = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \neq 0$$

con $x_i \geq 0$. Elijamos $\mathcal{U} \in \Lambda(G)$ y llamemos $\mathfrak{U}$ al abierto de $\mathfrak{g}$ con el cual $\exp|: \mathfrak{U} \rightarrow \mathcal{U}$ es difeomorfismo. Podemos hallar $\varepsilon > 0$ de tal forma que el camino $a: \mathbb{I} \rightarrow \mathfrak{g}$ dado por $a(t) = t\varepsilon v$ cumpla que $a(\mathbb{I}) \subseteq \mathfrak{U}$. Además $a \in \mathfrak{d}_f$ porque

$$f^{-1}a(t) = f^{-1} \left(t\varepsilon \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \right) = t\varepsilon \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

y cada $x_i \geq 0$. Claramente el camino $\alpha = \exp a$ está en $dG_f^{\mathcal{U}}$.

Ahora tomemos otro abierto $\mathcal{U}'$ admisible en G . Sea k un entero positivo tal que la

reparametrización $\lambda: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ descrita por $\lambda(t) = \frac{1}{k}t$ satisfaga que la imagen de $\alpha' = \alpha\lambda$ esté contenida en $\mathcal{U}'$. Esto es posible ya que $\alpha(0)$ es el elemento identidad de G y pertenece a $\mathcal{U}'$. Así, $\alpha' \in d\mathcal{U}'_f$.

Denotemos $g = \alpha\left(\frac{1}{k}\right) = \exp\left(\frac{\varepsilon}{k}v\right)$ y consideremos el camino

$$\beta = \alpha' \cdot_{t_1} g \alpha' \cdot_{t_2} g^2 \alpha' \cdot_{t_3} \dots \cdot_{t_{k-1}} g^{k-1} \alpha' \in dG_f^{\mathcal{U}'}.$$

donde $t_j = j/k$. Notemos que

$$\begin{aligned} g^j \alpha'(t) &= \exp\left(\frac{\varepsilon}{k}v\right)^j \exp a\lambda(t) \\ &= \exp\left(\frac{j\varepsilon}{k}v\right) \exp(\lambda(t)\varepsilon v) \\ &= \exp\left(\frac{j\varepsilon}{k}v + \lambda(t)\varepsilon v\right) \\ &= \exp(a(t_j) + a\lambda(t)) \end{aligned}$$

para todo $j \in \{0, \dots, k-1\}$. La penúltima identidad es cierta debido a que

$$\left[\frac{j\varepsilon}{k}v, \lambda(t)\varepsilon v\right] = \frac{\lambda(t)j\varepsilon^2}{k}[v, v] = 0.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \log \beta &= \log \alpha' \cdot_{t_1} \log(g \alpha') \cdot_{t_2} \dots \cdot_{t_{k-1}} \log(g^{k-1} \alpha') \\ &= a\lambda \cdot_{t_1} (a(t_1) + a\lambda) \cdot_{t_2} \dots \cdot_{t_{k-1}} (a(t_{k-1}) + a\lambda), \end{aligned}$$

pero de acuerdo con la Definición 2.1.3, obtenemos que

$$\log \beta(t) = \begin{cases} a\lambda(kt), & \text{si } 0 \leq t \leq t_1, \\ a(t_1) + a\lambda\left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right), & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2, \\ \vdots & \vdots \\ a(t_{k-1}) + a\lambda\left(\frac{t-t_{k-1}}{1-t_{k-1}}\right), & \text{si } t_{k-1} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

y considerando las identidades

$$\begin{aligned} a(t_j) + a\lambda\left(\frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}\right) &= a(t_j) + a\lambda(kt-j) \\ &= a(t_j) + a(t-t_j) \\ &= t_j v + t\varepsilon v - t_j v \\ &= a(t), \end{aligned}$$

se concluye que $\log \beta = a$, es decir, $\alpha = \beta \in dG_f^{\mathcal{U}'}$. Como hemos tomado $\mathcal{U}'$ arbitrariamente, entonces α es un camino no constante que pertenece a $dG_f^{\mathcal{U}'}$ para cualquier

$\mathcal{U}' \in \Lambda(G)$, y por consiguiente está en dG_f . $\square$

Volvamos al ejemplo de U_1 . Como es naturalmente propagado, si elegimos a f como el isomorfismo $t \mapsto it$, es evidente que $(U_1, d(U_1)_f)$ es isomorfo a $\uparrow\mathbb{S}^1$ mediante el mapeo identidad. En este caso, $d(U_1)_f$ no tiene a todos los caminos $\mathbb{I} \rightarrow U_1$ porque la estructura dirigida de $\uparrow\mathbb{S}^1$ tampoco contiene a todos los caminos $\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{S}^1$.

Es fácil comprobar que el producto de grupos de Lie naturalmente propagados seguirá siendo naturalmente propagado. En particular, el toro

$$T^m = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{m \text{ veces}}$$

es naturalmente propagado. Más aún, puesto que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de T^m es el conjunto de tuplas de la forma $(i\theta_1, \dots, i\theta_m)$ con $\theta_j \in \mathbb{R}$, si consideramos un isomorfismo lineal $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{g}$ de manera conveniente se obtendrá que

$$(T^m, d(T^m)_f) = \underbrace{\uparrow\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \uparrow\mathbb{S}^1}_{m \text{ veces}}$$

como espacios dirigidos.

4.2.2. Invarianza en la elección del isomorfismo lineal

Sean G un grupo de Lie, $\mathcal{U} \in \Lambda(G)$ y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$ un isomorfismo de espacios vectoriales. Primero, exploremos algunas variaciones en el isomorfismo f que no afectan en nada a la estructura dirigida $d\mathcal{U}_f$.

Lema 4.2.14. *Si $T: \uparrow\mathbb{R}^n \rightarrow \uparrow\mathbb{R}^n$ es lineal e isomorfismo de espacios dirigidos, entonces $d\mathcal{U}_f = d\mathcal{U}_{fT}$*

Demostración. Es sencillo verificar que $\mathfrak{d}_f$ es la única estructura dirigida con la cual $f: \uparrow\mathbb{R}^n \rightarrow (\mathfrak{g}, \mathfrak{d}_f)$ es un isomorfismo en $\mathbf{dTop}$. Por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \uparrow\mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & (\mathfrak{g}, \mathfrak{d}_{fT}) \\ T^{-1} \downarrow & \nearrow fT & \\ \uparrow\mathbb{R}^n & & \end{array}$$

se concluye que $f: \uparrow\mathbb{R}^n \rightarrow (\mathfrak{g}, \mathfrak{d}_{fT})$ también es un isomorfismo y en consecuencia $\mathfrak{d}_f = \mathfrak{d}_{fT}$. Por tanto un camino $\mathbb{I} \rightarrow G$ es dirigido localmente en $(\mathcal{U}, \mathfrak{d}_f)$ si y solo si es dirigido localmente en $(\mathcal{U}, \mathfrak{d}_{fT})$, es decir, $d\mathcal{U}_f = d\mathcal{U}_{fT}$. $\square$

En particular, si $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ es una biyección y denotamos con

$\{e_1, \dots, e_n\}$ a la base estándar de $\mathbb{R}^n$, el mapeo

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}: \uparrow\mathbb{R}^n &\rightarrow \uparrow\mathbb{R}^n \\ \sum x_i e_i &\mapsto \sum x_i e_{\sigma(i)}\end{aligned}$$

es lineal e isomorfismo de espacios dirigidos, afirmando que $d\mathcal{U}_f$ y $d\mathcal{U}_{f\widehat{\sigma}}$ coinciden.

Similarmente, la estructura opuesta de $d\mathcal{U}_f$ es la misma que $d\mathcal{U}_{-f}$.

Proposición 4.2.15. *Sean $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$ un isomorfismo lineal y $\mathcal{U} \in \Lambda(G)$. Entonces*

$$(G, d\mathcal{U}_f)^{\text{op}} = (G, d\mathcal{U}_{-f}).$$

Demostración. Denotemos con $(\mathfrak{d}_f)^{\text{op}}$ a la d-estructura opuesta de $\mathfrak{d}_f$. Elijamos α en $(\mathfrak{d}_f)^{\text{op}}$, es decir, $\alpha = far$ para algún $a: \uparrow\mathbb{I} \rightarrow \uparrow\mathbb{R}^n$. Luego, $-ar$ es dirigido en $\uparrow\mathbb{R}^n$ porque es creciente en todas sus coordenadas, lo cual implica que $\alpha = -f(-ar) \in \mathfrak{d}_{-f}$.

Del mismo modo $(\mathfrak{d}_{-f})^{\text{op}} \subseteq \mathfrak{d}_f$, pero esto significa que $\mathfrak{d}_{-f} \subseteq (\mathfrak{d}_f)^{\text{op}}$. En consecuencia $(\mathfrak{d}_f)^{\text{op}} = \mathfrak{d}_{-f}$ y por ello $(d\mathcal{U}_f)^{\text{op}} = d\mathcal{U}_{-f}$. $\square$

De hecho, se puede decir aún más sobre estas estructuras después de propagarlas por la multiplicación del grupo.

Proposición 4.2.16. *Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$ un isomorfismo lineal. Se verifica que:*

- a) *si $T: \uparrow\mathbb{R}^n \rightarrow \uparrow\mathbb{R}^n$ es lineal e isomorfismo en $\mathbf{dTop}$, entonces $dG_f = dG_{fT}$,*
- b) *las d-estructuras $(dG_f)^{\text{op}}$ y dG_{-f} coinciden.*

Demostración. Dado que $d\mathcal{U}_f = d\mathcal{U}_{fT}$, las estructuras propagadas por la multiplicación del grupo son las mismas, esto es, $dG_f^{\mathcal{U}} = dG_{fT}^{\mathcal{U}}$. Después

$$dG_f = \bigcap_{\mathcal{U} \in \Lambda(G)} dG_f^{\mathcal{U}} = \bigcap_{\mathcal{U} \in \Lambda(G)} dG_{fT}^{\mathcal{U}} = dG_{fT}.$$

Por otro lado, notemos que es lo mismo propagar la estructura $(d\mathcal{U}_f)^{\text{op}} = d\mathcal{U}_{-f}$ bajo la multiplicación del grupo que obtener la estructura opuesta de $dG_f^{\mathcal{U}}$. Esto es cierto porque los caminos que están en $(dG_f^{\mathcal{U}})^{\text{op}}$ son de la forma

$$(\alpha_1 \blacksquare \dots \blacksquare \alpha_m) \circ r = \alpha_m r \blacksquare \dots \blacksquare \alpha_1 r,$$

siendo cada α_i un producto finito de caminos provenientes de $d\mathcal{U}_f$, esto es,

$$\alpha_i r = (a_1^i a_2^i \dots a_{k_i}^i) r = (a_1^i r)(a_2^i r) \dots (a_{k_i}^i r)$$

para ciertos $a_j^i \in d\mathcal{U}_f$. Así, es evidente que $(G, dG_f^{\mathcal{U}})^{\text{op}}$ es un grupo dirigido cuya d-estructura contiene a $(d\mathcal{U}_f)^{\text{op}}$, y de acuerdo con la Proposición 4.1.11, la propagación de $(d\mathcal{U}_f)^{\text{op}} = d\mathcal{U}_{-f}$ bajo la multiplicación es un subconjunto de $(dG_f^{\mathcal{U}})^{\text{op}}$. La otra contención es obvia por la forma que tienen los caminos de $(dG_f^{\mathcal{U}})^{\text{op}}$.

Esto significa que $(dG_f^{\mathcal{U}})^{\text{op}} = dG_{-f}^{\mathcal{U}}$ para cada abierto admisible $\mathcal{U}$ de G , y posteriormente

$$(dG_f)^{\text{op}} = \left(\bigcap_{\mathcal{U} \in \Lambda(G)} dG_f^{\mathcal{U}} \right)^{\text{op}} = \bigcap_{\mathcal{U} \in \Lambda(G)} (dG_f^{\mathcal{U}})^{\text{op}} = \bigcap_{\mathcal{U} \in \Lambda(G)} dG_{-f}^{\mathcal{U}} = dG_{-f}$$

como se pretendía mostrar. $\square$

Del resultado anterior es inmediato concluir que

$$(G, dG_f) \cong (G, dG_f)^{\text{op}} = (G, dG_{-f}),$$

como espacios dirigidos, y el isomorfismo es aquel dado por $g \mapsto g^{-1}$.

Más generalmente, para cualquier par de isomorfismos $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$ de espacios vectoriales hay un isomorfismo local entre subespacios dirigidos de $(G, d\mathcal{U}_f)$ y $(G, d\mathcal{U}_g)$, como se indica:

Proposición 4.2.17. *Para todo $\mathcal{U} \in \Lambda(G)$ se pueden encontrar abiertos admisibles $\mathcal{V}, \mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ de tal forma que los subespacios dirigidos $(\mathcal{V}, d\mathcal{V}_f^*)$ y $(\mathcal{W}, d\mathcal{W}_g^*)$ de $(G, d\mathcal{V}_f)$ y $(G, d\mathcal{W}_g)$, respectivamente, son isomorfos.*

Demostración. Sea $\mathfrak{U}$ la vecindad del cero en $\mathfrak{g}$ con el cual $\exp|_{\mathfrak{U}}: \mathfrak{U} \rightarrow \mathcal{U}$ es difeomorfismo. Notemos que $h = gf^{-1}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es un homeomorfismo, así que los conjuntos

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{U} \cap h^{-1}(\mathfrak{U}), \quad \mathfrak{W} = \mathfrak{U} \cap h(\mathfrak{U}).$$

son abiertos en $\mathfrak{g}$. Al estar contenidos en $\mathfrak{U}$, se sigue que

$$\mathcal{V} = \exp(\mathfrak{V}), \quad \mathcal{W} = \exp(\mathfrak{W}),$$

son abiertos en G contenidos en $\mathcal{U}$, y además el mapeo exponencial se restringe a difeomorfismos $\mathfrak{V} \rightarrow \mathcal{V}$ y $\mathfrak{W} \rightarrow \mathcal{W}$. El cero está en $\mathfrak{V}$ y $\mathfrak{W}$ porque $h(0) = 0$ con $0 \in \mathfrak{U}$. Así, el elemento identidad de G pertenece a $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$.

Si $A \in \mathfrak{U}$, entonces $\exp(A) \in \mathcal{U}$ y por tal razón $\exp(-A) = \exp(A)^{-1} \in \mathcal{U}$, implicando que $-A \in \mathfrak{U}$; luego

$$-h^{-1}(A) = h^{-1}(-A) \in h^{-1}(\mathfrak{U}).$$

El párrafo anterior significa que si $A \in \mathfrak{V}$, también $-A \in \mathfrak{V}$, siendo lo único que faltaba para poder afirmar que $\mathcal{V}$ es admisible en G . Análogamente, $\mathcal{W} \in \Lambda(G)$.

El mapeo $h: (\mathfrak{g}, \mathfrak{d}_f) \rightarrow (\mathfrak{g}, \mathfrak{d}_g)$ es un isomorfismo de espacios dirigidos y $h|_{\mathfrak{V}}: \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{W}$ igualmente lo es si equipamos a $\mathfrak{V}$ y $\mathfrak{W}$ con las estructuras de subespacio dirigido de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{d}_f)$ y $(\mathfrak{g}, \mathfrak{d}_g)$, respectivamente. Esto es verdad gracias a que

$$h(\mathfrak{V}) = h(\mathfrak{U} \cap h^{-1}(\mathfrak{U})) = h(\mathfrak{U}) \cap hh^{-1}(\mathfrak{U}) = h(\mathfrak{U}) \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{W}.$$

Ahora, sean $(\mathcal{V}, d\mathcal{V}_f^*)$ y $(\mathcal{W}, d\mathcal{W}_g^*)$ los subespacios dirigidos de $(G, d\mathcal{V}_f)$ y $(G, d\mathcal{W}_g)$, respectivamente. Con otras palabras, $\alpha: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{V}$ está en $d\mathcal{V}_f^*$ si y solo si al considerarlo como un camino $\mathbb{I} \rightarrow G$ está en $d\mathcal{V}_f$. La composición

$$\mathcal{V} \xrightarrow{\log|} \mathfrak{V} \xrightarrow{h|} \mathfrak{W} \xrightarrow{\exp|} \mathcal{W}$$

es un homeomorfismo que envía caminos de $d\mathcal{V}_f^*$ a caminos pertenecientes a $d\mathcal{W}_g^*$, cuya inversa

$$\mathcal{W} \xrightarrow{\log|} \mathfrak{W} \xrightarrow{h|^{-1}} \mathfrak{V} \xrightarrow{\exp|} \mathcal{V}$$

también es dirigida en ese sentido. En conclusión,

$$\exp| \circ h| \circ \log|: (\mathcal{V}, d\mathcal{V}_f^*) \rightarrow (\mathcal{W}, d\mathcal{W}_g^*)$$

es un isomorfismo de espacios dirigidos. $\square$

Observación 4.2.18. Notemos que $(\mathcal{V}, d\mathcal{V}_f^*)$ y $(\mathcal{W}, d\mathcal{W}_g^*)$ también son subespacios dirigidos de $(G, d\mathcal{U}_f)$ y $(G, d\mathcal{U}_g)$, pues

$$d\mathcal{V}_f \subseteq d\mathcal{U}_f, \quad d\mathcal{W}_g \subseteq d\mathcal{U}_g,$$

según la Proposición 4.2.8.

Dado el isomorfismo local

$$(\mathcal{V}, d\mathcal{V}_f^*) \rightarrow (\mathcal{W}, d\mathcal{W}_g^*),$$

una primera opción para comparar las estructuras dirigidas que se obtienen con f y g , sería tratar de extender dicho isomorfismo a uno global de la forma

$$(G, d\mathcal{V}_f) \rightarrow (G, d\mathcal{W}_g).$$

Esto es posible salvo un cambio en los abiertos admisibles, y con el propósito de aligerar la demostración, enunciamos varios lemas y definiciones. Lo que se desea demostrar es la Proposición 4.2.25.

Lema 4.2.19. Sean $n \geq 2$ y $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base estándar de $\mathbb{R}^n$. Dada una base $\{v_1, \dots, v_n\}$, podemos hallar un mapeo suave

$$\gamma: \mathbb{I} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$$

y una permutación σ del conjunto $\{1, \dots, n\}$ tales que

- a) $\gamma(0)$ es la matriz identidad,
- b) $\gamma(1) = (v_{\sigma(1)} \mid v_{\sigma(2)} \mid \dots \mid v_{\sigma(n)})$.

Demostración. Es bien sabido que $GL_n(\mathbb{R})$ posee dos componentes conexas: una componente consta de las matrices con determinante positivo y la otra de aquellas con determinante negativo. Si la matriz

$$(v_1 \mid v_2 \mid v_3 \mid \cdots \mid v_n)$$

tiene determinante positivo, entonces está en la misma componente que la identidad. Si fuera negativo, la matriz

$$(v_2 \mid v_1 \mid v_3 \mid \cdots \mid v_n)$$

tiene determinante positivo. En cualquier caso, existe una permutación tal que

$$A = (v_{\sigma(1)} \mid v_{\sigma(2)} \mid \cdots \mid v_{\sigma(n)})$$

está en la misma componente conexa que la identidad. Puesto que las componentes conexas en una variedad diferenciable son variedades diferenciables conexas (por ser conjuntos abiertos), es posible encontrar un mapeo suave $\gamma: \mathbb{I} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ que empiece en la identidad y termine en A . $\square$

De ahí, se deduce directamente el siguiente resultado:

Lema 4.2.20. *Sea $n \geq 2$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base estándar de $\mathbb{R}^n$. Dada una base $\{v_1, \dots, v_n\}$, existe un mapeo suave*

$$\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

con la característica de que los mapeos

$$\begin{aligned} \varphi_t: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \varphi(x, t) \end{aligned}$$

satisfacen que

- a) cada φ_t es un isomorfismo lineal,
- b) φ_0 es la identidad de $\mathbb{R}^n$,
- c) $\varphi_1(e_i) = v_{\sigma(i)}$ para alguna permutación σ del conjunto $\{1, \dots, n\}$,
- d) para toda vecindad del cero $U \subseteq \mathbb{R}^n$, existe un abierto $N \subseteq U$ que contiene al cero con $\varphi_t(N) \subseteq U$ para todo $t \in \mathbb{I}$.

Demostración. Del lema anterior, sean $\gamma: \mathbb{I} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ el mapeo suave y σ la permutación de $\{1, \dots, n\}$ tal que $\gamma(0)$ es la identidad y

$$\gamma(1) = (v_{\sigma(1)} \mid v_{\sigma(2)} \mid \cdots \mid v_{\sigma(n)}).$$

Definamos

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{I} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (v, t) &\mapsto \gamma(t)v\end{aligned}$$

y veamos que es suave. Puesto que la multiplicación de matrices por vectores

$$\begin{aligned}\kappa: \mathbb{R}^n \times GL_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (v, A) &\mapsto Av\end{aligned}$$

es suave y el diagrama

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^n \\ 1 \times \gamma \downarrow & \nearrow \kappa & \\ \mathbb{R}^n \times GL_n(\mathbb{R}) & & \end{array}$$

conmuta, entonces φ igual lo es.

Cada mapeo descrito por $\varphi_t(v) = \gamma(t)v$ es un isomorfismo porque $\gamma(t) \in GL_n(\mathbb{R})$. Adicionalmente, los incisos b) y c) son ciertos ya que

$$\varphi_0(v) = \gamma(0)v = v, \quad \varphi_1(e_i) = \gamma(1)e_i = v_{\sigma(i)}.$$

Ahora mostremos la veracidad del último inciso. Puesto que

$$\varphi(0, t) = \gamma(t)0 = 0 \in U$$

para cada $t \in \mathbb{I}$, entonces $\varphi^{-1}(U)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{I}$ que contiene a $\{0\} \times \mathbb{I}$. Por el lema del tubo, existe una vecindad N de $0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\{0\} \times \mathbb{I} \subseteq N \times \mathbb{I} \subseteq \varphi^{-1}(U).$$

De la última contención de conjuntos se sigue que si x pertenece a N , necesariamente $\varphi(x, 0) = x \in U$, esto es, $N \subseteq U$. Similarmente se muestra que $\varphi_t(N) \subseteq U$ para todo $t \in \mathbb{I}$, como se deseaba. $\square$

Las Definiciones 4.2.21, 4.2.23 y los Lemas 4.2.22, 4.2.24 serán utilizados en la demostración de la Proposición 4.2.25.

Definición 4.2.21. Sean M y V variedades suaves. Una *isotopía* de V en M es un mapeo suave $F: V \times \mathbb{I} \rightarrow M$ tal que para todo $t \in \mathbb{I}$, el mapeo

$$F_t: V \rightarrow M, \quad x \mapsto F(x, t),$$

es un encaje. Además, al mapeo

$$\begin{aligned}\widehat{F}: V \times \mathbb{I} &\rightarrow M \times \mathbb{I} \\ (x, t) &\mapsto (F_t(x), t),\end{aligned}$$

lo llamaremos el *rastro* (en la literatura se le conoce como “track”) de F .

Lema 4.2.22. *Sea $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ el mapeo suave del Lema 4.2.20. Entonces el rastro $\widehat{\varphi}$ de φ es un homeomorfismo.*

Demostración. La continuidad de la función

$$\begin{aligned}\delta: \mathbb{I} &\rightarrow \mathbb{I} \times \mathbb{I} \\ t &\mapsto (t, t)\end{aligned}$$

nos asegura la de $\widehat{\varphi}$, ya que es la composición

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{I} \xrightarrow{1 \times \delta} \mathbb{R}^n \times \mathbb{I} \times \mathbb{I} \xrightarrow{\varphi \times 1_{\mathbb{I}}} \mathbb{R}^n \times \mathbb{I}.$$

Una inspección rápida nos dice que la función

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n \times \mathbb{I} &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{I} \\ (v, t) &\mapsto (\gamma(t)^{-1}v, t)\end{aligned}$$

es la inversa de $\widehat{\varphi}$ y es continua, ya que la operación para obtener inversos $A \mapsto A^{-1}$ en $GL_n(\mathbb{R})$ es continua. Así, $\widehat{\varphi}$ es un homeomorfismo. $\square$

Definición 4.2.23. Sea M una variedad suave. Una *difeotopía* de M es una isotopía $F: M \times \mathbb{I} \rightarrow M$ de M en M verificando que cualquier F_t es un difeomorfismo.

De acuerdo con [Hir76, p. 180], una forma de extender una isotopía a una difeotopía es la siguiente:

Lema 4.2.24. *Sean M una variedad suave, U un abierto de M y $A \subseteq U$ un conjunto compacto. Si $F: U \times \mathbb{I} \rightarrow M$ es una isotopía de U en M tal que la imagen $\widehat{F}(U \times \mathbb{I})$ del rastro de F es abierta en $M \times \mathbb{I}$, entonces existe una difeotopía de M que coincide con F en una vecindad de $A \times \mathbb{I}$.*

Ahora es posible demostrar lo que queríamos. La idea es transferir las propiedades anteriores al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ mediante un isomorfismo lineal y luego crear una isotopía con un mapeo similar al isomorfismo hallado en la Proposición 4.2.17.

Proposición 4.2.25. *Sean $\mathcal{U} \in \Lambda(G)$ y $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$ isomorfismos lineales. Entonces existen abiertos admisibles $\mathcal{V}, \mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ de G tales que*

$$(G, d\mathcal{V}_f) \cong (G, d\mathcal{W}_g)$$

como espacios dirigidos.

Demostración. Primero, consideremos la base estándar $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ y definamos

$$v_i = f^{-1}g(e_i).$$

Podemos hallar un mapeo suave

$$\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

y una permutación $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ que verifican las propiedades del Lema 4.2.20. Sea ψ la composición

$$\mathfrak{g} \times \mathbb{I} \xrightarrow{f^{-1} \times 1_{\mathbb{I}}} \mathbb{R}^n \times \mathbb{I} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathfrak{g}.$$

Puesto que cualquier isomorfismo lineal $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$ es también difeomorfismo, entonces ψ es suave. Similarmente, los mapeos

$$\psi_t = f\varphi_t f^{-1}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

son difeomorfismos lineales, $\psi_0 = f\varphi_0 f^{-1} = 1_{\mathfrak{g}}$ y

$$\psi_1 f(e_i) = f\varphi_1(e_i) = f(v_{\sigma(i)}) = g(e_{\sigma(i)}) = g\hat{\sigma}(e_i),$$

donde $\hat{\sigma}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la transformación lineal descrita por $e_i \mapsto e_{\sigma(i)}$. Lo anterior se traduce en que $\psi_1 = g\hat{\sigma}f^{-1}$.

Ahora, sea $\mathfrak{U}$ la vecindad del cero en $\mathfrak{g}$ con el cual $\exp|_{\mathfrak{U}}: \mathfrak{U} \rightarrow \mathcal{U}$ es difeomorfismo. Denotemos $U = f^{-1}(\mathfrak{U})$, el cual es un abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene al cero. Luego, podemos encontrar una vecindad del cero $N \subseteq U$ tal que $\varphi_t(N) \subseteq U$ para todo $t \in \mathbb{I}$. Si definimos $\mathfrak{N} = f(N)$ se satisface que

$$\psi_t(\mathfrak{N}) = f\varphi_t f^{-1}(\mathfrak{N}) = f\varphi_t(N) \subseteq f(U) = \mathfrak{U}$$

para todo $t \in \mathbb{I}$. Particularmente, $\mathfrak{N} = \psi_0(\mathfrak{N}) \subseteq \mathfrak{U}$. Adicionalmente, $\mathfrak{N}$ es abierto en $\mathfrak{g}$ porque f es homeomorfismo, y claramente contiene al cero.

Podemos suponer que si $A \in \mathfrak{N}$, entonces $-A \in \mathfrak{N}$; si $\mathfrak{N}$ no cumpliera esta propiedad, es posible forzarla al reemplazarla por

$$\mathfrak{N} \cap \{-A \mid A \in \mathfrak{N}\},$$

el cual sigue siendo abierto porque la operación de inversos $A \mapsto -A$ en $\mathfrak{g}$ es continua y el conjunto de la derecha es justamente la preimagen de $\mathfrak{N}$ bajo esa operación.

Después, llamemos $\mathcal{N} = \exp(\mathfrak{N})$. Notemos que $\mathcal{N}$ es abierto en $\mathcal{U}$, pues $\exp|_{\mathfrak{U}}: \mathfrak{U} \rightarrow \mathcal{U}$ es homeomorfismo y $\mathfrak{N}$ es abierto en $\mathfrak{U}$. Más aún, el párrafo anterior nos justifica que $\mathcal{N}$ es admisible en G .

Definamos

$$F: \mathcal{N} \times \mathbb{I} \rightarrow G$$

como la composición

$$\mathcal{N} \times \mathbb{I} \xrightarrow{\log \times 1_{\mathbb{I}}} \mathfrak{N} \times \mathbb{I} \hookrightarrow \mathfrak{g} \times \mathbb{I} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{g} \xrightarrow{\exp} G.$$

Cada mapeo

$$\begin{aligned} F_t: \mathcal{N} &\rightarrow G \\ z &\mapsto F(z, t) \end{aligned}$$

es un encaje porque es lo mismo que la composición

$$\mathcal{N} \xrightarrow{\log} \mathfrak{N} \xrightarrow{\psi_t} \psi_t(\mathfrak{N}) \xrightarrow{\exp|} \exp \psi_t(\mathfrak{N}) \xrightarrow{\iota_t} G$$

y hemos tomado a $\mathfrak{N}$ con la característica de que $\psi_t(\mathfrak{N}) \subseteq \mathfrak{U}$ donde el mapeo exponencial es inyectivo. Además, para cualquier $z \in \mathcal{N}$, la diferencial de F_t en z es

$$d(F_t)_z = d(\iota_t)_{z_3} \circ d(\exp|)_{z_2} \circ d(\psi_t)_{z_1} \circ d\log_z,$$

cuyas componentes son inyectivas porque las diferenciales de los difeomorfismos y de inclusiones son inyectivas en cualquier punto de su dominio. Aquí, z_1 , z_2 y z_3 son las respectivas imágenes de z ; también se está abusando de la notación al poner ψ_t en la diferencial, pues debería ser la restricción de ψ_t en $\mathfrak{N}$, pero esto no afecta el argumento porque sigue siendo difeomorfismo.

En especial,

$$F_0 = \iota_0 \circ \exp| \circ \psi_0 \circ \log = \iota_0 \circ \exp| \circ \log = \iota_0$$

es la inclusión de $\mathcal{N}$ en G ; esto es, F es una isotopía de $\mathcal{N}$ en G . Similarmente,

$$F_1 = \iota_1 \circ \exp| \circ \psi_1 \circ \log = \iota_1 \circ \exp| \circ g\hat{\sigma}f^{-1} \circ \log.$$

Del Lema 4.2.22, la función

$$\begin{aligned} \hat{\psi}: \mathfrak{g} \times \mathbb{I} &\rightarrow \mathfrak{g} \times \mathbb{I} \\ (A, t) &\mapsto (\psi_t(A), t) \end{aligned}$$

es homeomorfismo gracias a que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\hat{\psi}} & \mathfrak{g} \times \mathbb{I} \\ f^{-1} \times 1_{\mathbb{I}} \downarrow & & \uparrow f \times 1_{\mathbb{I}} \\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{I} \end{array}$$

conmuta. Se sigue que $\widehat{\psi}(\mathfrak{N} \times \mathbb{I})$ es abierto en $\mathfrak{g} \times \mathbb{I}$; de hecho, es abierto en $\mathfrak{U} \times \mathbb{I}$ pues

$$\widehat{\psi}(\mathfrak{N} \times \mathbb{I}) = \bigcup_{t \in \mathbb{I}} (\psi_t(\mathfrak{N}) \times \{t\}) \subseteq \bigcup_{t \in \mathbb{I}} (\mathfrak{U} \times \{t\}) = \mathfrak{U} \times \mathbb{I}.$$

En consecuencia, el rastro $\widehat{F}$ de F , el cual está descrito por

$$\begin{aligned} \widehat{F}: \mathcal{N} \times \mathbb{I} &\rightarrow G \times \mathbb{I} \\ (z, t) &\mapsto (F(z, t), t), \end{aligned}$$

satisface que $\widehat{F}(\mathcal{N} \times \mathbb{I})$ es abierto en $\mathcal{U} \times \mathbb{I}$ por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N} \times \mathbb{I} & \xrightarrow{\widehat{F}} & \mathcal{U} \times \mathbb{I} \\ \log \times 1_{\mathbb{I}} \downarrow & & \uparrow \exp| \times 1_{\mathbb{I}} \\ \mathfrak{N} \times \mathbb{I} & \xrightarrow[\widehat{\psi}]{} & \widehat{\psi}(\mathfrak{N} \times \mathbb{I}) \subseteq \mathfrak{U} \times \mathbb{I} \end{array}$$

y porque las flechas verticales y la inferior son homeomorfismos. Por tanto, $\widehat{F}(\mathcal{N} \times \mathbb{I})$ es abierto en $G \times \mathbb{I}$.

Del Lema 4.2.24, existe una difeotopía

$$H: G \times \mathbb{I} \rightarrow G$$

que coincide con F en una vecindad de $\{1\} \times \mathbb{I}$. Es decir, los mapeos

$$\begin{aligned} H_t: G &\rightarrow G \\ z &\mapsto H(z, t) \end{aligned}$$

son difeomorfismos y en particular podemos encontrar un abierto $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{N}$ que contiene a $1 \in G$ tal que

$$H_1(z) = F_1(z) = \exp \circ g\widehat{\sigma}f^{-1} \circ \log(z)$$

para todo $z \in \mathcal{V}$. De acuerdo con la Observación 4.2.2, podemos considerar que $\mathcal{V}$ es admisible en G , y si llamamos $\mathcal{W}$ a la imagen $H_1(\mathcal{V})$, es sencillo convencerse de que igualmente está en $\Lambda(G)$. En efecto, $\mathcal{W}$ es una vecindad de la identidad porque $1 \in \mathcal{V}$ y

$$\begin{aligned} H_1(1) &= \exp \circ g\widehat{\sigma}f^{-1} \circ \log(1) \\ &= \exp \circ g\widehat{\sigma}f^{-1}(0) \\ &= \exp(0) \\ &= 1, \end{aligned}$$

el mapeo exponencial se restringe a un difeomorfismo $\exp^{-1}(\mathcal{W}) \rightarrow \mathcal{W}$ pues el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\exp^{-1}(\mathcal{W}) & \xrightarrow{\exp} & \mathcal{W} \\
f\hat{\sigma}^{-1}g^{-1} \downarrow & & \uparrow H_1 \\
\exp^{-1}(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\exp} & \mathcal{V}
\end{array}$$

es conmutativo, y por último, $\mathcal{W}$ es cerrado bajo inversos ya que

$$\begin{aligned}
H_1(z^{-1}) &= \exp \circ g\hat{\sigma}f^{-1} \circ \log(z^{-1}) \\
&= \exp \circ g\hat{\sigma}f^{-1}(-\log(z)) \\
&= \exp(-g\hat{\sigma}f^{-1} \circ \log(z)) \\
&= (\exp \circ g\hat{\sigma}f^{-1} \circ \log(z))^{-1} \\
&= H_1(z)^{-1}
\end{aligned}$$

para todo $z \in \mathcal{V}$. Luego el mapeo

$$H_1: (G, d\mathcal{V}_f) \rightarrow (G, d\mathcal{W}_{g\hat{\sigma}})$$

es un homeomorfismo dirigido pues envía caminos dirigidos localmente en $(\mathcal{V}, \mathfrak{d}_f)$ a caminos dirigidos localmente en $(\mathcal{W}, \mathfrak{d}_{g\hat{\sigma}})$. Análogamente, su inversa también es dirigida, concluyendo que H_1 es un isomorfismo de espacios dirigidos y puesto que $d\mathcal{W}_{g\hat{\sigma}} = d\mathcal{W}_g$, la proposición es cierta. $\square$

Sin embargo, no se conoce explícitamente el mapeo H_1 y eso nos imposibilita extender el resultado a un isomorfismo con las estructuras propagadas

$$(G, dG_f^{\mathcal{V}}) \rightarrow (G, dG_f^{\mathcal{W}}).$$

La siguiente proposición nos especifica una condición suficiente para tener un isomorfismo de esa forma.

Proposición 4.2.26. Sean $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$ isomorfismos lineales. Si

$$H: (G, d\mathcal{U}_f) \rightarrow (G, d\mathcal{V}_g)$$

es un isomorfismo de espacios dirigidos y homomorfismo de grupos, entonces también es isomorfismo con las d -estructuras propagadas $dG_f^{\mathcal{U}}$ y $dG_g^{\mathcal{V}}$.

Demostración. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ caminos de $d\mathcal{U}_f$. Luego, al denotar $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_m$, se cumple que

$$H(\alpha) = H(\alpha_1 \cdots \alpha_m) = (H\alpha_1) \cdots (H\alpha_m) \in dG_g^{\mathcal{V}}$$

porque cada $H\alpha_i$ está en $d\mathcal{V}_g$. Puesto que $dG_f^{\mathcal{U}}$ consta de concatenaciones finitas de productos de caminos en $d\mathcal{U}_f$, entonces

$$H: (G, dG_f^{\mathcal{U}}) \rightarrow (G, dG_g^{\mathcal{V}})$$

es dirigido; de igual modo, la inversa de H es dirigida por ser homomorfismo. $\square$

Bajo ciertas condiciones, es posible levantar el isomorfismo lineal $gf^{-1}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ a un homomorfismo $G \rightarrow G$ que conmute con los mapeos exponenciales. De acuerdo con [Lee13, Teorema 20.19]:

Lema 4.2.27. *Sean G, H grupos de Lie y $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ sus álgebras de Lie, respectivamente. Si G es simplemente conexo y $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, existe un único homomorfismo de grupos $\varphi: G \rightarrow H$ tal que $d\varphi = \phi$.*

La parte clave del lema anterior es que el homomorfismo $G \rightarrow H$ es único. Esto nos permite enunciar lo siguiente.

Proposición 4.2.28. *Sean G un grupo de Lie simplemente conexo, $\mathcal{U}$ un abierto admisible y $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$ isomorfismos lineales. Si $gf^{-1}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, entonces existe un isomorfismo de grupos dirigidos*

$$\varphi: (G, dG_f^{\mathcal{U}}) \rightarrow (G, dG_g^{\mathcal{V}})$$

para algún $\mathcal{V} \in \Lambda(G)$.

Demostración. Sean $\varphi, \psi: G \rightarrow G$ los homomorfismos de grupos con $d\varphi = gf^{-1}$ y $d\psi = fg^{-1}$. De la identidad

$$d(\varphi\psi) = d\varphi \circ d\psi = gf^{-1}fg^{-1} = 1_{\mathfrak{g}},$$

se deduce que $\varphi\psi$ es la identidad de G , pues $1_G: G \rightarrow G$ es el único homomorfismo tal que $d(1_G) = 1_{\mathfrak{g}}$. Análogamente, $\psi\varphi = 1_G$.

Llamemos $\mathcal{V} = \varphi(\mathcal{U})$ y mostremos que es admisible. Es claro que $\mathcal{V}$ contiene al elemento identidad de G y que es cerrado bajo inversos pues φ es homomorfismo y $\mathcal{U}$ tiene esas propiedades. Sea $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{g}$ la vecindad del cero con la cual $\exp|_{\mathfrak{U}}: \mathfrak{U} \rightarrow \mathcal{U}$ es difeomorfismo. Por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{gf^{-1}} & \mathfrak{g} \end{array}$$

se sabe que al restringir el mapeo exponencial a $gf^{-1}(\mathfrak{U}) \rightarrow \mathcal{V}$ es homeomorfismo, ya que es la composición de las restricciones

$$gf^{-1}(\mathfrak{U}) \xrightarrow{fg^{-1}} \mathfrak{U} \xrightarrow{\exp} \mathcal{U} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{V}.$$

Por esa misma razón, los mapeos

$$\varphi: (G, d\mathcal{U}_f) \rightarrow (G, d\mathcal{V}_g), \quad \psi: (G, d\mathcal{V}_g) \rightarrow (G, d\mathcal{U}_f),$$

son dirigidos. De la proposición anterior obtenemos que

$$\varphi: (G, dG_f^{\mathcal{U}}) \rightarrow (G, dG_g^{\mathcal{V}})$$

es un isomorfismo de grupos dirigidos. $\square$

Observación 4.2.29. Notemos que el homomorfismo φ envía abiertos admisibles en abiertos admisibles. De forma totalmente análoga se prueba que su inversa igual tiene esa propiedad.

Con las condiciones previas, se logra que φ sea un isomorfismo con las estructuras dirigidas dG_f y dG_g , que ya no dependen de la elección del abierto admisible.

Proposición 4.2.30. Sean G un grupo de Lie simplemente conexo y $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$ isomorfismos lineales. Si $gf^{-1}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, hay un isomorfismo

$$\varphi: (G, dG_f) \rightarrow (G, dG_g)$$

de grupos dirigidos.

Demostración. Recordemos que

$$dG_f = \bigcap_{\mathcal{U} \in \Lambda(G)} dG_f^{\mathcal{U}}, \quad dG_g = \bigcap_{\mathcal{V} \in \Lambda(G)} dG_g^{\mathcal{V}}.$$

Por la Proposición 4.2.28, existe un isomorfismo de grupos $\varphi: G \rightarrow G$ con la característica de que para cada $\mathcal{U} \in \Lambda(G)$, el mapeo

$$\varphi: (G, dG_f^{\mathcal{U}}) \rightarrow (G, dG_g^{\varphi(\mathcal{U})})$$

es dirigido, y su inversa $\varphi^{-1}: (G, dG_g^{\varphi(\mathcal{U})}) \rightarrow (G, dG_f^{\mathcal{U}})$ también. A su vez, todo abierto admisible en G es de la forma $\varphi(\mathcal{U})$ con $\mathcal{U} \in \Lambda(G)$ porque la inversa de φ envía abiertos admisibles en abiertos admisibles: si $\mathcal{V} \in \Lambda(G)$, entonces $\mathcal{V} = \varphi\varphi^{-1}(\mathcal{V})$ con $\varphi^{-1}(\mathcal{V}) \in \Lambda(G)$. Por tanto

$$dG_g = \bigcap_{\mathcal{U} \in \Lambda(G)} dG_g^{\varphi(\mathcal{U})},$$

lo cual es suficiente para asegurar que $\varphi: (G, dG_f) \rightarrow (G, dG_g)$ es un isomorfismo de grupos dirigidos. $\square$

4.3. Consecuencias y trabajo futuro

En esta sección abordaremos un par de consecuencias de la construcción de grupos dirigidos que se hizo en la sección anterior. Se hará énfasis en el grupo especial unitario por la relación que guarda con las esferas, que fue la motivación inicial de este capítulo.

Siendo congruentes con el último párrafo, notemos que podemos aplicar la Proposición 4.2.30 con SU_n .

Proposición 4.3.1. Sea $f: \mathbb{R}^{n^2-1} \rightarrow \mathfrak{su}_n$ un isomorfismo lineal. Entonces al definir

$$\begin{aligned} f': \mathbb{R}^{n^2-1} &\rightarrow \mathfrak{su}_n \\ v &\mapsto gf(v)g^{-1} \end{aligned}$$

con $g \in SU_n$ se satisface que

$$(SU_n, d(SU_n)_f) \cong (SU_n, d(SU_n)_{f'})$$

como espacios dirigidos.

Demostración. Recordemos que el álgebra de Lie $\mathfrak{su}_n$ de SU_n consta de las matrices $n \times n$ antihermitianas de traza cero, equipada con el corchete conmutador. Para cualquier $g \in SU_n$ la función f' está bien definida en su codominio porque dada una matriz $A \in \mathfrak{su}_n$, se tiene que

$$(gAg^{-1})^* = (g^{-1})^* A^* g^* = g(-A)g^{-1} = -gAg^{-1}.$$

Puesto que la traza es invariante al cambiar el orden del producto de matrices, entonces

$$\text{tr}(gAg^{-1}) = \text{tr}(g^{-1}gA) = \text{tr}(A) = 0.$$

Por otra parte, es sencillo comprobar que f' es un isomorfismo lineal, y a su vez, la composición $h = f'f^{-1}: \mathfrak{su}_n \rightarrow \mathfrak{su}_n$ está dada por $A \mapsto gAg^{-1}$, de modo que

$$\begin{aligned} h([A, B]) &= g(AB - BA)g^{-1} \\ &= gABg^{-1} - gBAg^{-1} \\ &= h(A)h(B) - h(B)h(A) \\ &= [h(A), h(B)]. \end{aligned}$$

Esto significa que $h = f'f^{-1}$ es un isomorfismo de álgebras de Lie, por lo cual

$$(SU_n, d(SU_n)_f) \cong (SU_n, d(SU_n)_{f'})$$

como grupos dirigidos. □

De hecho, este resultado puede replicarse en cualquier grupo de Lie G mediante la acción adjunta de G en $\mathfrak{g}$ descrita por

$$\begin{aligned} \text{ad}: G \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ (g, x) &\mapsto dc_g(x), \end{aligned}$$

donde $c_g: G \rightarrow G$ es el mapeo $h \mapsto ghg^{-1}$ y $dc_g: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es su diferencial en el elemento identidad de G . Lo importante a rescatar de esta acción es que dc_g es un isomorfismo de álgebras de Lie pues c_g es un isomorfismo de grupos de Lie. Por tanto, para cada

isomorfismo lineal $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{g}$ y $g \in G$, se tiene que

$$(G, dG_f) \cong (G, dG_{f'}),$$

con $f' = dc_g \circ f$. En cuanto a SU_n , el mapeo $dc_g: \mathfrak{su}_n \rightarrow \mathfrak{su}_n$ es precisamente aquel descrito por $A \mapsto gAg^{-1}$.

Ahora hablaremos sobre la relación que tienen los grupos dirigidos creados en este capítulo y $\uparrow \mathbb{R}^m$.

Proposición 4.3.2. *Sean $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{g}$ un isomorfismo lineal y $\mathcal{U} \in \Lambda(G)$. Entonces el subespacio dirigido $(\mathcal{U}, d\mathcal{U}_f^*)$ de $(G, d\mathcal{U}_f)$ es isomorfo a un subespacio dirigido de $\uparrow \mathbb{R}^m$.*

Demostración. Sean $\mathfrak{U} = \exp^{-1}(\mathcal{U})$ y $U = f^{-1}(\mathfrak{U})$. Denotemos (U, dU) al subespacio dirigido de $\mathbb{R}^m$. La composición

$$(U, dU) \xrightarrow{f} (\mathfrak{U}, \mathfrak{d}_f^*) \xrightarrow{\exp} (\mathcal{U}, d\mathcal{U}_f^*)$$

es un isomorfismo de espacios dirigidos porque $\alpha \in \mathfrak{d}_f^*$ si y solo si $f^{-1}\alpha \in dU$, mientras que $a \in d\mathcal{U}_f^*$ si y solamente si $\log a \in \mathfrak{d}_f^*$. $\square$

Observación 4.3.3. Lo anterior nos muestra que $(G, d\mathcal{U}_f)$ y $\mathbb{R}^m$ son espacios dirigidos localmente isomorfos, pues tanto $\mathcal{U}$ como U son abiertos de G y $\mathbb{R}^m$, respectivamente.

Notemos que al propagar la estructura dirigida $d\mathcal{U}_f$ para forzar que se obtenga un grupo dirigido como se hizo en la Definición 4.2.6 se podrían estar añadiendo caminos que no estaban en la estructura original. Esto sucede con SU_n bajo ciertas condiciones.

Proposición 4.3.4. *Sean $G = SU_n$, $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{su}_n$ un isomorfismo lineal y $\mathcal{U}$ un abierto admisible de G . Si $\theta \neq 0$ y la matriz diagonal*

$$A = \text{diag}(i, 0, \dots, 0, -i) \in \mathfrak{su}_n$$

puede escribirse de la forma

$$A = \sum_{j=1}^m x_j f(e_j)$$

con $x_j \geq 0$, entonces (G, dG_f) y $\uparrow \mathbb{R}^{n^2-1}$ no pueden ser espacios dirigidos localmente isomorfos.

Demostración. Mostremos que cualquier abierto de G con la estructura de subespacio dirigido contiene caminos reversibles no constantes. Sean $\mathcal{V} \subseteq G$ una vecindad del elemento identidad y $(\mathcal{V}, d\mathcal{V})$ el subespacio dirigido de (G, dG_f) . De acuerdo con la demostración del inciso c) de la Proposición 4.2.13, podemos hallar $\varepsilon > 0$ lo

suficientemente pequeño para que el camino

$$\alpha(t) = \exp(t\varepsilon A) = \exp(\text{diag}(i\varepsilon t, 0, \dots, 0, -i\varepsilon t)) = \begin{pmatrix} e^{i\varepsilon t} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{-i\varepsilon t} \end{pmatrix}$$

esté en $d\mathcal{V}$. Luego, consideremos la matriz de $n \times n$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \delta \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es δ o $-\delta$, así que podemos elegir $\delta = 1$, o bien, $\delta = -1$ para garantizar que $\det B = 1$. Además, no es difícil convencerse de que la matriz B es unitaria. Puesto que

$$B\alpha(t)B^* = \begin{pmatrix} \delta^2 e^{-i\varepsilon t} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{i\varepsilon t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varepsilon t} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{-i\varepsilon t} \end{pmatrix}^{-1}$$

entonces $\alpha^{-1} = B\alpha B^* \in d\mathcal{V}$ al considerar a las matrices B y B^* como caminos constantes. Similarmente, el camino $\alpha(1)\alpha^{-1}$ pertenece a $d\mathcal{V}$, pero este coincide con αr porque

$$\begin{aligned} \alpha(1)\alpha^{-1}(t) &= \text{diag}(e^{i\varepsilon}, 1, \dots, 1, e^{-i\varepsilon}) \text{diag}(e^{-i\varepsilon t}, 1, \dots, 1, e^{i\varepsilon t}) \\ &= \text{diag}(e^{i\varepsilon(1-t)}, 1, \dots, 1, e^{-i\varepsilon(1-t)}) = \alpha(1-t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, α es un camino reversible no constante en $(\mathcal{V}, d\mathcal{V})$.

Notemos que iniciamos la demostración asumiendo que $\mathcal{V} \subseteq G$ es una vecindad del elemento identidad, pero un abierto arbitrario de G no necesariamente cumple esa condición. Por suerte, aún en ese caso es posible verificar el enunciado de la proposición ya que todo grupo dirigido es homogéneo. En efecto, sean $\mathcal{U} \subseteq G$ un abierto arbitrario y $(\mathcal{U}, d\mathcal{U})$ el subespacio dirigido de (G, dG_f) . Elijamos $g \in G$, de modo que $\mathcal{V} = g^{-1}\mathcal{U}$ sea una vecindad del elemento identidad. Recordemos que

$$L_g: (G, dG_f) \rightarrow (G, dG_f)$$

es un isomorfismo de espacios dirigidos, y por tanto se restringe a un isomorfismo de

la forma $(\mathcal{V}, d\mathcal{V}) \rightarrow (\mathcal{U}, d\mathcal{U})$. Puesto que existe un camino reversible no constante $\alpha \in d\mathcal{V}$, entonces $L_g\alpha = g\alpha$ es un camino reversible no constante de $d\mathcal{U}$.

En conclusión, es imposible que (G, dG_f) y $\uparrow\mathbb{R}^{n^2-1}$ sean espacios dirigidos localmente isomorfos porque este último no posee ningún camino reversible no constante. $\square$

En este sentido, con esta construcción se ha perdido una propiedad característica de los grupos de Lie (y en general, de las variedades): que son espacios localmente isomorfos a algún $\mathbb{R}^m$. En nuestro caso, podría suceder que (G, dG_f) no sea un espacio dirigido localmente isomorfo a $\uparrow\mathbb{R}^m$, como ya hemos visto.

Por último, se hará una breve mención de una propiedad la cual se sospecha que sea comprobable. Esta propiedad puede marcar una diferencia importante en el valor de la construcción hecha en este capítulo: si la estructura dG_f tuviera todos los caminos, el proceso para crear al grupo dirigido (G, dG_f) es trivial.

Conjetura. Sean G un grupo de Lie de dimensión finita y positiva, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{g}$ un isomorfismo lineal. Entonces dG_f no coincide con la d -estructura natural de G . Es decir, existen caminos $\mathbb{I} \rightarrow G$ que no están en dG_f .

La dificultad del problema yace en que la estructura dirigida dG_f no tiene una descripción clave que permita distinguir a los caminos que posee y a los que no. El autor tiene un trabajo en progreso para probar esta conjetura, pero está en un estado aún muy preliminar para comentar nada al respecto en esta tesis.

Bibliografía

- [BBL24] Henning Basold, Peter Bruin, and Dominique Lawson, *The directed Van Kampen theorem in lean*, 15th International Conference on Interactive Theorem Proving, LIPIcs. Leibniz Int. Proc. Inform., vol. 309, Schloss Dagstuhl. Leibniz-Zent. Inform., Wadern, 2024, pp. Art. No. 8, 18. MR 4802251
- [Bub09] Peter Bubenik, *Models and van Kampen theorems for directed homotopy theory*, Homology Homotopy Appl. **11** (2009), no. 1, 185–202. MR 2506132
- [FGH⁺16] Lisbeth Fajstrup, Eric Goubault, Emmanuel Haucourt, Samuel Mimram, and Martin Raussen, *Directed algebraic topology and concurrency*, Springer, [Cham], 2016, With a foreword by Maurice Herlihy. MR 3445318
- [FRGH04] L. Fajstrup, M. Raussen, E. Goubault, and E. Haucourt, *Components of the fundamental category*, vol. 12, 2004, Homotopy theory, pp. 81–108. MR 2057412
- [GH07] E. Goubault and E. Haucourt, *Components of the fundamental category. II*, Appl. Categ. Structures **15** (2007), no. 4, 387–414. MR 2350213
- [Gra01a] Marco Grandis, *Directed homotopy theory, I*, Cah. Topol. Géom. Différ. Catég. **44** (2001), no. 4, 281–316. MR 2030049
- [Gra01b] ———, *Higher fundamental functors for simplicial sets*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég. **42** (2001), no. 2, 101–136. MR 1839359
- [Gra02] ———, *Directed homotopy theory, II. Homotopy constructs*, Theory Appl. Categ. **10** (2002), No. 14, 369–391. MR 1921751
- [Gra06] ———, *Modelling fundamental 2-categories for directed homotopy*, Homology Homotopy Appl. **8** (2006), no. 1, 31–70. MR 2205214
- [Gra09] ———, *Directed algebraic topology: Models of non-reversible worlds*, New Mathematical Monographs, Cambridge University Press, 2009.
- [Gra12] ———, *A lax symmetric cubical category associated to a directed space*, Cah. Topol. Géom. Différ. Catég. **53** (2012), no. 2, 115–156. MR 2977665
- [Hir76] Morris W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. No. 33, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976. MR 448362

- [Lee13] John M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer, New York, 2013. MR 2954043
- [Ric20] Birgit Richter, *From categories to homotopy theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2020.
- [Rie16] Emily Riehl, *Category theory in context*, Aurora Dover Modern Math Originals, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016. MR 4727501

Glosario de símbolos

Símbolo	Descripción	Página
Top	La categoría de espacios topológicos	5
$\mathbb{R}$	Recta real	5
$\mathbb{C}$	Números complejos	5
$\mathbb{I}$	Intervalo unitario $[0, 1]$	5
$\mathbb{S}^1$	Círculo unitario	5
$\varprojlim_C F$	Límite del funtor F	7
$\varinjlim_C F$	Colímite del funtor F	7
$C(a, b)$	Conjunto de morfismos $a \rightarrow b$ en la categoría C	9
$GL_n(F)$	Grupo lineal general	10
$SL_n(F)$	Grupo especial lineal	10
U_n	Grupo unitario	10
O_n	Grupo ortogonal	10
SU_n	Grupo especial unitario	11
SO_n	Grupo especial ortogonal	11
$\mathfrak{gl}_n$	Álgebra de Lie de GL_n	12
$\mathfrak{sl}_n(F)$	Álgebra de Lie de $SL_n(F)$	12
$\mathfrak{u}_n$	Álgebra de Lie de U_n	12
$\mathfrak{su}_n$	Álgebra de Lie de SU_n	12
$\mathfrak{o}_n$	Álgebra de Lie de O_n	12
$\exp$	Mapeo exponencial	12
dTop	La categoría de espacios dirigidos	15
$a \cdot b$	Concatenación ordinaria de los caminos a y b	15
(X, dX)	Espacio dirigido	16
$a_1 \mathbin{\cdot}_{t_1} \cdots \mathbin{\cdot}_{t_{n-1}} a_n$	Concatenación no ordinaria de caminos a_i dada por una partición t_i de la unidad	16
$D \dashv U$	Funtores adjuntos	17
$\overline{\bigcup_{j \in J} d_j}$	Cierre bajo concatenaciones finitas	18
$r: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$	Mapeo de reflexión	24
$R: \mathbf{dTop} \rightarrow \mathbf{dTop}$	Funtor reversor	24
X^{op}	Espacio dirigido opuesto al d-espacio X	24
pTop	La categoría de espacios preordenados	25

Símbolo	Descripción	Página
$\partial^-: \{*\} \rightarrow \mathbb{I}$	Cara inferior de $\mathbb{I}$	27
$\partial^+: \{*\} \rightarrow \mathbb{I}$	Cara superior de $\mathbb{I}$	27
$\mathbb{R}_L^2$	Plano con orden lexicográfico	27
$\mathbb{S}^n$	La n -esfera	28
$\uparrow\mathbb{R}$	Recta real dirigida	28
$\uparrow\mathbb{I}$	Intervalo unitario dirigido	28
$\uparrow\mathbb{S}^1$	Círculo dirigido	28
$\uparrow\mathbb{S}^n$	La n -esfera dirigida	29
$\uparrow O^1$	Círculo ordenado	29
ΣX	Suspensión libre de un d-espacio X	32
$\Sigma(X, x)$	Suspensión reducida de un d-espacio X sobre x	34
$e: \uparrow\mathbb{I} \rightarrow \{*\}$	Mapeo de degeneración	44
$I: \mathbf{dTop} \rightarrow \mathbf{dTop}$	Funtor cilindro	44
$\uparrow\Pi X$	La categoría fundamental del espacio dirigido X	46
$\mu: G \times G \rightarrow G$	Mapeo de multiplicación del grupo G	50
$\nu: G \rightarrow G$	Mapeo de obtener inversos en el grupo G	50
$\mathfrak{d}_f$	Estructura dirigida sobre $\mathfrak{g}$ inducida por el mapeo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$	55
$d\mathcal{U}_f$	Estructura dirigida sobre G inducida por el mapeo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$	56
$dG_f^{\mathcal{U}}$	Estructura dirigida propagada de $d\mathcal{U}_f$	57
dG_f	Intersección de las d-estructuras $dG_f^{\mathcal{U}}$	59

La página enumerada es donde ocurre la primera entrada del símbolo.