



Universidad Autónoma de Yucatán

Facultad de Matemáticas

**Morfismos de transfer para categorías transportadoras finitas**

TESIS

Presentada por:  
Arfaxard Sánchez Estrella

en opción al título de:  
Maestro en Ciencias Matemáticas

Asesorado por:  
Dr. José María Cantarero López  
Dr. Javier Arturo Díaz Vargas

Mérida, Yucatán, México  
Octubre de 2017



# Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) porque sin el apoyo otorgado no hubiera podido cursar mis estudios de maestría.

Parcialmente apoyada por el Proyecto de Ciencia Básica SEP-CONACYT 242186. Aspectos homotópicos de grupos compactos de Lie.

A mi familia por su comprensión y apoyo. A mis amigos Duca, Saray, Sharon, Juan José y Abraham por todas sus porras. A mis asesores el Dr. José María Cantarero López y el Dr. Javier Arturo Díaz Vargas por toda su paciencia, los consejos y orientaciones para poder concluir la maestría y esta tesis. Al Dr. Noé Bárcenas Torres por haberse tomado la molestia de revisar esta tesis.

# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>II</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1. Categorías y funtores . . . . .	4
1.2. Funtores adjuntos . . . . .	8
1.3. Límites y colímites . . . . .	11
1.4. Complejos de cadena . . . . .	14
1.5. Extensiones de Kan y sobrecategorías . . . . .	19
1.5.1. Sobrecategorías . . . . .	19
1.5.2. Extensiones de Kan . . . . .	21
<b>2. Cohomología de categorías</b>	<b>31</b>
2.1. Álgebras de categorías . . . . .	31
2.2. Cohomología simplicial de categorías. . . . .	34
2.3. Cohomología de Hochschild . . . . .	42
2.4. G-categorías y categoría transportadora . . . . .	44
<b>3. Transfer en cohomología simplicial</b>	<b>47</b>
3.1. Morfismos de Dwyer-Wilkerson . . . . .	47
3.2. Construcción del transfer . . . . .	52
<b>4. Transfer en cohomología de Hochschild</b>	<b>73</b>
4.1. La categoría de factorización . . . . .	73
4.2. Construcción del transfer . . . . .	78
<b>Bibliografía</b>	<b>85</b>

# Introducción

En [9] se menciona que un transfer es una construcción que toma el lado contrario de un morfismo  $X \rightarrow Y$ . En el mismo artículo se afirma que probablemente el primer “prototipo de transfer” fue definido por Schur en 1902 como una construcción en teoría de grupos. Medio siglo después, el concepto fue trasladado a la topología algebraica como un morfismo del lado contrario en cohomología.

Beno Eckmann le dió el nombre de *transfer* a un homomorfismo  $\tau: H^i(\tilde{X}) \rightarrow H^i(X)$  en cohomología, para un espacio cubriente  $p: \tilde{X} \rightarrow X$ , con fibra finita, cuya composición con el inducido por la proyección en cohomología  $p^*$  es la multiplicación por el número de elementos en la fibra. Esta idea fue ampliada por Becker y Gottlieb para definir un transfer para haces fibrados suaves con fibra compacta y fue usada para demostrar la conjetura de Adams ([1]).

La construcción del transfer para espacios cubrientes se puede encontrar en [8], donde hallamos el siguiente resultado:

**Teorema.** *Sea  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  un espacio cubriente de  $n$  hojas, con  $n$  finito. Existe un homomorfismo en la dirección opuesta  $\tau: C_k(X) \rightarrow C_k(\tilde{X})$ , el cual induce un homomorfismo  $\tau^*: H^k(\tilde{X}, G) \rightarrow H^k(X, G)$ , entre los grupos de cohomología. Este homomorfismo es llamado transfer y cumple  $\tau^*\pi^* = n$  para cualquier grupo abeliano  $G$ .*

Donde  $C_k(X)$  y  $C_k(\tilde{X})$  son los complejos singulares de  $X$  y  $\tilde{X}$ , es decir, los grupos abelianos libres que tienen como base los  $k$  simplejos de  $X$  y  $\tilde{X}$  respectivamente.

Esto se debe a que  $\tau$  asigna a un simplejo singular  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  la suma de los  $n$  levantamientos distintos  $\tilde{\sigma}: \Delta^k \rightarrow \tilde{X}$ , de esta forma, la composición  $\pi_{\#}\tau$  es la multiplicación por  $n$  y por tanto  $\tau^*\pi^* = n$ , donde  $\pi_{\#}: C_k(\tilde{X}) \rightarrow C_k(X)$  es el morfismo de cadenas inducido por  $\pi$  entre los complejos singulares.

La utilidad de este transfer se puede ver en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo.** Sabemos que  $\pi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  es un espacio cubriente de 2 hojas. Por lo anterior, la composición  $\tau^*\pi^* = \cdot 2$ , multiplicación por 2, siendo  $\tau^*$  el transfer. Viendo la composición en un diagrama nos quedaría:

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_3) & \xrightarrow{\cdot 2} & H^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_3) \\ & \searrow \pi^* & \nearrow \tau^* \\ & H^1(\mathbb{S}^2, \mathbb{Z}_3) & \end{array}$$

sin embargo,  $H^1(\mathbb{S}^2, \mathbb{Z}_3) \cong 0$ , así que la composición  $\tau^*\pi^* \equiv 0$  también y la única forma que esto suceda es que  $H^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_3) \cong 0$  porque 2 es invertible en  $\mathbb{Z}_3$ .

En 1976, Becker y Gottlieb construyen en [2] un morfismo de transfer en cohomología teniendo en cuenta un triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E \\ & \searrow p & \nearrow p \\ & B & \end{array}$$

donde  $p: E \rightarrow B$  es una fibración de Hurewicz que tiene como fibra  $F$  un complejo finito y la base  $B$  es un complejo conexo de dimensión finita. La composición de este transfer con el inducido por  $p$  en cohomología es la multiplicación por el número de Lefschetz de la restricción de  $f$  a la fibra  $F$ .

Dwyer y Wilkerson en [5] dan una nueva versión del transfer hecho por Becker y Gottlieb en [2]. En este caso lo hacen para una fibración  $f: E \rightarrow B$  cuya fibra  $F$  es  $\mathbb{F}_p$ -finita. Para este transfer construyen un morfismo  $DW: \mathbb{F}_p \rightarrow C_*$ , donde  $C_*$  es un complejo de cadena no negativo sobre  $\mathbb{F}_p$ . La composición del transfer con el inducido por  $f$  en cohomología es la multiplicación por la característica de Euler de la fibra  $F$ .

Xu en [20] modela combinatoriamente fibraciones por medio de categorías y funtores. Utilizando la teoría de cohomología de categorías y la idea de Dwyer y Wilkerson, obtiene un morfismo de transfer para cohomología simplicial y uno para cohomología de Hochschild. Al componer el transfer en cohomología simplicial con un morfismo de restricción se obtiene la multiplicación por la característica de Euler, al igual que el transfer de Becker y Gottlieb.

En esta tesis se establecen generalizaciones de los resultados de Xu. Más concretamente, se demuestra el siguiente teorema

**Teorema.** *Sea  $C$  una  $G$ -categoría finita cuyo complejo asociado  $\mathbb{C}_*(C)$  es de tipo finito y de dimensión finita y  $F$  un  $G$ -functor de  $C$  a  $C$ . Existen morfismos*

$$\mathrm{Ext}_{kG}^*(M, N) \xrightarrow{\mathrm{res}_C^{M, N}} \mathrm{Ext}_{k(G \rtimes C)}^*(\mathrm{Res}_\pi M, \mathrm{Res}_\pi N) \xrightarrow{\mathrm{tr}_C^{M, N}} \mathrm{Ext}_{kG}^*(M, N)$$

llamados *restricción y transfer respectivamente cuya composición es multiplicación por el número de Lefschetz de  $F$* .

En este caso  $kC$  denota el álgebra de la categoría  $C$ , donde  $k$  es un campo.  $G \rtimes C$  es la categoría transportadora, un caso particular de la construcción de Grothendieck ([19]). Para más detalles, se puede consultar el Capítulo 2. Esta categoría  $G \rtimes C$  es un modelo combinatorio para la construcción de Borel  $EG \times_G |C|$ . Para poder demostrar que la composición de la restricción y el transfer es el número de Lefschetz de  $F$  se demuestra que la restricción está inducida por el morfismo de aumentación  $\epsilon: \mathbb{C}_0(C) \rightarrow k$ .

Además, calculamos de forma explícita el morfismo de transfer para la  $\mathbb{Z}_2$ -categoría

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ x & \xrightarrow{\quad} & y \\ & g & \end{array}$$

También se compara este transfer con el caso cuando  $C$  es el  $G$ -poset  $G/H$  donde  $H$  es un subgrupo de  $G$ .

Para la cohomología de Hochschild se tiene el siguiente resultado

**Teorema.** *Existe un morfismo llamado transfer:*

$$\mathrm{Ext}_{k(G \rtimes C)^e}^*(k(G \rtimes C), k(G \rtimes C)) \xrightarrow{\mathrm{htr}_C} \mathrm{Ext}_{kG^e}^*(kG, kG).$$

Aquí  $kC^e = kC^e \otimes (kC)^{op}$  es el álgebra envolvente de  $kC$ .

Para demostrar estos resultados, seguimos las ideas del artículo [20], aunque hay que mencionar que se corrige la acción que Xu le da a la sobrecategoría  $\pi/\bullet$  pues es necesario que esa acción sea compatible con el isomorfismo  $\mathrm{LK}_\pi B_*^{G \rtimes C} \cong C_*(\pi/\bullet)$ . También corregimos el isomorfismo  $\pi/\bullet \cong (1_{BG}/\bullet) \times C$  para que sea un  $G$ -isomorfismo.

Queda pendiente como trabajo a futuro construir un morfismo transfer

$$\mathrm{Ext}_{k(G \rtimes C)^e}^*(k(G \rtimes C), k(G \rtimes C)^*) \xrightarrow{htr_C} \mathrm{Ext}_{kG^e}^*(kG, (kG)^*).$$

donde  $(kG)^*$  y  $k(G \rtimes C)^*$  denotan los  $k$  duales de  $kG$  y  $k(G \rtimes C)$  respectivamente, pues en este caso ya hay un morfismo de restricción. Esto se necesita si se quiere construir un morfismo de transfer en cohomología cíclica ya que esta teoría de cohomología se define a partir de un bicomplejo donde las columnas del bicomplejo calculan la cohomología de Hochschild con coeficientes en el  $k$  dual.

Esta construcción no es tan fácil de realizar ya que la construcción que realizamos se hace a través del isomorfismo  $\mathrm{Ext}_{kC^e}(kC, kC) \cong \mathrm{Ext}_{F(C)}(k, \mathrm{Res}_{\nabla} kC)$ , donde  $F(C)$  es la categoría de factorizaciones de  $C$  y  $\nabla: F(C) \rightarrow C^e$  es un funtor. Para poder llegar a la cohomología de Hochschild debemos tener morfismos de  $kF(G \rtimes C)$ -módulos  $\mathrm{Res}_{F(\pi)} \mathrm{Res}_{\nabla}(kG)^* \rightarrow \mathrm{Res}_{\nabla}(k(G \rtimes C))^* \rightarrow \mathrm{Res}_{F(\pi)} \mathrm{Res}_{\nabla}(kG)^*$  lo cual no se obtiene de manera obvia.

Esta tesis se compone de 4 capítulos. En el capítulo 1 se encuentra la teoría básica de categorías y funtores y álgebra homológica. El capítulo 2 se centra en las teorías de cohomología para categorías pequeñas que utilizamos, es decir, se estudia cómo se puede calcular la cohomología simplicial y cohomología de Hochschild para una categoría pequeña. En el capítulo 3 se construye el morfismo de transfer para cohomología simplicial, se calcula el transfer con un ejemplo sencillo y se estudia el caso del  $G$ -poset  $G/H$ . Por último, en el capítulo 4 se construye el morfismo de transfer para la cohomología de Hochschild.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se presentan preliminares sobre teoría de categorías y álgebra homológica con el propósito de hacer el documento autocontenido, así como fijar la notación. Las principales referencias que se usaron para este capítulo fueron [15] y [11].

### 1.1. Categorías y funtores

Para evitar confusiones presentamos las definiciones básicas junto con ejemplos para comprenderlas. Las principales definiciones de la Teoría de categorías dependen de la *Teoría de clases* y de la *Teoría de conjuntos*. Pero no nos adentraremos en estos aspectos porque se sale de nuestros propósitos.

**Definición 1.1.1.** Una categoría (localmente pequeña)  $C$  consiste de una clase de objetos  $\text{Obj}(C)$ , junto con un conjunto de morfismos  $\text{Mor}(A, B)$  para cada par de objetos  $A, B \in \text{Obj}(C)$ . El conjunto  $\text{Mor}(A, B)$  es llamado el conjunto de morfismos de  $A$  a  $B$ . La categoría  $C$  también incluye una función llamada composición:

$$\circ: \text{Mor}(B, D) \times \text{Mor}(A, B) \longrightarrow \text{Mor}(A, D)$$

$$(g, f) \longmapsto g \circ f = gf.$$

Finalmente, cada  $\text{Mor}(A, A)$  contiene un elemento distinguido  $1_A$ . Los axiomas que se deben cumplir son:

1. La composición es asociativa. Esto es, si  $f \in \text{Mor}(E, D)$ ,  $g \in \text{Mor}(B, E)$ , y  $h \in \text{Mor}(A, B)$  entonces  $(fg)h = f(gh)$ .
2. Cada  $1_A$  es una identidad. Es decir, si  $f \in \text{Mor}(A, B)$ , entonces  $f = f1_A = 1_B f$ .

**Nota 1.1.2.** Algunos autores requieren una tercera condición:  $\text{Mor}(A, B)$  es disjunto de  $\text{Mor}(D, E)$  a menos que  $A = D$  y  $B = E$ . Sin embargo, esto se puede arreglar pidiendo que un morfismo sea un elemento de  $\{A\} \times \text{Mor}(A, B) \times \{B\}$ . Muchas veces se utiliza, en vez de  $\text{Mor}$ ,  $\text{Hom}$ . Si se quiere enfatizar la categoría, se escribe  $\text{Mor}_C$  u  $\text{Hom}_C$ . Un morfismo  $f \in \text{Mor}(A, B)$ , es generalmente, denotado como  $f: A \rightarrow B$ , o  $A \xrightarrow{f} B$ .

Ahora podemos mencionar unos ejemplos importantes que tal vez nos sean muy familiares.

**Ejemplo 1.1.3.** Los conjuntos y las funciones entre conjuntos con la regla de composición de siempre forman la categoría *Set*.

**Ejemplo 1.1.4.** Los espacios topológicos, junto con las funciones continuas como morfismos y la composición habitual forman la categoría *Top*.

**Ejemplo 1.1.5.**  $R\text{-Mód}$  es la categoría con los  $R$ -módulos izquierdos como objetos, los morfismos son los  $R$ -homomorfismos con la composición de funciones. Y  $R\text{-mód}$  representa la categoría de los  $R$ -módulos izquierdos finitamente generados.

**Ejemplo 1.1.6.**  $Vect_k$  es la categoría de espacios vectoriales sobre  $k$  de dimensión finita, los morfismos en esta categoría son las transformaciones lineales.

La mayoría de estos ejemplos los hemos utilizados sin saber que eran categorías, pero hemos estudiado algunas de sus propiedades que los hacen categorías, por ejemplo los axiomas de la regla de composición o la existencia de las identidades junto con sus propiedades. Siguiendo con los ejemplos, ahora veremos que a partir de una categoría, podemos construir otras.

**Ejemplo 1.1.7.** Si tenemos una categoría  $C$ , definimos la categoría opuesta  $C^{op}$  cuyos objetos son los mismos que  $C$ .  $\text{Mor}_{C^{op}}(A, B)$  lo definimos como el conjunto  $\text{Mor}_C(B, A)$ , siendo más específico un morfismo  $f: B \rightarrow A$  en  $C$  da a lugar a un morfismo  $f^{op}: A \rightarrow B$  en  $C^{op}$ . La regla de composición esta dada por  $f^{op}g^{op} = (gf)^{op}$ . De inmediato podemos ver que los morfismos identidades existen en  $C^{op}$ , y que todos los axiomas se cumplen.

**Ejemplo 1.1.8.** A partir de dos categorías  $C$  y  $D$  podemos construir la categoría  $C \times D$  tomando parejas de objetos  $(A, B) \in \text{Obj}(C) \times \text{Obj}(D)$  y parejas de morfismos  $(f, g): (A, B) \rightarrow (A', B') \in \text{Mor}_C(A, A') \times \text{Mor}_D(B, B')$ , junto con la composición correspondiente en cada entrada. En particular, denotamos  $C^e = C \times C^{op}$  y la llamamos la categoría envolvente de  $C$ .

Se debe prestar atención cuando se trabaja con categorías debido a que están definidas por medio de clases de objetos y clases de morfismos. Como es de esperarse existen ciertas categorías que estas clases no son propias, es decir, son en realidad conjuntos y tal vez conjuntos finitos.

**Definición 1.1.9.** Una categoría  $C$  se dice que es pequeña si  $\text{Obj}(C)$  es un conjunto y se dice finita si los morfismos de la categoría forman un conjunto finito.

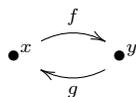
**Definición 1.1.10.** Un morfismo  $\alpha: x \rightarrow y$  es un isomorfismo si existe  $\beta: y \rightarrow x$ , tal que  $\alpha\beta = 1_y$  y  $\beta\alpha = 1_x$ .

Vemos también que empezamos a distinguir entre morfismos con ciertas condiciones.

**Ejemplo 1.1.11.** Si se tiene un grupo  $G$ , este se puede ver como una categoría con un solo objeto  $\bullet$  y cuyos morfismos son los elementos de  $G$ , denotamos esta categoría como  $\beta G$ . La regla de composición está dada por la operación del grupo, de esta manera la composición es asociativa, y el morfismo identidad del objeto  $\bullet$  será la identidad del grupo.

Notemos que en esta categoría todo morfismo es un isomorfismo y si  $G$  es un grupo finito, la categoría  $\beta G$  es finita.

Para ciertas categorías es posible utilizar diagramas para representarlas. Por ejemplo,



se utiliza para una categoría que tiene por objetos  $y$  y  $x$ . Las flechas indican que hay un morfismo  $f: x \rightarrow y$  y otro  $g: y \rightarrow x$ . Aunque no aparecen, los morfismos identidades  $1_x$  y  $1_y$  también existen. Lo que sí hay que especificar son las composiciones no obvias, es decir, qué son  $fg$  y  $gf$ . Una opción es que ambas composiciones sean las identidades respectivas, de esta manera  $f$  y  $g$  son isomorfismos.

Otro concepto que vale la pena mencionar es el de funtor.

**Definición 1.1.12.** Un funtor covariante  $H: C \rightarrow D$  entre categorías  $C$  y  $D$ , le asigna a un objeto  $x$  de  $C$  un objeto  $H(x)$  en  $\text{Obj}(D)$ . A un morfismo  $\alpha: x \rightarrow y$  en  $C$  le asigna un morfismo  $H(\alpha): H(x) \rightarrow H(y)$  en  $D$ . Y cumple

1.  $H(1_x) = 1_{H(x)}$
2. Si  $\alpha, \beta \in \text{Mor}(C)$  y  $\beta\alpha$  existe, entonces  $H(\beta\alpha) = H(\beta)H(\alpha)$ .

Generalmente, la palabra funtor se utiliza para referirse a un funtor covariante. La forma en que representaremos un funtor  $H$  será con un diagrama como el siguiente

$$\begin{array}{ccc}
 H: C & \longrightarrow & D \\
 \\
 x & \longmapsto & H(x) \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 x_1 & & H(x_1) \\
 \alpha \downarrow & \longrightarrow & \downarrow H(\alpha) \\
 x_2 & & H(x_2)
 \end{array}
 \end{array}$$

Esto quiere decir que  $x$  es un objeto y  $\alpha: x_1 \rightarrow x_2$  es un morfismo de  $C$ . Unos ejemplos muy sencillos de funtores son los siguientes.

**Ejemplo 1.1.13.** Tomemos una categoría  $C$  y definamos  $1_C$

$$\begin{array}{ccc}
 1_C: C & \longrightarrow & C \\
 \\
 x & \longmapsto & x \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 x_1 & & 1_C(x_1) = x_1 \\
 \alpha \downarrow & \longrightarrow & \downarrow \alpha \\
 x_2 & & 1_C(x_2) = x_2
 \end{array}
 \end{array}$$

Claramente  $1_C$  es un funtor y se le conoce como el funtor identidad.

**Ejemplo 1.1.14.** Si tenemos un anillo  $R$ , podemos definir el funtor constante  $\underline{R}$ . Este funtor se define de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{R}: C & \longrightarrow & R\text{-mód} \\
 \\
 x & \longmapsto & R \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 x_1 & & R \\
 \alpha \downarrow & \longrightarrow & \downarrow 1_R \\
 x_2 & & R
 \end{array}
 \end{array}$$

Ahora, teniendo los conceptos de categorías y funtores, podemos obtener más ejemplos de categorías y de construcciones sobre categorías.

**Ejemplo 1.1.15.**  $Cat$  es la categoría cuyos objetos son las categorías pequeñas y un morfismo entre dos categorías  $C$  y  $C'$  es un funtor covariante  $H: C \rightarrow C'$ .

Una manera de relacionar dos categorías es mediante funtores. De la misma forma como pasa en muchas estructuras matemáticas que conocemos, entre categorías existe una noción de isomorfismo. Dos categorías  $C$  y  $D$  se dicen isomorfas si existen funtores  $F: C \rightarrow D$  y  $G: D \rightarrow C$  tal que  $F \circ G = 1_D$  y  $G \circ F = 1_C$  y se denota  $C \cong D$ . También entre funtores existen relaciones diferentes a que uno sea inverso del otro y nos sirve para obtener una noción más débil de isomorfismo de categorías.

**Definición 1.1.16.** Sean  $H, E: C \rightarrow D$  dos funtores covariantes. Una transformación natural  $\eta: H \rightarrow E$  de  $H$  a  $E$  asigna a cada objeto  $x$  de  $C$  un morfismo  $\eta_x: H(x) \rightarrow E(x)$  en  $D$ , tal que si  $\alpha: x \rightarrow y$  es un morfismo en  $C$ , el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H(x) & \xrightarrow{\eta_x} & E(x) \\ H(\alpha) \downarrow & & \downarrow E(\alpha) \\ H(y) & \xrightarrow{\eta_y} & E(y) \end{array}$$

conmuta. Si cada  $\eta_x$  es un isomorfismo, se dice que  $\eta$  es una equivalencia natural o isomorfismo natural y se denota como  $H \simeq E$ .

**Ejemplo 1.1.17.** Para todo functor covariante  $H: C \rightarrow D$  existe una transformación natural de  $H$  a  $H$  llamada la transformación identidad. Esta asigna a cada  $x$  en  $\text{Obj}(C)$  el morfismo identidad  $1_{H(x)}: H(x) \rightarrow H(x)$ .

**Definición 1.1.18.** Dos categorías  $C$  y  $D$  se dicen equivalentes si existen dos funtores  $H: C \rightarrow D$  y  $T: D \rightarrow C$  tales que  $H \circ T \simeq 1_D$  y  $T \circ H \simeq 1_C$ . Si dos categorías son equivalentes entonces escribimos  $C \simeq D$ .

Esta es otra manera de establecer una relación entre categorías, es decir, saber si hay un isomorfismo o una equivalencia entre dos categorías aporta información importante de dichas categorías, pero esto no es lo único para lo que nos sirve las transformaciones naturales.

**Ejemplo 1.1.19.** Sea  $C$  una categoría pequeña y  $D$  una categoría. La categoría  $D^C$  es una categoría cuyos objetos son los funtores covariantes  $H: C \rightarrow D$ . Un morfismo de  $H$  a  $E$  es una transformación natural  $\eta: H \rightarrow E$ . La composición entre dos transformaciones naturales  $\eta: H \rightarrow E$  y  $\tau: E \rightarrow K$ , es la transformación natural  $\tau\eta$  que en cada objeto  $x \in \text{Obj}(C)$ , asigna el morfismo  $\tau_x \circ \eta_x$ .

**Definición 1.1.20.** Un esqueleto de una categoría  $C$  es una categoría  $[C]$  cuyos objetos consisten en tomar un objeto en cada clase de isomorfismo de  $C$  y  $\text{Mor}_{[C]}(x, y) = \text{Mor}_C(x, y)$  para todo  $x, y$  en  $\text{Obj}([C])$ .

**Proposición 1.1.21.** Sea  $C$  una categoría. Entonces  $C$  y su esqueleto  $[C]$  son equivalentes.

**Demostración.** Para un objeto  $x$  de  $C$ , denotemos  $x_*$  al objeto que fijamos en la clase de isomorfismo a la que pertenece  $x$ . Además para cada par de objetos  $x, y$  en una clase de isomorfismo también fijaremos un isomorfismo  $\alpha_{xy}: x \rightarrow y$  y su inverso  $\alpha_{yx}: y \rightarrow x$ , cuando tengamos el mismo objeto el isomorfismo fijado será la identidad y de esta manera nuestra notación tiene sentido. Sea

$$\begin{array}{ccc} \Phi: C & \longrightarrow & [C] \\ c & \longmapsto & c_* \\ \begin{array}{ccc} x & & x_* \\ \alpha \downarrow & \longmapsto & \downarrow \alpha_{yy_*} \alpha_{x_*x} \\ y & & y_* \end{array} \end{array}$$

$\Phi$  envía la identidad  $1_x$  de un objeto  $x$  a  $\alpha_{xx_*} 1_x \alpha_{x_*x} = 1_{x_*}$ . También podemos ver que para los morfismos  $\alpha: x \rightarrow y$  y  $\gamma: y \rightarrow z$  en  $C$ ,

$$\Phi(\gamma\alpha) = \alpha_{zz_*} \gamma \alpha_{x_*x}$$

y

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma)\Phi(\alpha) &= (\alpha_{zz_*} \gamma \alpha_{y_*y})(\alpha_{yy_*} \alpha_{x_*x}) \\ &= \alpha_{zz_*} \gamma (\alpha_{y_*y} \alpha_{yy_*}) \alpha_{x_*x} \\ &= \alpha_{zz_*} \gamma \alpha_{x_*x}. \end{aligned}$$

Esto prueba que  $\Phi$  está bien definido como funtor de  $C$  a  $[C]$ . Consideremos  $\Psi: [C] \rightarrow C$  como el funtor inclusión, es decir, todo objeto en  $[C]$  lo envía al mismo en  $C$  y lo mismo para morfismos. Notemos que la composición  $\Phi\Psi$  es la identidad, pues para cada objeto  $x$ ,  $x_*$  está fijo.

Por último, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Psi\Phi(x) = x_* & \xrightarrow{\alpha_{x_*x}} & x \\ \alpha_{yy_*} \alpha_{x_*x} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \Psi\Psi(y) = y_* & \xrightarrow{\alpha_{y_*y}} & y \end{array}$$

conmuta porque  $\alpha_{y_*y} \alpha_{y_*y} = 1_y$ . Con esto tenemos que  $\Psi\Phi \simeq 1_C$  y una equivalencia entre  $C$  y  $[C]$ .  $\square$

## 1.2. Funtores adjuntos

Una motivación descrita por Saunders-Mac Lane en [11] de los funtores adjuntos es la siguiente situación: Dado un conjunto  $X$  y un campo  $k$ , podemos obtener un espacio vectorial  $V_X$  cuya base sea el conjunto  $X$ , es decir, los elementos del espacio vectorial son sumas formales finitas  $\sum_{i=1}^n r_i x_i$ , donde  $x_i \in X$  y  $r_i \in k$ . Entonces podemos definir dos funtores  $V: Set \rightarrow Vct_k$  y  $U: Vct_k \rightarrow Set$ , donde  $Vct_k$  es la categoría de espacios vectoriales, de tal forma que  $V(X) = V_X$  y para una función de conjuntos  $f: X \rightarrow Y$ ,  $V(f)$  es la transformación lineal que definida sobre la base de  $V_X$  envía  $x$  a  $f(x)$ . Por otro lado,  $U$  es el funtor de olvido, es decir, para un espacio vectorial  $W$  se tiene que  $U(W)$  es el conjunto de todos los vectores en  $W$  y para una función lineal  $g: W \rightarrow W'$  el funtor  $U$  envía  $g$  a la función  $g$  entre conjuntos  $U(W)$  y  $U(W')$ . Una función  $h$  de un conjunto  $X$  a  $U(W)$  se extiende de manera única a una transformación lineal  $h': V_X \rightarrow W$  que en un vector  $v = \sum_{i=1}^n r_i x_i$  de  $V_X$ , está definido como  $h'(v) = \sum_{i=1}^n r_i h(x_i)$ . Esto define una asignación  $\varphi: h \mapsto h'$ . Esta asignación tiene una inversa la cual lleva una transformación natural  $T: V_X \rightarrow W$  a la restricción de  $T$  sobre  $X$ . Entonces tenemos un isomorfismo

$$\text{Mor}_{Vct_k}(V(X), W) \cong \text{Mor}_{Set}(X, U(W))$$

el cual es natural en el sentido de que dada una función entre conjuntos  $h: X \rightarrow X'$  y una transformación lineal  $t: W \rightarrow W'$  se tiene que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{Vct_k}(V(X), W) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Mor}_{Set}(X, U(W)) \\ \uparrow V(h)^* & & \uparrow h^* \\ \text{Mor}_{Vct_k}(V(X'), W) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Mor}_{Set}(X', U(W)) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{Vct_k}(V(X), W) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Mor}_{Set}(X, U(W)) \\ \downarrow t_* & & \downarrow U(t)_* \\ \text{Mor}_{Vct_k}(V(X), W') & \xrightarrow{\varphi} & \text{Mor}_{Set}(X, U(W')) \end{array}$$

donde  $()^*$  significa precomponer y  $()_*$  componer, son conmutativos. Estas características son las que definen a dos funtores adjuntos.

**Definición 1.2.1.** Sean  $\Psi: C \rightarrow D$  y  $\Phi: D \rightarrow C$  dos funtores. Se dice que  $\Psi$  y  $\Phi$  son funtores adjuntos, específicamente,  $\Psi$  es adjunto izquierdo de  $\Phi$  y  $\Phi$  es adjunto derecho de  $\Psi$  cuando existe un isomorfismo llamado adjunción

$$\Omega_{A,B}: \text{Mor}_D(\Psi(A), B) \xrightarrow{\cong} \text{Mor}_C(A, \Phi(B))$$

para todo  $A \in \text{Obj}(C)$  y  $B \in \text{Obj}(D)$ , el cual es natural en el sentido de que para todo  $\alpha: A \rightarrow A'$ , el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_D(\Psi(A), B) & \xrightarrow{\cong} & \text{Mor}_C(A, \Phi(B)) \\ \Psi(\alpha)^* \uparrow & & \uparrow \alpha^* \\ \text{Mor}_D(\Psi(A'), B) & \xrightarrow{\cong} & \text{Mor}_C(A', \Phi(B)) \end{array}$$

conmuta y de que si tenemos  $\beta: B \rightarrow B'$  obtenemos un diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_D(\Psi(A), B) & \xrightarrow{\cong} & \text{Mor}_C(A, \Phi(B)) \\ \beta_* \downarrow & & \downarrow \Phi(\beta)_* \\ \text{Mor}_D(\Psi(A), B') & \xrightarrow{\cong} & \text{Mor}_C(A, \Phi(B')) \end{array}$$

conmutativo. En estos diagramas  $\Psi(\alpha)^*$  y  $\alpha^*$  están definidas como la precomposición con  $\Psi(\alpha)$  y  $\alpha$  respectivamente, por ejemplo,  $\Psi(\alpha)^*(f) = f \circ \Psi(\alpha)$ . Mientras que  $\Phi(\beta)_*$  y  $\beta_*$  llevan a la composición con  $\Phi(\beta)$  y  $\beta$  respectivamente.

**Ejemplo 1.2.2.** Un ejemplo importante de funtores adjuntos es el caso del functor  $\text{Hom}$  y el functor tensor  $\otimes$ . En este caso siempre tenemos un isomorfismo

$$\text{Hom}(A \otimes B, C) \cong \text{Hom}(A, \text{Hom}(B, C)).$$

Ahora vamos a obtener otras definiciones a partir de la definición de adjunción.

**Definición 1.2.3.** Consideremos al functor  $\Psi: C \rightarrow D$  como adjunto izquierdo del functor  $\Phi: D \rightarrow C$ , con adjunción  $\Omega$ . Para  $x \in \text{Obj}(C)$  definimos  $\Sigma_x = \Omega(1_{\Psi(x)}): x \rightarrow \Phi\Psi(x)$ , esto es, de la [Definición 1.2.1](#) hacemos  $A = x$  y  $B = \Psi(x)$ . De la misma manera, cuando tenemos  $y \in \text{Obj}(D)$  y ponemos  $B = y$  y  $A = \Phi(y)$ , obtenemos  $\Lambda_y = \Omega^{-1}(1_{\Phi(y)}): \Psi\Phi(y) \rightarrow y$ .

Como  $\Omega$  es natural, tenemos que para objetos  $x$  y  $x'$  en  $C$ , y morfismos  $\alpha: x \rightarrow x'$  el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_D(\Psi(x), \Psi(x)) & \xrightarrow{\Omega} & \text{Mor}_C(x, \Phi\Psi(x)) \\ \Psi(\alpha)_* \downarrow & & \downarrow (\Phi\Psi(\alpha))_* \\ \text{Mor}_D(\Psi(x), \Psi(x')) & \xrightarrow{\Omega} & \text{Mor}_C(x, \Phi\Psi(x')) \end{array}$$

conmuta y por tanto

$$\begin{aligned} \Phi\Psi(\alpha) \circ \Sigma_x &= \Phi\Psi(\alpha) \circ \Omega(1_{\Psi(x)}) \\ &= \Omega(\Psi(\alpha) \circ 1_{\Psi(x)}) \\ &= \Omega(\Psi(\alpha)). \end{aligned}$$

También tenemos la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_D(\Psi(x'), \Psi(x')) & \xrightarrow{\Omega} & \text{Mor}_C(x', \Phi\Psi(x')) \\ \Psi(\alpha)^* \downarrow & & \downarrow \alpha^* \\ \text{Mor}_D(\Psi(x), \Psi(x')) & \xrightarrow{\Omega} & \text{Mor}_C(x, \Phi\Psi(x')) \end{array}$$

Y así,

$$\begin{aligned} \Sigma_{x'} \circ \alpha &= \Omega(1_{\Psi(x')}) \circ \alpha \\ &= \alpha^* \Omega(1_{\Psi(x')}) \\ &= \Omega(1_{\Psi(x')} \circ \Psi(\alpha)) \\ &= \Omega(\Psi(\alpha)). \end{aligned}$$

Esto nos sirve para obtener el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\Sigma_x} & \Phi\Psi(x) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \Phi\Psi(\alpha) \\ x' & \xrightarrow{\Sigma_{x'}} & \Phi\Psi(x') \end{array}$$

y darnos cuenta que los  $\Sigma_x$  nos inducen una transformación natural  $\Sigma: 1_C \rightarrow \Phi\Psi$  la cual es llamada la unidad de la adjunción  $\Omega$ . Análogamente, las  $\Lambda_y$  nos dan una transformación natural  $\Lambda: \Psi\Phi \rightarrow 1_D$  llamada la counidad de la adjunción.

**Proposición 1.2.4.** *Si  $\Psi$  es adjunto izquierdo de  $\Phi$  con adjunción  $\Omega$ , entonces la unidad  $\Sigma$  y counidad  $\Lambda$  nos dan los siguientes diagramas conmutativos de funtores*

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{1_\Psi} & \\ \Psi & \xrightarrow{\Psi\Sigma} \Psi\Phi\Psi & \xrightarrow{\Lambda\Psi} \Psi \\ & \searrow & \swarrow \end{array} \quad y \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{1_\Phi} & \\ \Phi & \xrightarrow{\Sigma\Phi} \Phi\Psi\Phi & \xrightarrow{\Phi\Lambda} \Phi \\ & \searrow & \swarrow \end{array}$$

**Demostración.** Recordemos que para  $x$  en  $\text{Obj}(C)$ , la unidad es un morfismo  $\Sigma_x: x \rightarrow \Phi\Psi(x)$ , así que aplicando el funtor  $\Psi$  obtenemos un morfismo  $\Psi(\Sigma_x): \Psi(x) \rightarrow \Psi\Phi\Psi(x)$  en  $D$ . La counidad nos da un morfismo  $\Lambda_{\Psi(x)}: \Psi\Phi\Psi(x) \rightarrow \Psi(x)$ . Por la propiedad de naturalidad de la adjunción, tenemos la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_D(\Psi\Phi\Psi(x), \Psi(x)) & \xrightarrow{\Omega} & \text{Mor}_C(\Phi\Psi(x), \Phi\Psi(x)) \\ \Psi(\Sigma_x)^* \downarrow & & \downarrow \Sigma_x^* \\ \text{Mor}_D(\Psi(x), \Psi(x)) & \xrightarrow{\Omega} & \text{Mor}_C(x, \Phi\Psi(x)) \end{array}$$

Debido a lo anterior y con las definiciones de unidad y counidad, tenemos que

$$\begin{aligned} \Omega(\Lambda_{\Psi(x)} \circ \Psi(\Sigma_x)) &= \Omega(\Lambda_{\Psi(x)}) \circ \Sigma_x \\ &= \Omega(\Omega^{-1}(1_{\Phi\Psi(x)})) \circ \Sigma_x \\ &= 1_{\Phi\Psi(x)} \circ \Sigma_x \\ &= \Sigma_x \\ &= \Omega(1_{\Psi(x)}). \end{aligned}$$

Recordemos que  $\Omega$  es un isomorfismo natural, entonces  $\Omega_{\Phi\Psi(x), \Psi(x)}$  es un isomorfismo. Se sigue que  $\Lambda_{\Psi(x)} \circ \Psi(\Sigma_x) = 1_{\Psi(x)}$ . Para demostrar la conmutatividad del segundo diagrama se utiliza el mismo método.  $\square$

La unidad y counidad de una adjunción son importantes porque determinan dicha adjunción y precisamente la proposición anterior nos permite dar una caracterización como veremos en el siguiente resultado.

**Teorema 1.2.5.** *Supongamos que tenemos dos funtores  $\Psi: C \rightarrow D$  y  $\Phi: D \rightarrow C$ . Si existen dos transformaciones naturales  $\Sigma: 1_C \rightarrow \Phi\Psi$  y  $\Lambda: \Psi\Phi \rightarrow 1_D$  tales que*

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{1_\Psi} & \\ \Psi & \xrightarrow{\Psi\Sigma} \Psi\Phi\Psi & \xrightarrow{\Lambda\Psi} \Psi \\ & \searrow & \swarrow \end{array} \quad y \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{1_\Phi} & \\ \Phi & \xrightarrow{\Sigma\Phi} \Phi\Psi\Phi & \xrightarrow{\Phi\Lambda} \Phi \\ & \searrow & \swarrow \end{array}$$

conmutan, entonces  $\Psi$  es adjunto izquierdo de  $\Phi$  con la adjunción  $\Omega: \text{Mor}_D(\Psi(x), y) \rightarrow \text{Mor}_C(x, \Phi(y))$  definida por  $\Omega(\varphi) = \Phi(\varphi) \circ \Sigma_x$ , donde  $\Sigma$  y  $\Lambda$  son la unidad y counidad de la adjunción respectivamente.

**Demostración.** Tomemos  $x$  en  $\text{Obj}(C)$ ,  $y$  en  $\text{Obj}(D)$ , morfismos  $\phi: \Psi(x) \rightarrow y$  en  $D$  y  $\phi': x \rightarrow \Phi(y)$  en  $C$ . Primero notemos que  $\Omega_{x,y}$  es un isomorfismo, pues su inverso es  $\Omega_{x,y}^{-1}(\phi') = \Lambda_y \circ \Psi(\phi')$ :

$$\begin{aligned} (\Omega^{-1}\Omega)(\phi) &= \Omega^{-1}(\Phi(\phi) \circ \Sigma_x) \\ &= \Lambda_y \circ \Psi(\Phi(\phi) \circ \Sigma_x) \\ &= \Lambda_y \circ \Psi\Phi(\phi) \circ \Psi(\Sigma_x). \end{aligned}$$

Al utilizar que  $\Lambda$  es una transformación natural y  $\phi: \Psi(x) \rightarrow y$  es un morfismo, obtenemos que  $\Lambda_y \circ \Psi\Phi(\phi) = \phi \circ \Lambda_{\Psi(x)}$  y tenemos que

$$\begin{aligned} \Lambda_y \circ \Psi\Phi(\phi) \circ \Psi(\Sigma_x) &= \phi \circ \Lambda_{\Psi(x)} \circ \Psi(\Sigma_x) \\ &= \phi, \end{aligned}$$

usando la conmutatividad del primer diagrama de la hipótesis. Con argumentos similares

$$\begin{aligned} (\Omega\Omega^{-1})(\phi') &= \Omega(\Lambda_y \circ \Psi(\phi')) \\ &= \Phi(\Lambda_y \circ \Psi(\phi')) \circ \Sigma_x \\ &= \Phi(\Lambda_y) \circ \Phi\Psi(\phi') \circ \Sigma_x \\ &= \Phi(\Lambda_y) \circ \Sigma_{\Phi(y)} \circ \phi' \\ &= \phi'. \end{aligned}$$

Ahora veamos que es natural. Para un morfismo  $\alpha: x \rightarrow x'$  y  $\phi'': \Psi(x') \rightarrow y$

$$\begin{aligned} \alpha^* \circ \Omega_{x',y}(\phi'') &= \Omega_{x',y}(\phi'') \circ \alpha \\ &= \Phi(\phi'') \circ \Sigma_{x'} \circ \alpha, \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} (\Omega_{x,y}\Psi(\alpha)^*)(\phi'') &= \Omega_{x,y}(\phi'' \circ \Psi(\alpha)) \\ &= \Phi(\phi'' \circ \Psi(\alpha)) \circ \Sigma_x \\ &= \Phi(\phi'') \circ \Phi(\Psi(\alpha)) \circ \Sigma_x, \end{aligned}$$

pero  $\phi\Psi(\alpha) \circ \Sigma_x = \Sigma_{x'} \circ \alpha$  pues  $\Sigma$  es una transformación natural. Con lo anterior demostramos que  $\Omega$  es natural en  $x$ . Cuando tenemos un morfismo  $\beta: y \rightarrow y'$

$$(\Phi(\beta)_* \circ \Omega_{x,y})(\phi) = \Phi(\beta) \circ \Phi(\phi) \circ \Sigma_x$$

y

$$\begin{aligned} (\Omega_{x,y'} \circ \beta_*)(\phi) &= \Omega_{x,y'}(\beta \circ \phi) \\ &= \Phi(\beta \circ \phi) \circ \Sigma_x \\ &= \Phi(\beta) \circ \Phi(\phi) \circ \Sigma_x, \end{aligned}$$

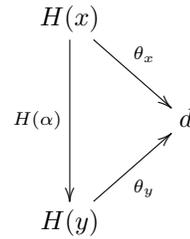
obteniendo la naturalidad de  $\Omega$  en la variable  $y$ . Por lo tanto  $\Omega$  es una adjunción entre  $\Psi$  y  $\Phi$ .  $\square$

### 1.3. Límites y colímites

Algunas veces podemos realizar construcciones relacionados con funtores  $H: C \rightarrow D$  y que resultan ser objetos de la categoría  $D$ . Un caso especial son los de los límites y colímites de funtores, estos objetos están definidos de manera abstracta para cumplir una propiedad universal. Construcciones como los productos y coproductos en  $R\text{-Mód}$  se pueden definir como límites o colímites de cierto funtor.

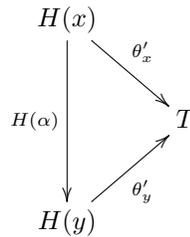
**Definición 1.3.1.** Sea  $C$  una categoría pequeña,  $D$  una categoría,  $H: C \rightarrow D$  un funtor covariante y  $d$  un objeto de  $D$ . Se dice que  $H$  tiene un límite directo o colímite  $d$  si

- Para cada objeto  $x$  de  $C$ , existe un morfismo  $\theta_x: H(x) \rightarrow d$  tales que para morfismos  $\alpha: x \rightarrow y$ , los diagramas

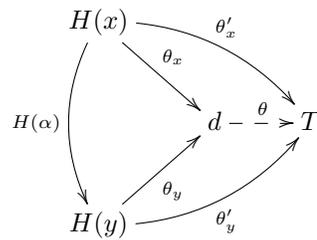


conmutan.

- Tiene la propiedad universal: Si existe un objeto  $T$  en  $D$  tal que existen morfismos  $\theta'_x: H(x) \rightarrow T$  en  $D$  que hacen que los diagramas

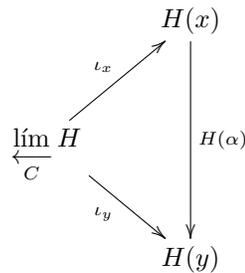


conmuten, entonces existe un único morfismo  $\theta: d \rightarrow T$  que hace conmutar los diagramas

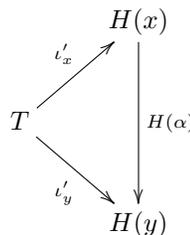


Al objeto  $d$  se le denota como  $d = \lim_{\rightarrow C} H$ .

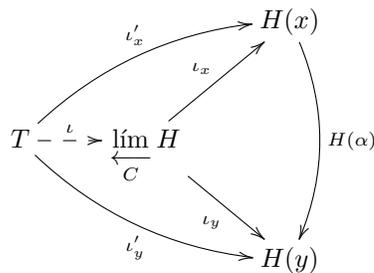
De forma similar se define el límite inverso o límite  $\lim_{\leftarrow C} H$ , con morfismos  $\iota_x: \lim_{\leftarrow C} H \rightarrow H(x)$  que hacen diagramas conmutativos



y con la propiedad universal que consiste en que si existe un objeto  $T$  y morfismos  $\iota'_x: T \rightarrow H(x)$  que hacen conmutar



existe un único morfismo  $\iota: T \rightarrow \varprojlim_C H$  que hace conmutar los diagramas



Un límite es único salvo isomorfismo cuando existe, ya que está definido con una propiedad universal. Lo mismo pasa para los colímites.

**Definición 1.3.2.** Una categoría  $C$  es completa (co-completa) si todo funtor covariante de una categoría pequeña  $D$  a  $C$  tiene límite inverso (colímite).

Algunas de las categorías más usuales son co-completas o completas. Un ejemplo es el siguiente resultado.

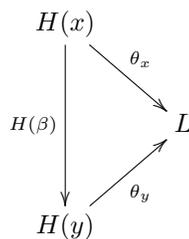
**Teorema 1.3.3.** Sea  $R$  un anillo, la categoría de los  $R$ -módulos izquierdos  $R\text{-Mód}$  es co-completa.

**Demostración.** Sea  $H: C \rightarrow R\text{-Mód}$  un funtor covariante con  $C$  una categoría pequeña. Se demostrará que

$$L = \frac{\left( \bigoplus_{x \in \text{Obj} C} H(x) \right)}{N}$$

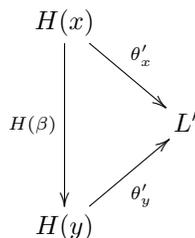
es el límite de  $H$ , donde  $N$  es el  $R$ -submódulo generado por los elementos de la forma  $a - H(\alpha)(a)$ ;  $\alpha: x \rightarrow y$  es un morfismo en  $C$  y  $a \in H(x)$ .

Es claro que  $L$  es un  $R$ -módulo izquierdo. Para un objeto  $x$  en la categoría  $C$ ,  $\theta_x: H(x) \rightarrow L$  es el homomorfismo que envía un elemento  $a \in H(x)$  a su clase  $a + N$  en  $L$ . Si tenemos un morfismo  $\beta: x \rightarrow y$  en  $C$ , el diagrama



conmuta porque si  $b \in H(x)$ , la clase  $H(\beta)(b) + N$  en  $L$  es la misma que la clase de  $b$ .

Además, si existe un  $R$ -módulo  $L'$  junto con homomorfismos  $\theta_x: H(x) \rightarrow L'$  que hacen conmutar los diagramas



podemos definir  $\theta = \sum_{x \in \text{Obj}(C)} \theta'_x: L \rightarrow L'$ . Es facil ver que  $\theta$  cumple con las condiciones para ser un homomorfismo de  $R$ -módulos. Para un generador  $a_j - H(\alpha_j)(a_j) \in N$ , tenemos que  $\theta(a_j - H(\alpha_j)(a_j)) = \theta'_x(a_j) - \theta'_y(H(\alpha_j)(a_j)) = 0$  debido a que por hipótesis el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H(x) & & \\ & \searrow^{\theta'_x} & \\ & & L' \\ & \nearrow_{\theta'_y} & \\ H(y) & & \end{array}$$

conmuta. Con esto comprobamos que  $\theta$  está bien definido. También tenemos que  $\theta\theta_x = \theta'_x$ . Por último, si existiera  $\theta': L \rightarrow L'$  que haga conmutar los mismos diagramas que  $\theta$ , entonces tendríamos que  $\theta\theta_x = \theta'\theta_x$  para todo  $x \in \text{Obj}(C)$ . Un elemento  $\left( \sum_{x \in \text{Obj}(C)} a_x \right) + N \in L$ , se puede ver como  $\sum_{x \in \text{Obj}(C)} \theta_x(a_x)$ , entonces

$$\theta \left( \sum_{x \in \text{Obj}(C)} a_x + N \right) = \theta \left( \sum_{x \in \text{Obj}(C)} \theta_x(a_x) \right) = \sum_{x \in \text{Obj}(C)} \theta\theta_x(a_x) = \sum_{x \in \text{Obj}(C)} \theta'\theta_x(a_x),$$

pero  $\theta_x(a_x) = a_x + N$ , así que

$$\sum_{x \in \text{Obj}(C)} \theta'\theta_x(a_x) = \theta' \left( \sum_{x \in \text{Obj}(C)} a_x + N \right),$$

por lo tanto  $\theta = \theta'$ . □

## 1.4. Complejos de cadena

A partir de ahora,  $R$  denotará un anillo con unitario. Además en la categoría de  $R$ -Mód los módulos proyectivos tienen varias caracterizaciones, por ejemplo,  $P$  es proyectivo si y solo si el funtor  $\text{Hom}(P, \_)$  es exacto y si y solo si es un sumando directo de un módulo libre, esto es, si existe un  $R$ -módulo  $M$  tal que  $\bigoplus R \cong P \oplus M$ .

**Definición 1.4.1.** Una sucesión de  $R$ -módulos  $A \xrightarrow{d} B \xrightarrow{\partial} C$  es exacta si  $\text{Im}(d) = \text{Ker}(\partial)$ . Es un complejo si  $\partial d = 0$ , es decir,  $\text{Im}(d) \subset \text{Ker}(\partial)$ .

Definimos ahora, la homología en  $B$  como  $H = \text{Ker}(\partial)/\text{Im}(d)$ .

**Proposición 1.4.2.** Supongamos que el siguiente diagrama conmuta y que sus renglones son complejos

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{d} & B & \xrightarrow{\partial} & C \\ \varphi \downarrow & & \psi \downarrow & & \eta \downarrow \\ A' & \xrightarrow{d'} & B' & \xrightarrow{\partial'} & C' \end{array}$$

denotemos  $H = \text{Ker}(\partial)/\text{Im}(d)$  y  $H' = \text{Ker}(\partial')/\text{Im}(d')$ . Usando  $\psi$  podemos definir un homomorfismo  $\psi_*$  de  $H$  a  $H'$  como sigue:  $\psi_*(x + \text{Im}(d)) = \psi(x) + \text{Im}(d')$ .

**Demostración.** Primero veamos que  $\psi_*$  está bien definido: Si  $x + \text{Im}(d) = y + \text{Im}(d)$  entonces  $x - y \in \text{Im}(d)$  así que para alguna  $z$  en  $A$ ,  $d(z) = x - y$ . Pero  $\psi(x - y) = \psi(d(z)) = d'\varphi(z)$  por la conmutatividad del diagrama. Por lo cual  $\psi(x) - \psi(y) = \psi(x - y) \in \text{Im}(d')$ , es decir,  $\psi(x) + \text{Im}(d') = \psi(y) + \text{Im}(d')$ . Ahora veamos que  $\psi_*$  toma valores en  $H'$ : Si  $x$  es un elemento de  $\text{Ker}(\partial)$ , utilizando el diagrama conmutativo tenemos que  $\partial'\psi(x) = \eta\partial(x) = 0$ , entonces  $\psi(x) \in \text{Ker}(\partial')$  y  $\psi(x) + \text{Im}(\partial') \in H'$ .  $\square$

**Definición 1.4.3.** Supongamos que tenemos diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{d} & B & \xrightarrow{\partial} & C \\ \varphi \downarrow & & \psi \downarrow & & \eta \downarrow \\ A' & \xrightarrow{d'} & B' & \xrightarrow{\partial'} & C' \end{array} \quad y \quad \begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{d} & B & \xrightarrow{\partial} & C \\ \varphi' \downarrow & & \psi' \downarrow & & \eta' \downarrow \\ A' & \xrightarrow{d'} & B' & \xrightarrow{\partial'} & C' \end{array}$$

Una homotopía entre los morfismos  $\varphi, \psi, \eta$  y  $\varphi', \psi', \eta'$  es una pareja de homomorfismos  $D: B \rightarrow A'$  y  $\Delta: C \rightarrow B'$  que satisfacen  $\psi - \psi' = d'D + \Delta\partial$ .

Esto es de gran utilidad pues cuando se tiene una homotopía, los homomorfismos inducidos en la homología coinciden: Si tomamos  $x \in \text{Ker}(\partial)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \psi(x) + \text{Im}(d') &= \psi'(x) + d'D(x) + \Delta\partial(x) + \text{Im}(d') \\ &= \psi'(x) + d'D(x) + \text{Im}(d') \\ &= \psi'(x) + \text{Im}(d'). \end{aligned}$$

**Definición 1.4.4.** Supongamos que  $B$  es un  $R$ -módulo izquierdo. Una resolución proyectiva de  $B$ , denotada por  $\langle P_n, d_n \rangle$  es una sucesión exacta de  $R$ -módulos,

$$\dots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} \dots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0$$

donde cada  $P_i$  para  $i \geq 0$  es proyectivo.

La categoría  $R\text{-Mód}$  es muy buena en este sentido ya que para cualquier  $R$ -módulo podemos obtener una resolución proyectiva. En cierto modo, todas las resoluciones proyectivas están relacionadas, como se puede concluir del siguiente resultado.

**Proposición 1.4.5.** Supongamos que  $B$  y  $B'$  son dos  $R$ -módulos y  $\varphi: B \rightarrow B'$  es un homomorfismo de  $R$ -módulos. Supongamos también que  $\langle P_n, d_n \rangle$  es una resolución proyectiva de  $B$  y  $\langle P'_n, d'_n \rangle$  es una sucesión exacta de  $R$ -módulos, para la cual existe un homomorfismo suprayectivo  $p': P'_0 \rightarrow B'$ . Entonces existen morfismos  $\varphi_i \in \text{Hom}(P_i, P'_i)$  haciendo

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & P_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{d_n} & \dots & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{p} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi_{n+1} & & \downarrow \varphi_n & & & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_0 & & \downarrow \varphi & & \\ \dots & \longrightarrow & P'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & P'_n & \xrightarrow{d'_n} & \dots & \xrightarrow{d'_2} & P'_1 & \xrightarrow{d'_1} & P'_0 & \xrightarrow{p'} & B' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

conmutar. Además, si  $\varphi'_n \in \text{Hom}(P_n, P'_n)$  sirven también como rellenos, entonces  $\varphi_n$  y  $\varphi'_n$  son homotópicos.

**Demostración.** Primero vamos a definir  $\varphi_0$  como el morfismo que surge del hecho de que  $P_0$  es proyectivo:

$$\begin{array}{ccc} & P_0 & \\ & \swarrow \varphi_0 & \downarrow p \\ & B & \\ \swarrow \varphi_0 & & \downarrow \varphi \\ P'_0 & \xrightarrow{p'} & B' \longrightarrow 0. \end{array}$$

Supongamos que hemos definido  $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ , entonces vamos a definir  $\varphi_{n+1}$  de forma recursiva. Notemos que si  $x \in \text{Im}(d_{n+1})$  entonces  $x \in \text{Ker}(d_n)$ , y por tanto  $0 = d_n(x) = \varphi_{n-1}d_n(x) = d'_n\varphi_n(x)$ , esto quiere decir que  $\varphi_n(\text{Im}(d_{n+1})) \subset \text{Ker}(d'_n) = \text{Im}(d'_{n+1})$ . Cuando  $n = 0$ , reemplazamos  $d_0$  por  $p$  y el argumento funciona. De este modo, como  $P_{n+1}$  es proyectivo podemos encontrar  $\varphi_{n+1}$  que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & P_{n+1} & \\ & \swarrow \varphi_{n+1} & \downarrow d_{n+1} \\ & \text{Im}(d_{n+1}) \subset P_n & \\ & \swarrow \varphi_n & \downarrow \varphi_n \\ P'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & \text{Im}(d'_{n+1}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Ahora, supongamos que existen otros morfismos  $\varphi'_n: P_n \rightarrow P'_n$ . Vamos a construir  $D_n: P_n \rightarrow P'_{n+1}$  tales que  $\varphi_n - \varphi'_n = d'_{n+1}D_n + D_{n-1}d_n$  para  $n \geq 0$  y  $D_{-1} = 0$ . Notemos que  $p'\varphi_0 = \varphi p = p'\varphi'_0$ , entonces  $p'(\varphi_0 - \varphi'_0) = 0$ . De este modo,  $\varphi_0 - \varphi'_0$  toma valores en  $\text{Ker}(p') = \text{Im}(d'_1)$  y nos da un morfismo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & P_0 & \\ & \swarrow D_0 & \downarrow \varphi_0 - \varphi'_0 \\ P'_1 & \xrightarrow{d'_1} & \text{Im}(d'_1) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Supongamos que ya hemos definido  $D_0, \dots, D_n$ . Para estos sabemos que se cumple  $\varphi_n - \varphi'_n = d'_{n+1}D_n + D_{n-1}d_n$  así que

$$\begin{aligned} d'_{n+1}(\varphi_{n+1} - \varphi'_{n+1} - D_n d_{n+1}) &= d'_{n+1}\varphi_{n+1} - d'_{n+1}\varphi'_{n+1} - d'_{n+1}D_n d_{n+1} \\ &= \varphi_n d_{n+1} - \varphi'_n d_{n+1} - d'_{n+1}D_n d_{n+1} \\ &= (\varphi_n - \varphi'_n - d'_{n+1}D_n)d_{n+1} \\ &= D_{n-1}d_n d_{n+1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

esto nos dice que  $\text{Im}(\varphi_{n+1} - \varphi'_{n+1} - D_n d_{n+1}) \subset \text{Ker}d'_{n+1} = \text{Im}d'_{n+2}$ . De aquí vamos a construir  $D_{n+1}$  para que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & P_{n+1} & \\ & \swarrow D_{n+1} & \downarrow \varphi_{n+1} - \varphi'_{n+1} - D_n d_{n+1} \\ P'_{n+2} & \xrightarrow{d'_{n+2}} & \text{Im}(d'_{n+2}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

sea conmutativo, lo que concluye la prueba.  $\square$

**Definición 1.4.6.** Supongamos que tenemos una resolución proyectiva  $\langle P_n, d_n \rangle$  para el  $R$ -módulo izquierdo  $B$ , y sea  $C$  un  $R$ -módulo izquierdo. Aplicamos a la resolución  $\langle P_n, d_n \rangle$  el functor  $\text{Hom}_R(\_, C)$  y obtenemos

$$\dots \xleftarrow{(d_{n+2})^*} \text{Hom}_R(P_{n+1}, C) \xleftarrow{(d_{n+1})^*} \text{Hom}_R(P_n, C) \xleftarrow{(d_n)^*} \dots \xleftarrow{(d_2)^*} \text{Hom}_R(P_1, C) \xleftarrow{(d_1)^*} \text{Hom}_R(P_0, C) \longleftarrow 0$$

donde  $(d_i)^*$  denota el morfismo precomposición, esto es, para un homomorfismo  $f \in \text{Hom}_R(P_{i-1}, C)$ ,  $(d_i)^*(f) = f \circ d_i \in \text{Hom}_R(P_i, C)$ . La homología  $n$ -ésima de la sucesión anterior, es decir, la homología en  $\text{Hom}(P_n, C)$  es  $\text{Ext}_R^n(B, C)$ . Cuando no hay confusión sobre el anillo  $R$  sobre el cual se trabaja, entonces se puede omitir y escribir solamente  $\text{Ext}^n(B, C)$ .

En la notación utilizada para esta construcción,  $\text{Ext}_R^n(B, C)$  no aparece qué resolución proyectiva se esta tomando, esto se debe a que, hasta cierto sentido, no importa cuál resolución proyectiva se tome para  $B$ .

**Proposición 1.4.7.**  $\text{Ext}_R^n(B, C)$  es independiente, salvo isomorfismo, de la resolución proyectiva escogida para  $B$ .

**Demostración.** Supongamos que tenemos dos resoluciones proyectivas  $\langle P_n, d_n \rangle$  y  $\langle P'_n, d'_n \rangle$  para  $B$ . Por la Proposición 1.4.5 tenemos morfismos  $\varphi_i: P_i \rightarrow P'_i$  para el morfismo identidad  $1_B$  que hacen

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \dots & \longrightarrow & P_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{d_n} & \dots & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{p} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi_{n+1} & & \downarrow \varphi_n & & & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_0 & & \downarrow 1_B & & \\ \dots & \longrightarrow & P'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & P'_n & \xrightarrow{d'_n} & \dots & \xrightarrow{d'_2} & P'_1 & \xrightarrow{d'_1} & P'_0 & \xrightarrow{p'} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

conmutar. Aplicando nuevamente la Proposición 1.4.5, obtenemos un diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \dots & \longrightarrow & P_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{d_n} & \dots & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{p} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi_{n+1} & & \downarrow \varphi_n & & & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_0 & & \downarrow 1_B & & \\ \dots & \longrightarrow & P'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & P'_n & \xrightarrow{d'_n} & \dots & \xrightarrow{d'_2} & P'_1 & \xrightarrow{d'_1} & P'_0 & \xrightarrow{p'} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \psi_{n+1} & & \downarrow \psi_n & & & & \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_0 & & \downarrow 1_B & & \\ \dots & \longrightarrow & P_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{d_n} & \dots & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{p} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Además, como los morfismos  $1_{P_n}$  y  $\psi_n \varphi_n$  hacen conmutar el mismo diagrama, la segunda parte de la Proposición 1.4.5 nos dice que  $\psi_n \varphi_n$  y  $1_{P_n}$  son homotópicos. Llamemos a los morfismos que definen esta homotopía  $D_n$ . Al aplicarle  $\text{Hom}(\_, C)$  al diagrama anterior nos queda

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \dots & \xleftarrow{(d_{n+2})^*} & \text{Hom}_R(P_{n+1}, C) & \xleftarrow{(d_{n+1})^*} & \text{Hom}_R(P_n, C) & \xleftarrow{(d_n)^*} & \dots & \xleftarrow{(d_2)^*} & \text{Hom}_R(P_1, C) & \xleftarrow{(d_1)^*} & \text{Hom}_R(P_0, C) & \xleftarrow{} & 0 \\ & & \uparrow (\varphi_{n+1})^* & & \uparrow (\varphi_n)^* & & & & \uparrow (\varphi_1)^* & & \uparrow (\varphi_0)^* & & \\ \dots & \xleftarrow{(d'_{n+2})^*} & \text{Hom}_R(P'_{n+1}, C) & \xleftarrow{(d'_{n+1})^*} & \text{Hom}_R(P'_n, C) & \xleftarrow{(d'_n)^*} & \dots & \xleftarrow{(d'_2)^*} & \text{Hom}_R(P'_1, C) & \xleftarrow{(d'_1)^*} & \text{Hom}_R(P'_0, C) & \xleftarrow{} & 0 \\ & & \uparrow (\psi_{n+1})^* & & \uparrow (\psi_n)^* & & & & \uparrow (\psi_1)^* & & \uparrow (\psi_0)^* & & \\ \dots & \xleftarrow{(d_{n+2})^*} & \text{Hom}_R(P_{n+1}, C) & \xleftarrow{(d_{n+1})^*} & \text{Hom}_R(P_n, C) & \xleftarrow{(d_n)^*} & \dots & \xleftarrow{(d_2)^*} & \text{Hom}_R(P_1, C) & \xleftarrow{(d_1)^*} & \text{Hom}_R(P_0, C) & \xleftarrow{} & 0 \end{array}$$

Una homotopía entre  $(\varphi_n)^*(\psi_n)^*$  y  $1_{\text{Hom}(P_n, C)}$  está dada por los morfismos  $(D_n)^*: \text{Hom}(P_{n+1}, C) \rightarrow \text{Hom}(P_n, C)$ . Esto es debido a que  $\psi_n \varphi_n - 1_{P_n} = d_{n+1} D_n + D_{n-1} d_n$ , por lo que  $f \psi_n \varphi_n - f 1_{P_n} = f d_{n+1} D_n + f D_{n-1} d_n$ , para  $f: P_n \rightarrow C$ . Pero

$$\begin{aligned} ((\varphi_n)^*(\psi_n)^* - 1_{\text{Hom}(P_n, C)})(f) &= f \psi_n \varphi_n - f 1_{P_n} \\ &= f d_{n+1} D_n + f D_{n-1} d_n \\ &= ((d_n)^*(D_{n-1})^* + (D_n)^*(d_{n+1})^*)(f). \end{aligned}$$

De lo anterior,  $(\varphi_n)^*(\psi_n)^* - 1_{\text{Hom}(P_n, C)} = (d_n)^*(D_{n-1})^* + (D_n)^*(d_{n+1})^*$ . Entonces los morfismos inducidos en homología  $((\varphi_n)^*(\psi_n)^*)^*$  son iguales a  $1_{H_n}$ , con  $H_n$  la homología en  $\text{Hom}(P_n, C)$ . Invertiendo los roles de las resoluciones  $\langle P_n, d_n \rangle$  y  $\langle P'_n, d'_n \rangle$  obtenemos que  $((\psi_n)^*(\varphi_n)^*)^* = 1_{H'_n}$ , siendo  $H'_n$  la homología en  $\text{Hom}(P'_n, C)$ .  $\square$

Similarmente al caso de Ext se obtiene Tor de la siguiente manera.

**Definición 1.4.8.** Supongamos que tenemos una resolución proyectiva  $\langle P_n, d_n \rangle$  para el  $R$ -módulo izquierdo  $B$ , y sea  $A$  un  $R$ -módulo derecho. Aplicamos a la resolución  $\langle P_n, d_n \rangle$  el functor  $A \otimes_R \_$ , obteniendo

$$\dots \longrightarrow A \otimes_R P_{n+1} \xrightarrow{1_A \otimes_R d_{n+1}} A \otimes_R P_n \xrightarrow{1_A \otimes_R d_n} \dots \xrightarrow{1_A \otimes_R d_2} A \otimes_R P_1 \xrightarrow{1_A \otimes_R d_1} A \otimes_R P_0 \longrightarrow 0$$

La homología  $n$ -ésima de la sucesión anterior, es decir, la homología en  $A \otimes_R P_n$  es  $\text{Tor}_n^R(A, B)$ . Cuando no hay confusión sobre el anillo  $R$  sobre el cual se trabaja, entonces se puede omitir y escribir solamente  $\text{Tor}_n(A, B)$ .

También como en el caso de  $\text{Ext}$ ,  $\text{Tor}_n(A, B)$  es independiente, salvo isomorfismo, de la resolución proyectiva que tomemos para  $B$ .

### La categoría de complejos de cadena

Dado que ya vimos lo que para una sucesión  $A \xrightarrow{d} B \xrightarrow{\partial} C$  quiere decir ser un complejo, ahora veremos una categoría que utiliza este concepto en sus objetos, los cuales son llamados complejos de cadena.

**Definición 1.4.9.** Un complejo de cadenas es un complejo de  $R$ -módulos

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} C_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} \dots \xrightarrow{\partial_{-n+1}} C_{-n} \xrightarrow{\partial_{-n}} C_{-n-1} \xrightarrow{\partial_{-n-1}} \dots$$

denotado  $(C_i, \partial_i)$  si se quiere indicar los morfismos  $\partial_i$ , donde  $i \in \mathbb{Z}$ . Si no hay confusión se denota simplemente  $C_\bullet$ .

**Definición 1.4.10.** Una colección de homomorfismos de  $R$ -módulos  $f_i: C_i \rightarrow C'_i$ , forman un morfismo de cadenas de  $R$ -módulos  $f_\bullet: (C_i, \partial_i) \rightarrow (C'_i, \partial'_i)$  si las  $f_i$  hacen conmutar el diagrama

$$\begin{array}{cccccccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & \dots & \xrightarrow{\partial_2} & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 & \xrightarrow{\partial_0} & C_{-1} & \xrightarrow{\partial_{-1}} & \dots & \xrightarrow{\partial_{-n+1}} & C_{-n} & \xrightarrow{\partial_{-n}} & C_{-n-1} & \xrightarrow{\partial_{-n-1}} & \dots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_{-1} & & & & \downarrow f_{-n} & & \downarrow f_{-n-1} & & & \\ \dots & \xrightarrow{\partial'_{n+2}} & C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & \dots & \xrightarrow{\partial'_2} & C'_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & C'_0 & \xrightarrow{\partial'_0} & C'_{-1} & \xrightarrow{\partial'_{-1}} & \dots & \xrightarrow{\partial'_{-n+1}} & C'_{-n} & \xrightarrow{\partial'_{-n}} & C'_{-n-1} & \xrightarrow{\partial'_{-n-1}} & \dots \end{array}$$

La categoría  $Ch_R$  tiene como objetos los complejos de cadena de  $R$ -módulos y los morfismos en esta categoría son los morfismos de cadena. La regla de composición para  $(C_i, \partial_i) \xrightarrow{f_\bullet} (C'_i, \partial'_i) \xrightarrow{f'_\bullet} (C''_i, \partial''_i)$  es la composición usual en cada  $i$ , es decir, será la colección de homomorfismos  $f'_i \circ f_i$ .

En esta categoría podemos definir ciertas operaciones entre los objetos cuyo resultado vuelve a ser un complejo de cadena aunque no necesariamente de  $R$ -módulos.

**Definición 1.4.11.** Dados dos complejos de cadena  $C_\bullet = (C_i, \partial_i)$  y  $C'_\bullet = (C'_i, \partial'_i)$  definimos el producto tensorial entre  $(C_i, \partial_i)$  y  $(C'_i, \partial'_i)$  de la siguiente manera: Para cada  $n$ ,

$$(C_\bullet \otimes C'_\bullet)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes_R C'_q,$$

además, definimos para  $c \in C_p$  y  $e \in C'_q$ , con  $p + q = n$ ,

$$D_n(c \otimes e) = (\partial_p(c) \otimes e) + (-1)^p(c \otimes \partial'_q(e)).$$

Y luego extendemos por linealidad.

Lo anterior es un complejo de  $\mathbb{Z}$ -módulos. Para ver esto calculemos la composición  $D_{n-1}D_n$ . En un elemento de la base de  $C_p \otimes C_q$ ,  $a \otimes b$  con  $p + q = n$  tenemos

$$\begin{aligned} D_{n-1}D_n(a \otimes b) &= D_{n-1}((\partial_p(a) \otimes b) + (-1)^p(a \otimes \partial'_q(b))) \\ &= (\partial_{n-1}\partial_n(a) \otimes b) + (-1)^{p-1}(\partial_p(a) \otimes \partial'_q(b)) + (-1)^p[(\partial_p(a) \otimes \partial'_q(b)) \\ &\quad + (-1)^p(a \otimes \partial'_{q-1}\partial'_q(b))] \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Definición 1.4.12.** Dados dos complejos de  $R$ -módulos  $C_\bullet = (C_i, \partial_i)$  y  $C'_\bullet = (C'_i, \partial'_i)$  podemos definir un complejo de cadenas de grupos abelianos llamado  $\text{Hom}(C_\bullet, C'_\bullet)$  como

$$\text{Hom}(C_\bullet, C'_\bullet)_n = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_R(C_i, C'_{i+n})$$

y la diferencial  $D'_n$  la definimos de tal manera que al aplicar  $D'_n$  a una colección de  $R$ -homomorfismos  $(f_i: C_i \rightarrow C'_{i+n})_{i \in \mathbb{Z}}$  en la posición  $i$  nos queda

$$\partial'_{i+n} \circ f_i - (-1)^n f_{i-1} \circ \partial_i.$$

De esta forma obtenemos una colección  $(\partial'_{i+n} \circ f_i - (-1)^n f_{i-1} \circ \partial_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ . La diferencial  $D'_n$  está bien definida: Tanto  $\partial'_{i+n} f_i$  como  $f_{i-1} \circ \partial_i$  son homomorfismos de  $C_i$  a  $C'_{i+n-1}$ . A  $D'_n((f_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (\partial'_{i+n} \circ f_i - (-1)^n f_{i-1} \circ \partial_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \prod_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_R(C_i, C'_{i+n-1})$  le aplicamos  $D'_{n-1}$  y nos resulta en la posición  $i$

$$\partial'_{i+n-1}(\partial'_{i+n} f_i - (-1)^n f_{i-1} \partial_i) - (-1)^{n-1}(\partial'_{i-1+n} f_{i-1} - (-1)^n f_{i-2} \partial_{i-1}) \partial_i,$$

cuando desarrollamos esta expresión obtenemos

$$\partial'_{i+n-1} \partial'_{i+n} f_i - (-1)^n \partial_{i+n-1} f_{i-1} \partial_i - (-1)^{n-1}(\partial'_{i-1+n} f_{i-1} \partial_i - (-1)^n f_{i-2} \partial_{i-1} \partial_i),$$

finalmente, la expresión anterior es lo mismo que

$$(-1)^{n+1} \partial'_{i+n-1} f_{i-1} \partial_i + (-1)^n \partial'_{i+n-1} f_{i-1} \partial_i = 0.$$

## 1.5. Extensiones de Kan y sobrecategorías

Existen ciertos tipos de funtores adjuntos llamados extensiones de Kan. En esta sección se demostrará su existencia y algunas de las propiedades que tienen.

### 1.5.1. Sobrecategorías

Para poder definir las extensiones de Kan es necesario estudiar dos tipos de categorías llamadas las sobrecategorías y bajocategorías. Esto se debe a que dichos funtores adjuntos se definen sobre estas categorías.

Si tenemos un funtor  $H: D \rightarrow C$  entre categorías pequeñas, para cada objeto  $x \in \text{Obj}(C)$  podemos definir la sobrecategoría

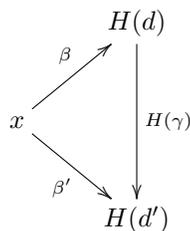
$$H/x$$

como la categoría cuyos objetos son los pares  $\{(d, \alpha) : d \in \text{Obj}(D), \alpha \in \text{Mor}_C(H(d), x)\}$ , un morfismo  $(d, \alpha) \rightarrow (d', \beta)$  es un morfismo  $f \in \text{Mor}_D(d, d')$  el cual hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} H(d) & & x \\ \downarrow H(f) & \searrow \alpha & \\ H(d') & \nearrow \beta & \end{array}$$

Dualmente se define la bajocategoría  $x/H$  cuyos objetos son pares  $(\beta, d)$  con  $d \in \text{Obj}(D)$  y  $\beta: x \rightarrow H(d)$  es un morfismo en  $C$ . Un morfismo  $\gamma: (\beta, d) \rightarrow (\beta', d')$  es un morfismo  $\gamma: d \rightarrow d'$  en  $D$  que hace conmutar

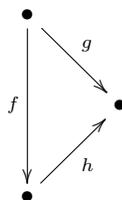
el diagrama



La composición en estas categorías está dada por la composición en  $D$ . Veamos un ejemplo sencillo pero importante.

**Ejemplo 1.5.1.** La sobrecategoría  $1_{\beta G}/\bullet$

Recordemos que  $\beta G$  es una categoría con un objeto  $\bullet$ . Así tenemos que la sobrecategoría  $1_{\beta G}/\bullet$  tiene como objetos los elementos de la forma  $(\bullet, g)$  y un morfismo  $(\bullet, g) \rightarrow (\bullet, h)$  es un morfismo  $f$  en  $\beta G$  que hace conmutar el siguiente diagrama



es decir,  $f$  es un elemento de  $G$  tal que  $f = h^{-1}g$ .

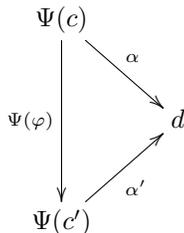
Las sobrecategorías dependen de los objetos que tomemos en el codominio del funtor para construirlas, así que cuando dos objetos estén relacionados por medio de un morfismo, también las sobrecategorías que construyamos con esos objetos estarán relacionadas.

**Proposición 1.5.2.** Sea  $\Psi: C \rightarrow D$  un funtor covariante entre categorías pequeñas y  $\gamma: d \rightarrow d'$  un morfismo en la categoría  $D$ . Entonces  $\gamma$  induce funtores  $\gamma_*: \Psi/d \rightarrow \Psi/d'$  y  $\gamma^*: d/\Psi \rightarrow d'/\Psi$ . Si  $\gamma$  es un isomorfismo, entonces las categorías  $\Psi/d$  y  $\Psi/d'$  son isomorfas.

**Demostración.** Solo demostraremos la existencia de  $\gamma_*$ , para el caso de  $\gamma^*$  la demostración es similar. La definición de  $\gamma_*$  es

$$\begin{array}{ccc}
 \gamma_*: \Psi/d & \longrightarrow & \Psi/d' \\
 (c, \alpha) & \longmapsto & (c, \gamma\alpha) \\
 (c, \alpha) & & (c, \gamma\alpha) \\
 \varphi \downarrow & \longmapsto & \downarrow \varphi \\
 (c', \alpha') & & (c', \gamma\alpha')
 \end{array}$$

En objetos es muy claro que  $\gamma_*$  está bien definido, pues  $\gamma\alpha: \Psi(c) \rightarrow d'$  es un morfismo en  $D$  y por tanto la pareja  $(c, \gamma\alpha)$  es un objeto de la sobrecategoría  $\Psi/d'$ . Para un morfismo  $\varphi: (c, \alpha) \rightarrow (c', \alpha')$  en  $\Psi/d$ , tenemos que el diagrama



debe ser conmutativo. Al añadirle el morfismo  $\gamma$  el diagrama resultante

$$\begin{array}{ccc}
 \Psi(c) & & \\
 \downarrow \Psi(\varphi) & \searrow \gamma\alpha & \\
 & & d' \\
 & \nearrow \gamma\alpha' & \\
 \Psi(c') & & 
 \end{array}$$

sigue siendo conmutativo. Claramente  $\gamma_*$  manda identidad a identidad. De esta manera, está bien definido como functor. Si  $\gamma$  es un isomorfismo, el functor  $\gamma_*^{-1}$  inducido por el morfismo inverso  $\gamma^{-1}$  es el functor inverso de  $\gamma_*$ .  $\square$

### 1.5.2. Extensiones de Kan

No todos los funtores tienen un functor adjunto, sin embargo, veremos que para un functor llamado restricción si lo hay. Entonces primero veremos las herramientas necesarias para poder demostrar esta afirmación. Por ejemplo, definiremos funtores que nos ayudan a la demostración y en la definición de estos funtores adjuntos.

**Definición 1.5.3.** Sean  $C$  y  $D$  dos categorías pequeñas y  $T$  una categoría,  $\Psi: C \rightarrow D$  un functor. Definimos el functor restricción  $\text{Res}_\Psi: T^D \rightarrow T^C$  por medio de la precomposición con  $\Psi$ , siendo más específicos, está definido por tomar un functor  $\tau: D \rightarrow T$  y enviarlo al functor  $\tau \circ \Psi: C \rightarrow T$ . Si tenemos una transformación natural  $\eta: \tau \rightarrow \tau'$  nos induce una transformación natural de funtores en  $T^C$  tomando para cada  $x \in \text{Obj}(C)$  el morfismo  $\eta_{\Psi(x)}$ .

**Lema 1.5.4.** Sea  $\Psi: C \rightarrow D$  un functor entre categorías pequeñas. Para cualquier functor  $M: D \rightarrow T$ , con  $T$  completa y cocompleta, existen morfismos canónicos

$$\lim_{\rightarrow C} \text{Res}_\Psi M \rightarrow \lim_{\rightarrow D} M \quad y \quad \lim_{\leftarrow D} M \rightarrow \lim_{\leftarrow C} \text{Res}_\Psi M$$

**Demostación.** Primero debemos darnos cuenta que  $\text{Res}_\Psi M: C \rightarrow T$  es, por definición,  $M \circ \Psi$ . Denotemos los morfismos de la definición del límite del functor  $M$  como  $\theta_d: M(d) \rightarrow \lim_{\rightarrow D} M$  y los morfismos del límite de  $\text{Res}_\Psi M$  como  $\iota_x: (\text{Res}_\Psi M)(x) \rightarrow \lim_{\rightarrow C} \text{Res}_\Psi M$ . La propiedad universal del límite directo nos asegura la existencia de  $\theta: \lim_{\rightarrow C} \text{Res}_\Psi M \rightarrow \lim_{\rightarrow D} M$  que hace el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 (\text{Res}_\Psi M)(x) = M(\Psi(x)) & & & & \\
 \downarrow & \searrow \iota_x & \xrightarrow{\theta_{\Psi(x)}} & & \\
 (\text{Res}_\Psi M)(\alpha) = M(\Psi(\alpha)) & & \lim_{\rightarrow C} \text{Res}_\Psi M & \xrightarrow{\theta} & \lim_{\rightarrow D} M \\
 \downarrow & \nearrow \iota_y & & \nearrow \theta_{\Psi(x)} & \\
 (\text{Res}_\Psi M)(y) = M(\Psi(y)) & & & & 
 \end{array}$$

conmutativo con  $\alpha: x \rightarrow y$  un morfismo en  $C$ . El morfismo canónico para los límites inversos son obtenidos de la misma forma.  $\square$

**Definición 1.5.5.** Consideremos  $\Psi: C \rightarrow D$  un functor entre categorías pequeñas. Para un objeto  $d \in \text{Obj}(D)$  el functor canónico  $\beta_d: \Psi/d \rightarrow C$  está definido de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccc} \beta_d: \Psi/d & \longrightarrow & C \\ (c, \alpha) & \longmapsto & c \\ (c_1, \alpha_1) & & c_1 \\ \gamma \downarrow & \longrightarrow & \downarrow \gamma \\ (c_2, \alpha_2) & & c_2 \end{array}$$

También definimos el functor

$$\begin{array}{ccc} \beta^d: d/\Psi & \longrightarrow & C \\ (\alpha, c) & \longmapsto & c \\ (\alpha_1, c_1) & & c_1 \\ \gamma \downarrow & \longrightarrow & \downarrow \gamma \\ (\alpha_2, c_2) & & c_2 \end{array}$$

Notemos que  $\beta_d$  en objetos es la proyección a la primera coordenada y en morfismos solo cambian su dominio y codominio, mientras que para  $\beta^d$  es la proyección a la segunda componente y para morfismos pasa lo mismo que para  $\beta_d$ .

El functor  $\text{Res}_\Psi$  que vimos en la Definición 1.5.3 es muy importante porque tiene un functor adjunto izquierdo  $\text{LK}_\Psi$ , llamado la extensión de Kan izquierda a lo largo de  $\Psi$  y un adjunto derecho  $\text{RK}_\Psi$  llamado la extensión de Kan derecha a lo largo de  $\Psi$ . La forma en que se definen estos funtores adjuntos dependen de límites y colímites. Definiremos  $\text{LK}_\Psi$  y  $\text{RK}_\Psi$  y veremos las propiedades que cumplen.

**Proposición 1.5.6.** Sea  $\Psi: C \rightarrow D$  un functor covariante entre categorías pequeñas y  $T$  una categoría abeliana completa y cocompleta. Para todo functor  $M: C \rightarrow T$  existen funtores

$$\text{LK}_\Psi M = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Psi/_-}} \text{Res}_{\beta_-} M: D \rightarrow T \quad \text{y} \quad \text{RK}_\Psi M = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \_/\Psi}} \text{Res}_{\beta_-} M: D \rightarrow T.$$

**Demostración.** Lo demostraremos para  $\text{LK}_\Psi M$  pues la demostración para  $\text{RK}_\Psi M$  es muy parecida. Definimos

$$\text{LK}_\Psi M(d) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Psi/d}} \text{Res}_{\beta_d} M$$

para cada objeto  $d$  en  $D$ , y para un morfismo  $\gamma: d \rightarrow d'$ ,  $\text{LK}_\Psi M(\gamma)$  se construye de la siguiente manera: Por la Proposición 1.5.2, el morfismo  $\gamma: d \rightarrow d'$  induce un functor  $\gamma_*: \Psi/d \rightarrow \Psi/d'$ . Este functor cumple que  $\beta_{d'} \circ \gamma_* = \beta_d$ , pues en cada objeto  $(c, \alpha)$  en  $\Psi/d$ ,  $\beta_{d'} \gamma_*(c, \alpha) = \beta_{d'}(c, \gamma\alpha) = c = \beta_d(c, \alpha)$  y en morfismos todos los funtores  $\gamma_*$ ,  $\beta_{d'}$  y  $\beta_d$  son como identidades. Aplicando el Lema 1.5.4 con el functor  $\text{Res}_{\beta_{d'}} M: \Psi/d' \rightarrow T$  tenemos el morfismo canónico

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Psi/d}} \text{Res}_{\gamma_*} \text{Res}_{\beta_{d'}} M \rightarrow \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Psi/d'}} \text{Res}_{\beta_{d'}} M.$$

Pero por definición del functor restricción,  $\text{Res}_{\gamma_*} \text{Res}_{\beta_{d'}} M = \text{Res}_{\beta_d} M$ . De este modo tenemos un morfismo canónico

$$\text{LK}_\Psi M(\gamma): \text{LK}_\Psi M(d) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Psi/d}} \text{Res}_{\beta_d} M \rightarrow \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Psi/d'}} \text{Res}_{\beta_{d'}} M = \text{LK}_\Psi M(d').$$

Ahora, veamos que en verdad  $\text{LK}_\Psi M$  es un funtor de  $D$  a  $T$ . Por la forma en que construimos este morfismo, tenemos que  $\text{LK}_\Psi M(1_x) = 1_{\text{LK}_\Psi M(x)}$ . Si tomamos dos morfismos  $d \xrightarrow{\gamma} d' \xrightarrow{\gamma'} d''$  en  $C$ , nos inducen funtores  $\Psi/d \xrightarrow{\gamma_*} \Psi/d' \xrightarrow{\gamma'_*} \Psi/d''$ . De manera inmediata vemos que  $(\gamma'\gamma)_* = \gamma'_*\gamma_*$ . Por una parte, tenemos morfismos canónicos

$$\lim_{\Psi/d} \text{Res}_{\gamma_*} \text{Res}_{\beta_{d'}} M \xrightarrow{\text{LK}_\Psi(\gamma)} \lim_{\Psi/d'} \text{Res}_{\beta_{d'}} M = \lim_{\Psi/d'} \text{Res}_{\gamma'_*} \text{Res}_{\beta_{d''}} M \xrightarrow{\text{LK}_\Psi(\gamma')} \lim_{\Psi/d''} \text{Res}_{\beta_{d''}} M,$$

lo mismo pasa para el morfismo  $\gamma'\gamma$ , obteniendo

$$\text{LK}_\Psi(\gamma'\gamma): \lim_{\Psi/d} \text{Res}_{\gamma'_*\gamma_*} \text{Res}_{\beta_{d'}} M \rightarrow \lim_{\Psi/d''} \text{Res}_{\beta_{d''}} M.$$

Los morfismos  $\text{LK}_\Psi M(\gamma'\gamma)$  y  $\text{LK}_\Psi M(\gamma')\text{LK}_\Psi M(\gamma)$  tienen el mismo dominio y codominio porque  $\text{Res}_{\gamma'_*\gamma_*} \text{Res}_{\beta_{d''}} M = \text{Res}_{\beta_{d''}} M$  como ya vimos anteriormente. En la prueba del [Lema 1.5.4](#) tenemos diagramas conmutativos de la forma

$$\begin{array}{ccc} (\text{Res}_{\beta_{d'}} M)(\gamma_*(c, \alpha)) = M\beta_d(c, \alpha) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\theta_{\gamma_*(c, \alpha)}} \\ \xrightarrow{\iota_{(c, \alpha)}} \end{array} & \text{LK}_\Psi M(d) \xrightarrow{\text{LK}_\Psi M(\gamma')} \text{LK}_\Psi M(d') \\ \text{Res}_{\beta_{d'}} M(\varphi) \downarrow & & \uparrow \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota_{(c', \alpha')}} \\ \xrightarrow{\theta_{\gamma_*(c', \alpha')}} \end{array} \\ (\text{Res}_{\beta_{d'}} M)(\gamma_*(c', \alpha')) = M\beta_d(c', \alpha') & & \end{array}$$

De esta misma forma podemos obtener diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} (\text{Res}_{\beta_{d'}} M)(\gamma'_*(a, \epsilon)) = M\beta_{d'}(a, \epsilon) & \xrightarrow{\theta'_{\gamma'_*(a, \epsilon)}} & \text{LK}_\Psi M(d'') \\ \downarrow \iota'_{(a, \epsilon)} & & \uparrow \\ \text{LK}_\Psi M(d') & \xrightarrow{\text{LK}_\Psi M(\gamma')} & \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} (\text{Res}_{\beta_d} M)(\gamma_*\gamma'_*(a', \epsilon')) = M\beta_d(a', \epsilon') & \xrightarrow{\theta''_{\gamma_*\gamma'_*(a', \epsilon')}} & \text{LK}_\Psi M(d'') \\ \downarrow \iota''_{(a', \epsilon')} & & \uparrow \\ \text{LK}_\Psi M(d) & \xrightarrow{\text{LK}_\Psi M(\gamma'\gamma)} & \end{array}$$

Los morfismos  $\iota, \iota', \iota'', \theta, \theta', \theta''$  son los estructurales de sus respectivos límites, así que  $\iota''_{(a', \epsilon')} = \iota_{(a', \epsilon)}$ ,  $\theta''_{\gamma_*\gamma'_*(a', \epsilon')} = \theta'_{\gamma'_*(\gamma'_*(a', \epsilon'))}$  y  $\theta_{\gamma_*(c, \alpha)} = \iota'_{\gamma_*(c, \alpha)}$ , con esto tenemos

$$\begin{aligned} \text{LK}_\Psi M(\gamma')\text{LK}_\Psi M(\gamma)\iota''_{(a', \epsilon')} &= \text{LK}_\Psi M(\gamma')\text{LK}_\Psi M(\gamma)\iota_{(a', \epsilon')} \\ &= \text{LK}_\Psi M(\gamma')\theta_{\gamma_*(a', \epsilon')} \\ &= \theta'_{\gamma'_*(\gamma(a', \epsilon))} \\ &= \theta''_{\gamma'_*\gamma(a', \epsilon)}. \end{aligned}$$

Por la propiedad universal del límite  $\text{LK}_\Psi M(d'')$ , se debe cumplir  $\text{LK}_\Psi M(\gamma'\gamma) = \text{LK}_\Psi M(\gamma')\text{LK}_\Psi M(\gamma)$  y por lo tanto  $\text{LK}_\Psi M: D \rightarrow T$  es un funtor.  $\square$

De igual forma que en la proposición anterior, las siguientes propiedades se demostrarán para la extensión de Kan izquierda ya que para  $\text{RK}_\Psi$  es muy similar. Lo primero que veremos es que con la definición de  $\text{LK}_\Psi M$  recién dada definimos un funtor tomando a  $M: C \rightarrow T$  como un objeto en  $T^C$ .

**Proposición 1.5.7.** *Existen funtores  $\text{LK}_\Psi: T^C \rightarrow T^D$  y  $\text{RK}_\Psi: T^C \rightarrow T^D$  definidos en objetos como en la Proposición 1.5.6.*

**Demostración.** Sean  $M, M': C \rightarrow T$  funtores y  $\eta: M \rightarrow M'$  una transformación natural. Usando la propiedad universal del límite, construimos un morfismo como se muestra en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M\beta_d(c, \alpha) & \xrightarrow{\eta_{\beta_d(c, \alpha)}} & M'\beta_d(c, \alpha) \\ \downarrow \iota_{(c, \alpha)} & & \downarrow \iota'_{(c, \alpha)} \\ \varinjlim_{\Psi/d} \text{Res}_{\beta_d} M & \xrightarrow{\text{LK}_\Psi(\eta)_d} & \varinjlim_{\Psi/d} \text{Res}_{\beta_d} M' \end{array}$$

Juntando el diagrama anterior con los que surgieron de la construcción de los  $\text{LK}_\Psi M(\gamma)$ , obtenemos

$$\begin{array}{ccccc} & & \eta_{\beta_d(c, \alpha)} & & \\ & & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & & \\ M\beta_{d'}\gamma_*(c, \alpha) = M\beta_d(c, \alpha) & & & & M'\beta_d(c, \alpha) = M'\beta_{d'}\gamma_*(c, \alpha) \\ & \searrow \iota_{(c, \alpha)} & & & \swarrow \iota'_{(c, \alpha)} \\ & & \varinjlim_{\Psi/d} \text{Res}_{\beta_d} M \xrightarrow{\text{LK}(\eta)_d} \varinjlim_{\Psi/d} \text{Res}_{\beta_d} M' & & \\ & \swarrow \text{LK}_\Psi M(\gamma) & \dashrightarrow & \swarrow \text{LK}_\Psi M'(\gamma) & \\ \varinjlim_{\Psi/d'} \text{Res}_{\beta_{d'}} M & & & & \varinjlim_{\Psi/d'} \text{Res}_{\beta_{d'}} M' \\ & \swarrow \theta_{\gamma_*(c, \alpha)} & & & \swarrow \theta'_{\gamma_*(c, \alpha)} \\ & & \varinjlim_{\Psi/d'} \text{Res}_{\beta_{d'}} M \xrightarrow{\hspace{2cm}} \varinjlim_{\Psi/d'} \text{Res}_{\beta_{d'}} M' & & \end{array}$$

donde el morfismo  $\varinjlim_{\Psi/d'} \text{Res}_{\beta_{d'}} M \rightarrow \varinjlim_{\Psi/d'} \text{Res}_{\beta_{d'}} M'$  es el único que hace conmutar el cuadrado más grande del diagrama. Además tenemos el diagrama que surge de la construcción de  $\text{LK}(\eta)_{d'}$ :

$$\begin{array}{ccc} M\beta_{d'}(c', \alpha') & \xrightarrow{\eta_{\beta_{d'}(c', \alpha')}} & M'\beta_{d'}(c', \alpha') \\ \downarrow \theta_{(c', \alpha')} & & \downarrow \theta'_{(c', \alpha')} \\ \varinjlim_{\Psi/d'} \text{Res}_{\beta_{d'}} M & \xrightarrow{\text{LK}_\Psi(\eta)_{d'}} & \varinjlim_{\Psi/d'} \text{Res}_{\beta_{d'}} M' \end{array}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \text{LK}_\Psi(\eta)_{d'} \text{LK}_\Psi M(\gamma) \iota_{(c, \alpha)} &= \text{LK}_\Psi(\eta)_d \theta_{\gamma_*(c, \alpha)} \\ &= \theta'_{\gamma_*(c, \alpha)} \eta_{\beta_{d'}(\gamma_*(c, \alpha))} \\ &= \theta'_{\gamma_*(c, \alpha)} \eta_{\beta_d(\gamma_*(c, \alpha))}. \end{aligned}$$

El morfismo  $\text{LK}_\Psi M'(\gamma) \text{LK}_\Psi(\eta)_d: \varinjlim_{\Psi/d} \text{Res}_{\beta_d} M \rightarrow \varinjlim_{\Psi/d} \text{Res}_{\beta_d} M'$  es el único tal que  $\text{LK}_\Psi M'(\gamma) \text{LK}_\Psi(\eta)_d \iota_{(c, \alpha)} = \theta'_{\gamma_*(c, \alpha)} \eta_{\beta_d(c, \alpha)}$ . El cálculo anterior nos muestra que  $\text{LK}_\Psi(\eta)_{d'} \text{LK}_\Psi M(\gamma)$  lo cumple y por lo tanto tenemos el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{LK}_\Psi M(d) & \xrightarrow{\text{LK}_\Psi(\eta)_d} & \text{LK}_\Psi M'(d) \\ \downarrow \text{LK}_\Psi M(\gamma) & & \downarrow \text{LK}_\Psi M'(\gamma) \\ \text{LK}_\Psi M(d') & \xrightarrow{\text{LK}_\Psi(\eta)_{d'}} & \text{LK}_\Psi M'(d') \end{array}$$

por el cual podemos afirmar que definimos una transformación natural  $\text{LK}_\Psi(\eta): \text{LK}_\Psi M \rightarrow \text{LK}_\Psi M'$ . Más aún, se comporta bien con respecto a la composición de transformaciones naturales de funtores  $C \rightarrow T$ , es decir,  $M \xrightarrow{\eta} M \xrightarrow{\eta'} M''$  nos produce la transformación natural  $\text{LK}_\Psi(\eta\eta') = \text{LK}_\Psi(\eta')\text{LK}_\Psi(\eta)$ . Esto se debe a la forma en que se contruye  $\text{LK}_\Psi(\eta'\eta)_d$  con la propiedad universal del límite directo como se ve en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \eta' \eta & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 \text{Res}_{\beta_d} M(c, \alpha) & \xrightarrow{\eta} & \text{Res}_{\beta_d} M'(c, \alpha) & \xrightarrow{\eta'} & \text{Res}_{\beta_d} M''(c, \alpha) \\
 \downarrow \iota_{(c, \alpha)} & & \downarrow \iota'_{(c, \alpha)} & & \downarrow \iota''_{(c, \alpha)} \\
 \lim_{\Psi/d} \text{Res}_{\beta_d} M & \xrightarrow{\text{LK}_\Psi(\eta)_d} & \lim_{\Psi/d} \text{Res}_{\beta_d} M' & \xrightarrow{\text{LK}_\Psi(\eta')_d} & \lim_{\Psi/d} \text{Res}_{\beta_d} M'' \\
 & & \text{LK}_\Psi(\eta'\eta)_d & & 
 \end{array}$$

Entonces podemos concluir que  $\text{LK}_\Psi$  es un funtor de  $T^C$  a  $T^D$ .  $\square$

Después de verificar los detalles anteriores podemos demostrar que el funtor restricción  $\text{Res}_\Psi$  tiene dos funtores adjuntos, un adjunto derecho y un adjunto izquierdo.

**Proposición 1.5.8.**  $\text{LK}_\Psi$  es adjunto izquierdo del funtor  $\text{Res}_\Psi$  y  $\text{RK}_\Psi$  es adjunto derecho de  $\text{Res}_\Psi$ .

**Demostración.** Para cada funtor  $M: C \rightarrow T$  definimos el funtor

$$\Sigma_M: M \rightarrow \text{Res}_\Psi \text{LK}_\Psi M,$$

de forma que para cada  $c$  en  $\text{Obj}(C)$  obtenemos el morfismo

$$(\Sigma_M)_c: M(c) = \text{Res}_{\beta_{\Psi(c)}} M(c, 1_{\Psi(c)}) \rightarrow \lim_{\Psi/\Psi(c)} \text{Res}_{\beta_{\Psi(c)}} M$$

de la definición del límite. Para cada funtor  $N: D \rightarrow T$  definimos

$$\Lambda_N: \text{LK}_\Psi \text{Res}_\Psi N \rightarrow N,$$

de tal manera que para cada objeto  $d$  en  $D$ , el morfismo

$$(\Lambda_N)_d: \lim_{\Psi/d} \text{Res}_{\beta_d} \text{Res}_\Psi N \rightarrow N(d)$$

proviene de la propiedad universal del límite directo utilizando los morfismos  $N(\epsilon): \text{Res}_{\beta_d} \text{Res}_\Psi N(a, \epsilon) \rightarrow N(d)$ . Notemos que  $\Sigma_M$  es una transformación natural, siempre tenemos que

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Res}_{\beta_{\Psi(c)}} M(c, 1_{\Psi(c)}) = M(c) & \xrightarrow{(\Sigma_M)_c} & \lim_{\Psi/\Psi(c)} \text{Res}_{\beta_{\Psi(c)}} M \\
 \downarrow \text{Res}_{\gamma_*} \text{Res}_{\beta_{\Psi(c)}} M(c, 1_{\Psi(c)}) = M(\gamma) & \searrow \theta_{\Psi(\gamma)_*(c, 1_{\Psi(c)})} & \downarrow \text{LK}_\Psi M(\Psi(\gamma)) \\
 \text{Res}_{\beta_{\Psi(c')}} M(c', 1_{\Psi(c')}) & \xrightarrow{(\Sigma_{M'})_{c'}} & \lim_{\Psi/\Psi(c')} \text{Res}_{\beta_{\Psi(c')}} M
 \end{array}$$

conmuta porque es el diagrama que se utilizó para construir el morfismo  $\text{LK}_\Psi M(\Psi(\gamma))$ . El caso de  $\Lambda_N$  es parecido.  $\Lambda_N$  es una transformación natural pues para cada  $d \in \text{Obj}(D)$ ,  $(\Lambda_N)_d$  está definido con una propiedad universal.

El diagrama que utilizamos para definir  $\text{LK}_\Psi(\eta)_{\Psi(c)}$  en la [Proposición 1.5.7](#)

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Res}_{\beta_{\Psi(c)}} M(c, 1_{\Psi(c)}) & \xrightarrow{\iota_{(c, 1_{\Psi(c)})}} & \lim_{\Psi/\Psi(c)} \text{Res}_{\beta_{\Psi(c)}} M\Psi \\
 \eta_{\beta_{\Psi(c)}} \downarrow & & \downarrow \text{LK}_\Psi(\eta)_{\Psi(c)} \\
 \text{Res}_{\beta_{\Psi(c)}} M' & \xrightarrow{\iota'_{(c, 1_{\Psi(c)})}} & \lim_{\Psi/\Psi(c)} \text{Res}_{\beta_{\Psi(c)}} M'
 \end{array}$$

es exactamente el mismo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 M(c) & \xrightarrow{(\Sigma_M)_c} & \text{LK}_\Psi M(\Psi(c)) \\
 \eta_c \downarrow & & \downarrow \text{LK}_\Psi(\eta)_{\Psi(c)} \\
 M'(c) & \xrightarrow{(\Sigma_{M'})_c} & \text{LK}_\Psi M'(\Psi(c))
 \end{array}$$

por lo tanto,  $\Sigma_M$  definen una transformación natural  $\Sigma: 1_{T^C} \rightarrow \text{Res}_\Psi \text{LK}_\Psi$ . Para ver que las  $\Lambda_N$  definen una transformación natural de  $\text{LK}_\Psi \text{Res}_\Psi$  a  $1_{T^D}$  tenemos que analizar el siguiente diagrama que surge de hacer las construcciones  $(\Lambda_N)_d, (\Lambda_{N'})_d$  y  $\text{LK}_\Psi(\text{Res}_\Psi)_d$ ,

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Res}_{\beta_d} \text{Res}_\Psi N(a, \epsilon) & & \xrightarrow{N(\epsilon)} & & N(d) \\
 & \searrow \iota_{(a, \epsilon)} & & \searrow (\Lambda_N)_d & \\
 & & \text{LK}_\Psi(N\Psi)(d) & & \downarrow \eta_d \\
 \eta_{\Psi(a)} \downarrow & & \downarrow \text{LK}_\Psi(\text{Res}_\Psi \eta)_d & & \\
 & & \text{LK}_\Psi(N'\Psi)(d) & \xrightarrow{(\Lambda_{N'})_d} & N'(d) \\
 & \nearrow \iota'_{(a, \epsilon)} & & \nearrow N'(\epsilon) & \\
 \text{Res}_{\beta_d} \text{Res}_\Psi N'(a, \epsilon) & & & & 
 \end{array}$$

$\eta_d(\Lambda_N)_d$  es el único morfismo tal que  $\eta_d(\Lambda_N)_d \iota_{(a, \epsilon)} = \eta_d N(\epsilon)$ . Pero utilizando las partes del diagrama que sabemos que conmutan tenemos

$$\begin{aligned}
 (\Lambda_{N'})_d \text{LK}_\Psi(\text{Res}_\Psi \eta)_d \iota_{(a, \epsilon)} &= N'(\epsilon) \eta_{\Psi(a)} \\
 &= \eta_d N(\epsilon).
 \end{aligned}$$

La última igualdad se debe a la definición de  $\eta$  como transformación natural pues  $\epsilon: \Psi(a) \rightarrow d$ . Así que  $(\Lambda_{N'})_d \text{LK}_\Psi(\text{Res}_\Psi \eta)_d = \eta_d(\Lambda_N)_d$ .

Ahora veremos que  $\text{Res}_\Psi \xrightarrow{\text{Res}_\Psi \Sigma} \text{Res}_\Psi \text{LK}_\Psi \text{Res}_\Psi \xrightarrow{\Lambda_{\text{Res}_\Psi}} \text{Res}_\Psi$  es  $1_{\text{Res}_\Psi}$ . Para cada objeto  $c$  de  $C$  tenemos que el diagrama conmuta por definición de  $(\Lambda_{\text{Res}_\Psi N})_c$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Res}_{\beta_{\Psi(c)}} N(a, 1_a) & \xrightarrow{(\text{Res}_\Psi \Sigma)_c} & \lim_{\Psi/\Psi(c)} \text{Res}_{\beta_{\Psi(c)}} \text{Res}_\Psi N \\
 & \searrow N(1_{\Psi(c)}) & \downarrow (\Lambda_{\text{Res}_\Psi N})_c \\
 & & (\text{Res}_\Psi N)(c)
 \end{array}$$

Ahora veremos que  $\text{LK}_\Psi \xrightarrow{\Sigma \text{LK}_\Psi} \text{LK}_\Psi \text{Res}_\Psi \text{LK}_\Psi \xrightarrow{\text{LK}_\Psi \Lambda} \text{LK}_\Psi$  es la transformación natural  $1_{\text{LK}_\Psi}$ . Para un funtor  $M: C \rightarrow T$  y  $d \in \text{Obj}(D)$ , calculamos

$$(\text{LK}_\Psi M)(d) \xrightarrow{(\text{LK}_\Psi \Lambda_M)_d} (\text{LK}_\Psi \text{Res}_\Psi \text{LK}_\Psi M)(d) \xrightarrow{(\Lambda_{\text{LK}_\Psi M})_d} (\text{LK}_\Psi M)(d)$$

pero reescribiéndolo queda como

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Psi/d}} \text{Res}_{\beta_d} M \rightarrow \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Psi/d}} \text{Res}_{\beta_d} \text{Res}_{\Psi} \text{LK}_{\Psi} M \rightarrow \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Psi/d}} \text{Res}_{\beta_d} M$$

el cual es igual a aplicarle  $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Psi/d}} \text{Res}_{\beta_d}$  a

$$M \rightarrow \text{Res}_{\Psi} \text{LK}_{\Psi} M \rightarrow M$$

el cual es la identidad porque en

$$\text{Res}_{\beta_{\Psi(c)}} M(c, 1_{\Psi(c)}) = M(c) \rightarrow \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Psi/\Psi(c)}} \text{Res}_{\beta_{\Psi(c)}} M \rightarrow M(c) = \text{Res}_{\beta_{\Psi(c)}}(c, 1_{\Psi(c)})$$

$(c, 1_{\Psi(c)})$  es un objeto terminal de  $\Psi/\Psi(c)$ .

Por el [Teorema 1.2.5](#),  $\text{LK}_{\Psi}$  es adjunto izquierdo de  $\text{Res}_{\Psi}$ . □

Cuando tenemos un grupo  $G$  y un subgrupo  $H$ , la inclusión determina un functor  $\Psi: \beta H \rightarrow \beta G$ , del cual podemos calcular  $\text{LK}_{\Psi}$  y  $\text{RK}_{\Psi}$ . Para el siguiente ejemplo  $\bullet$  denotará el único objeto de  $\beta H$  y el único objeto de  $\beta G$ . Veremos que en este caso las extensiones de Kan corresponden a las construcciones de inducción y coinducción.

**Ejemplo 1.5.9.** Tomamos  $T = R\text{-mód}$ , y  $M: \beta H \rightarrow R\text{-mód}$ . Por definición  $\text{LK}_{\Psi} M(\bullet) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Psi/\bullet}} \text{Res}_{\beta_{\bullet}} M$ .

Demostremos que  $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ \Psi/\bullet}} \text{Res}_{\beta_{\bullet}} M \cong RG \otimes_{RH} M$ . Cabe señalar que, aunque  $M$  es un functor, se tiene el

abuso de notación con  $M(\bullet) = M$  y más adelante veremos que esto lo convierte en un  $RH$ -módulo izquierdo, donde  $RH$  y  $RG$  son los anillos de grupo de  $H$  y  $G$  respectivamente.

Notemos que los objetos de  $\Psi/\bullet$  son de la forma  $(\bullet, g)$  con  $g \in G$  y un morfismo de  $(\bullet, g) \rightarrow (\bullet, g')$  es un morfismo  $g'^{-1}g$  que está en  $\beta H$ . Definimos un homomorfismo  $\iota_{(\bullet, g)}: M\beta_{\bullet}(\bullet, g) = M \rightarrow RG \otimes_{RH} M$  como  $m \mapsto g \otimes m$ . Calculando, tenemos que  $\iota_{(\bullet, g')} M\beta_{\bullet}(g'^{-1}g)(m) = \iota_{(\bullet, g')}(g'^{-1}gm) = g' \otimes g'^{-1}gm$ . Ya que  $RG$  lo vemos como un  $RH$ -módulo derecho, tenemos que  $g' \otimes g'^{-1}gm = g'g'^{-1}g \otimes m = g \otimes m$ , pues  $g'^{-1}g \in H$ . Esto quiere decir que las  $\iota_{(\bullet, g)}$  hacen conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M\beta_{\bullet}(\bullet, g) & & \\ \downarrow M\beta_{\bullet}(g'^{-1}g) & \searrow \iota_{(\bullet, g)} & \\ & & RG \otimes_{RH} M \\ & \nearrow \iota_{(\bullet, g')} & \\ M\beta_{\bullet}(\bullet, g') & & \end{array}$$

Supongamos que existe un  $R$ -módulo  $L$  junto con morfismos  $\iota'_{(\bullet, g)}$  que hacen conmutar el diagrama anterior. Definimos  $\theta: RG \otimes_{RH} M \rightarrow L$  definiéndolo en los elementos de la forma  $(g \otimes m)$  como  $\theta(g \otimes m) = \iota'_{(\bullet, g)}(m)$  y luego extendiéndolo linealmente. El morfismo  $\theta$  está bien definido porque el morfismo  $RG \times M \rightarrow L$  definido por  $(g, m) \mapsto \iota'_{(\bullet, g)}(m)$  es  $RH$ -bilineal. De inmediato se ve que  $\theta \iota_{(\bullet, g)} = \iota'_{(\bullet, g)}$ . Si existiera  $\theta': RH \otimes_{RH} M \rightarrow L$  con  $\theta' \iota_{(\bullet, g)} = \iota'_{(\bullet, g)}$ , entonces  $\theta \iota_{(\bullet, g)} = \theta' \iota_{(\bullet, g)}$ , de aquí se sigue que  $\theta(g \otimes m) = \theta'(g \otimes m)$ . Por lo tanto  $RG \otimes_{RH} M \cong \text{LK}_{\Psi} M(\bullet)$ . Además este isomorfismo define un isomorfismo natural de  $\text{LK}_{\Psi} M$  a  $RG \otimes_{RH} M$  si se ve a  $RG \otimes_{RH} M$  como un functor de  $\beta G$  a  $R\text{-mód}$ , con  $(RG \otimes_{RH} M)(g)(g' \otimes m) = gg' \otimes m$ . Esto quiere decir que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{LK}_{\Psi} M(\bullet) & \xrightarrow{\cong} & RG \otimes_{RH} M \\ \text{LK}_{\Psi} M(g) \downarrow & & \downarrow (RG \otimes_{RH} M)(g) \\ \text{LK}_{\Psi} M(\bullet) & \xrightarrow{\cong} & RG \otimes_{RH} M \end{array}$$

conmuta, lo cual se puede ver tomando un elemento  $[m]$  en  $\text{LK}_\Psi M(\bullet)$  tal que  $m \in M\beta_\bullet(\bullet, g')$  y calculando  $\theta \text{LK}_\Psi M(g)([m]) = \theta([m])$  con  $m \in M\beta_\bullet(\bullet, gg')$  y  $\theta([m]) = gg' \otimes m$  es el isomorfismo  $\text{LK}_\Psi M(\bullet) \cong RG \otimes_{RH} M$ . Por otro lado,  $(RG \otimes_{RH} M)(g)\theta([m]) = (RG \otimes_{RH} M)(g)(g' \otimes m) = gg' \otimes m$  lo que comprueba la conmutatividad del diagrama.  $RG \otimes_{RH} \_$  es llamada la inducción, así que ahora comprobaremos que  $\text{LK}_\Psi$  es equivalente a la inducción. Para esto solo nos falta ver que el isomorfismo  $\theta$  define una transformación natural de  $\text{LK}_\Psi$  a  $RG \otimes_{RH} \_$ . Tomamos una transformación natural  $\eta: M \rightarrow M'$  y  $[m] \in \text{LK}_\Psi M$  con  $m \in M\beta_\bullet(\bullet, g)$ . El elemento  $m$  es enviado, por medio del isomorfismo  $\theta$ , a  $g \otimes m$  el cual, a su vez, es enviado por  $RG \otimes \eta_\bullet$  a  $g \otimes \eta_\bullet(m)$ . Por otro lado,  $\text{LK}_\Psi(\eta)([m]) = [\eta_\bullet(m)]$ , y  $\theta([\eta_\bullet(m)]) = g \otimes \eta_\bullet(m)$ . Esto nos dice que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{LK}_\Psi M & \xrightarrow{\theta} & RG \otimes_{RH} M \\ \text{LK}_\Psi(\eta) \downarrow & & \downarrow RG \otimes \eta \\ \text{LK}_\Psi M' & \xrightarrow{\theta} & RG \otimes_{RH} M' \end{array}$$

es conmutativo.

En el caso de  $\text{RK}_\Psi M$  tenemos un isomorfismo  $\text{RK}_\Psi M \cong \text{Hom}_{RH}(RG, M)$  que se puede ver tomando los morfismos estructurales del límite como  $\theta_{(g, \bullet)}: \text{Hom}_{RH}(RG, M) \rightarrow M\beta^\bullet(g, \bullet)$  con  $\theta_{(g, \bullet)}(f) = f(g)$ , donde  $(g, \bullet)$  es un objeto en la bajocategoría  $\bullet/\Psi$  y  $f: RG \rightarrow M$  es un homomorfismo  $G$ -equivariante. Ya que un morfismo de  $(g, \bullet)$  a  $(g', \bullet)$  en  $\bullet/\Psi$  es de la forma  $g'g^{-1} \in H$ , tenemos que  $M\beta^\bullet(g'g^{-1})\theta_{(g, \bullet)}(f) = M\beta^\bullet(g'g^{-1})(f(g)) = g'g^{-1}f(g) = f(g'g^{-1}g) = f(g') = \theta_{(g', \bullet)}$ . Si existiera  $L$  junto con morfismos  $\theta'_{(g, \bullet)}: L \rightarrow M\beta^\bullet(g, \bullet)$  tal que  $M\beta^\bullet(g'g^{-1})\theta'_{(g, \bullet)} = \theta'_{(g', \bullet)}$ , entonces podemos definir un morfismo  $\tau: L \rightarrow \text{Hom}_{RH}(RG, M)$  como  $\tau(a)$  el morfismo de  $RG$  a  $M$  que envía  $g \in RG$  a  $\theta'_{(g, \bullet)}(a)$ . Esto hace que  $\theta_{(g, \bullet)}\tau = \theta'_{(g, \bullet)}$  y que sea único cumpliendo esta propiedad. Por lo tanto  $\text{RK}_\Psi M \cong \text{Hom}_{RH}(RG, M)$ . Mas aún, define una equivalencia viendo a  $\text{Hom}_{RH}(RG, M)$  como el funtor que envía  $g \in \text{Mor}(\beta G)$  al morfismo  $f \mapsto gf$ , con  $(gf)(g') = (f(g^{-1}g'))$ . El funtor  $\text{Hom}_{RH}(RG, \_)$  es llamado la coinducción y similar al caso de  $\text{LK}_\Psi$ , tenemos que  $\text{RK}_\Psi$  es equivalente a la coinducción.

El hecho de que un funtor tenga un adjunto izquierdo es muy bueno. Pero que tenga, además, un adjunto derecho hace que dicho funtor se convierta en una excelente herramienta. Por ejemplo, tenemos que  $\text{Res}_\Psi$  preserva epimorfismos y por consiguiente que  $\text{LK}_\Psi$  preserva proyectivos.

**Definición 1.5.10.** Sea  $C$  una categoría. Un morfismo  $f: x \rightarrow y$  es un epimorfismo (o es épico) si para cualesquiera  $h, g: y \rightarrow z$  con  $hf = gf$  implica que  $h = g$ . Es un monomorfismo (o es mónico) si para cualesquiera  $r, s: w \rightarrow x$  con  $fr = fs$  implica que  $r = s$ .

Si  $R$  es un anillo con unitario, en la categoría  $R$ -mód los morfismos épicos son los homomorfismos suprayectivos, esto no suele ser así siempre.

**Definición 1.5.11.** Sea  $C$  una categoría. Un objeto  $P$  en  $\text{Obj}(C)$  es proyectivo si para todo diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & & \downarrow f \\ x & \xrightarrow{\kappa} & y \end{array}$$

con  $\kappa$  épico, existe un morfismo  $f': P \rightarrow x$  que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \swarrow f' & \downarrow f \\ x & \xrightarrow{\kappa} & y \end{array}$$

En la categoría  $R$ -mód con  $R$  un campo, cada  $R$ -módulo es proyectivo, incluso son  $R$ -módulos libres.

**Proposición 1.5.12.** *Adjuntos izquierdos preservan epimorfismos.*

**Demostración.** Sean  $\Psi: C \rightarrow D$  adjunto izquierdo de  $\Phi: D \rightarrow C$  con adjunción  $\Omega$ ,  $\alpha: x \rightarrow y$  un epimorfismo en  $C$  y  $\tau, \tau': \Psi(y) \rightarrow z$  morfismos en  $D$  tales que  $\tau\Psi(\alpha) = \tau'\Psi(\alpha)$ . Notemos que  $\Omega(\tau)$  y  $\Omega(\tau')$  son morfismos de  $y$  a  $\Phi(z)$  en  $C$ . Además, la naturalidad de  $\Omega$  nos da un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_D(\Psi(x), z) & \longrightarrow & \text{Mor}_C(x, \Phi(z)) \\ \Psi(\alpha)^* \uparrow & & \uparrow \alpha^* \\ \text{Mor}_D(\Psi(y), z) & \longrightarrow & \text{Mor}_C(y, \Phi(z)) \end{array}$$

lo cual nos dice que  $\Omega\Psi(\alpha)^*(\tau) = \alpha^*\Omega(\tau)$ , se sigue que  $\Omega(\tau\Psi(\alpha)) = \Omega(\tau)\alpha$ . Similarmente obtenemos que  $\Omega(\tau'\Psi(\alpha)) = \Omega(\tau')\alpha$ . Esto implica que  $\Omega(\tau)\alpha = \Omega(\tau')\alpha$ . Ya que  $\alpha$  es epimorfismo se tiene  $\Omega(\tau) = \Omega(\tau')$  y por tanto  $\tau = \tau'$ .  $\square$

Con el resultado anterior tenemos una consecuencia inmediata para el functor restricción.

**Corolario 1.5.13.** *Sea  $\Psi: C \rightarrow D$  un functor covariante entre categorías pequeñas y  $T$  una categoría completa y cocompleta. Entonces  $\text{Res}_\Psi: T^D \rightarrow T^C$  preserva epimorfismos.*

**Demostración.** Se sigue directamente de la [Proposición 1.5.12](#) y de que la [Proposición 1.5.8](#) nos dice que  $\text{Res}_\Psi$  es adjunto izquierdo de  $\text{RK}_\Psi$ .  $\square$

**Proposición 1.5.14.** *Sea  $\Psi: C \rightarrow D$  un functor covariante entre categorías pequeñas y  $T$  una categoría completa y cocompleta. Entonces  $\text{LK}_\Psi$  preserva proyectivos.*

**Demostración.** Denotemos por  $\Omega$  la adjunción del par  $\text{LK}_\Psi$  y  $\text{Res}_\Psi$ . Recordemos que  $\text{LK}_\Psi: T^D \rightarrow T^C$  y  $\text{Res}_\Psi: T^C \rightarrow T^D$  son funtores contravariantes. Tomemos un objeto proyectivo  $P$  en  $T^D$  y un diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \text{LK}_\Psi P & \\ & \downarrow \tau & \\ A & \xrightarrow{\eta} & B \end{array}$$

en  $T^C$ , donde  $\eta$  es un epimorfismo, es decir, es una transformación natural épica. Por adjunción tenemos que  $\Omega(\tau): P \rightarrow \text{Res}_\Psi B$  y nos da un diagrama

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow \Omega(\tau) & \\ \text{Res}_\Psi A & \xrightarrow{\text{Res}_\Psi \eta} & \text{Res}_\Psi B \end{array}$$

en el cual, por el [Corolario 1.5.13](#),  $\text{Res}_\Psi \eta$  es un epimorfismo. Entonces existe un morfismo  $f$  que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow \Omega(\tau) & \\ \text{Res}_\Psi A & \xrightarrow{\text{Res}_\Psi \eta} & \text{Res}_\Psi B \\ & \swarrow f & \end{array}$$

pues  $P$  es proyectivo. Con el inverso de la adjunción  $\Omega$ , tenemos un morfismo  $\Omega^{-1}(f): \text{LK}_\Psi P \rightarrow A$ . Por la naturalidad de  $\Omega$ , para los funtores  $P$ ,  $A$  y el morfismo  $\eta: A \rightarrow B$  tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{T^D}(\text{LK}_\Psi P, A) & \longrightarrow & \text{Mor}_{T^C}(P, \text{Res}_\Psi A) \\ \eta_* \downarrow & & \downarrow (\text{Res}_\Psi \eta)_* \\ \text{Mor}_{T^D}(\text{LK}_\Psi P, B) & \longrightarrow & \text{Mor}_{T^C}(P, \text{Res}_\Psi B) \end{array}$$

Así que para el morfismo  $\Omega^{-1}(f)$ , tenemos que  $(\text{Res}_{\Psi}\eta)_*\Omega(\Omega^{-1}(f)) = \Omega(\eta_*\Omega^{-1}(f))$ , esto es,  $\Omega(\eta\Omega^{-1}(f)) = \text{Res}_{\Psi}\eta \circ f$ , pero  $\text{Res}_{\Psi}\eta \circ f = \Omega(\tau)$ , por lo tanto  $\eta\Omega^{-1}(f) = \tau$ .  $\square$

# Capítulo 2

## Cohomología de categorías

A partir de una categoría y un anillo conmutativo con unidad  $R$  podemos obtener una  $R$ -álgebra. Dependiendo si la categoría es finita esta  $R$ -álgebra será unitaria o no.

Para calcular la homología o cohomología simplicial de una categoría podemos asociarle un espacio topológico a dicha categoría que respete equivalencias entre categorías e isomorfismos. También se le puede asociar un complejo con el cual obtengamos este cálculo sin tener que llevarlo a un espacio topológico.

En este capítulo veremos algunas herramientas que nos servirán para calcular la homología o cohomología de una categoría pequeña. Aunque la mayoría del contenido de este capítulo es estándar, también contiene algunos resultados importantes para el desarrollo de los capítulos 3 y 4 como lo es el isomorfismo  $LK_{\tau}B_*^C \cong \mathbb{C}_*(\tau/ )$  para un funtor  $\tau: C \rightarrow D$ .

### 2.1. Álgebras de categorías

Sea  $C$  una categoría pequeña y  $R$  anillo conmutativo con unitario, se define  $RC$  como el  $R$ -módulo libre cuya base es el conjunto de morfismos en  $C$ . Definimos el producto de los elementos de la base de  $RC$  como  $\alpha \cdot \beta = \alpha \circ \beta$  si  $\alpha \circ \beta$  existe y 0 en otro caso. Se extiende el producto a  $RC$  de manera  $R$ -bilineal. De esta manera  $RC$  se convierte en una  $R$ -álgebra asociativa.

Notemos que si  $\text{Obj}(C)$  es finito y  $1_x$  es el morfismo identidad del objeto  $x$  en  $C$ ,  $\sum_{x \in \text{Obj}(C)} 1_x$  es la identidad de  $RC$ , pues dado un morfismo  $\alpha$ ,

$$\sum_{x \in \text{Obj}(C)} 1_x \cdot \alpha = \sum_{x \in \text{Obj}(C)} 1_x \alpha = \alpha$$

ya que todos los productos  $1_x \alpha$  serán 0 excepto cuando  $x$  sea el codominio de  $\alpha$  y en este caso  $1_x \alpha = \alpha$ .

**Teorema 2.1.1** (B. Mitchell). *Sea  $R$  un anillo con unitario. Si  $C$  es una categoría finita, existe una equivalencia entre la categoría de  $RC$ -módulos por la izquierda y la categoría de funtores covariantes  $R$ -mód <sup>$C$</sup> .*

**Demostración.** Primero definamos un funtor  $\Psi: RC\text{-mód} \rightarrow R\text{-mód}^C$  de la siguiente manera:  $\Psi(M) =$

$\Psi_M$  donde

$$\begin{array}{ccc} \Psi_M : C & \longrightarrow & R\text{-mód}^C \\ & & x \longmapsto 1_x \cdot M \\ & & \begin{array}{ccc} x & & 1_x \cdot M \\ \alpha \downarrow & \longmapsto & \downarrow l_\alpha \\ y & & 1_y \cdot M \end{array} \end{array}$$

donde  $l_\alpha$  es el homomorfismo  $k$ -lineal que envía  $m \in M$  a  $\alpha \cdot m = (1_y \alpha 1_x) \cdot m \in 1_y \cdot M$ .

Para un homomorfismo de  $RC$ -módulos  $\gamma: M \rightarrow M'$ , definimos  $\Psi(\gamma)$  como la transformación natural  $\tau^\gamma: \Psi_M \rightarrow \Psi_{M'}$  que asigna a un objeto  $x$  en  $C$ , el homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \tau_x^\gamma : 1_x \cdot M & \longrightarrow & 1_x \cdot M' \\ & & 1_x \cdot m \longmapsto 1_x \cdot \gamma(m). \end{array}$$

Este homomorfismo está bien definido pues  $\gamma$  es un homomorfismo de  $RC$ -módulos. Además, si tomamos  $1_x m \in 1_x \cdot M$ , y  $f: x \rightarrow y$

$$\begin{aligned} \Psi_{M'}(f) \tau_x^\gamma(1_x m) &= \Psi_{M'}(f)(1_x \gamma(m)) \\ &= f \gamma(m) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tau_y^\gamma \Psi_M(f)(1_x m) &= \tau_y^\gamma(fm) \\ &= \tau_x^\gamma(1_y f 1_x m) \\ &= 1_y \gamma(fm) \\ &= 1_y f \gamma(m) \\ &= f \gamma(m), \end{aligned}$$

la penúltima igualdad es cierta pues  $\gamma$  es un homomorfismo de  $RC$ -módulos. Esto quiere decir que el siguiente diagrama conmuta y por lo tanto  $\psi(\gamma)$  es una transformación natural

$$\begin{array}{ccc} 1_x \cdot M & \xrightarrow{\tau_x^\gamma} & 1_x \cdot M' \\ \Psi_M(f) \downarrow & & \downarrow \Psi_{M'}(f) \\ 1_y \cdot M & \xrightarrow{\tau_y^\gamma} & 1_y \cdot M' \end{array}$$

Ahora definimos el funtor

$$\phi: R\text{-mód}^C \longrightarrow RC\text{-mód}$$

$$\begin{array}{ccc} H & \longmapsto & \bigoplus_{x \in \text{Obj}(C)} H(x) \\ \eta \downarrow & \longmapsto & \downarrow (\eta_x)_{x \in \text{Obj}(C)} \\ D & & \bigoplus_{x \in \text{Obj}(C)} D(x) \end{array}$$

La acción de un elemento  $\alpha: z \rightarrow y$  de  $RC$  sobre  $\bigoplus_{x \in \text{Obj}(C)} H(x)$  está dada por  $\alpha(m_x)_x = (\alpha m_x)_x$  donde

$$\alpha m_x = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ H(\alpha)(m_z) & \text{si } \alpha: x \rightarrow y. \end{cases}$$

Ya que  $\eta$  es una transformación natural, se cumple que  $D(\alpha)\eta_x = \eta_y H(\alpha)$ , así  $(\eta_x)_x$  es un homomorfismo de  $RC$ -módulos con la acción descrita anteriormente.

Ahora calculamos las composiciones: Para un  $RC$ -módulo  $M$  tenemos

$$\begin{aligned} \phi\Psi(M) &= \phi(\Psi_M) \\ &= \bigoplus_{x \in \text{Obj}(C)} \Psi_M(x) \\ &= \bigoplus_{x \in \text{Obj}(C)} 1_x \cdot M \\ &= M. \end{aligned}$$

Esto es debido a que dado  $m \in M$ ,

$$\begin{aligned} m &= \left( \sum_{x \in \text{Obj}(C)} 1_x \right) m \\ &= \sum_{x \in \text{Obj}(C)} 1_x m \in \bigoplus_{x \in \text{Obj}(C)} 1_x \cdot M. \end{aligned}$$

Y por otra parte, si  $\alpha$  es un morfismo de  $RC$ -módulos

$$\begin{aligned} \phi\Psi(\alpha) &= \phi(\tau^\alpha) \\ &= (\tau_x^\alpha)_x \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Por otro lado, para un funtor  $F: C \rightarrow R\text{-mód}$ ,

$$\begin{aligned} \Psi\phi(F) &= \Psi \left( \bigoplus_{x \in \text{Obj}(C)} F(x) \right) \\ &= \Psi \bigoplus_{x \in \text{Obj}(C)} F(x). \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \Psi \bigoplus_{x \in \text{Obj}(C)} F(x)(y) &= 1_y \cdot \bigoplus_{x \in \text{Obj}(C)} F(x) \\ &\cong 1_y \cdot F(y) \end{aligned}$$

dado por la proyección  $\mu_y$  en la coordenada  $y \in \text{Obj}(C)$ , debido a la acción definida sobre  $\bigoplus_{x \in \text{Obj}(C)} F(x)$ .

Así que este isomorfismo lo usamos para definir un isomorfismo natural  $\mu$ , entre el funtor  $\Psi \bigoplus_{x \in \text{Obj}(C)} F(x)$  y el funtor  $F$ . Puesto que si tenemos un morfismo  $\beta: y \rightarrow z$  en  $C$  y  $1_y m \in 1_y \cdot F(y)$ ,

$$F(\beta)\mu_y(1_y m) = F(\beta)(m)$$

y

$$\mu_z \Psi \bigoplus_{x \in \text{Obj}(C)} F(x)(\beta)(1_y m) = F(\beta)(m).$$

Por último se verifica que para cualquier transformación natural  $\eta: F \rightarrow F'$ , el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \Psi \bigoplus_{x \in \text{Obj}(C)} F(x) & \xrightarrow{\cong} & F \\ \Psi \phi(\eta) \downarrow & & \downarrow \eta \\ \Psi \bigoplus_{x \in \text{Obj}(C)} F'(x) & \xrightarrow{\cong} & F' \end{array}$$

Por lo tanto, tenemos que  $\Psi \phi \simeq 1_{R\text{-mód}^C}$ . □

Esto quiere decir que no existe gran diferencia entre los funtores  $C \rightarrow R\text{-mód}$  y los  $RC$ -módulos. En el [Ejemplo 1.5.9](#), el Teorema de Mitchell, nos dice que si  $H$  es un grupo finito,  $M$  es un  $RH$ -módulo izquierdo. Además, si  $G$  es finito, al demostrar que existe una equivalencia entre  $\text{LK}_\Psi M$  y  $RG \otimes_{RH} M$ , probamos que el isomorfismo era un isomorfismo de  $RG$ -módulos.

## 2.2. Cohomología simplicial de categorías.

Empezaremos definiendo un concepto que nos es útil para poder calcular la cohomología de una categoría pequeña.

**Definición 2.2.1.** Un conjunto simplicial es una sucesión de conjuntos  $X_0, X_1, \dots$ , junto con funciones

$$d_i: X_n \rightarrow X_{n-1},$$

$$s_i: X_n \rightarrow X_{n+1},$$

para  $0 \leq i \leq n$ , llamadas caras y degeneraciones, respectivamente, que cumplen las siguientes ecuaciones

simpliciales:

$$\begin{aligned}
d_i d_j &= d_{j-1} d_i && \text{si } i < j \\
d_i s_j &= s_{j-1} d_i && \text{si } i < j \\
d_j s_j &= d_{j+1} s_j = 1 \\
d_i s_j &= s_j d_{i-1} && \text{si } i > j + 1 \\
s_i s_j &= s_{j+1} s_i && \text{si } i \leq j.
\end{aligned}$$

A los elementos de  $X_n$  se les llama  $n$ -símplices. Un  $n$ -símplex  $x$  es degenerado si  $x = s_j y$  para algún  $j$  y no degenerado en otro caso.

Ahora veremos que a toda categoría pequeña se le puede asociar un conjunto simplicial de una manera muy sencilla.

**Definición 2.2.2.** Definimos el nervio de una categoría pequeña  $C$ , como el conjunto simplicial  $NC$  definido de la siguiente manera:  $NC_0 = \text{Obj}(C)$  y para  $n > 0$ ,  $NC_n$  es el conjunto de las  $n$ -cadenas de morfismos de  $C$  que se pueden componer. Las caras  $d_i: NC_{n+1} \rightarrow NC_n$  con  $0 < i < n$  están definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
d_i( x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{i-1} \xrightarrow{\alpha_i} x_i \xrightarrow{\alpha_{i+1}} x_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{n+1} ) \\
= x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}\alpha_i} x_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{n+1}
\end{aligned}$$

y las degeneraciones  $s_i: NC_n \rightarrow NC_{n+1}$  están dadas por:

$$\begin{aligned}
s_i( x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{i-1} \xrightarrow{\alpha_i} x_i \xrightarrow{\alpha_{i+1}} x_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_n ) \\
= x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{i-1} \xrightarrow{\alpha_i} x_i \xrightarrow{1_{x_i}} x_i \xrightarrow{\alpha_{i+1}} x_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{n+1}
\end{aligned}$$

Para  $i = 0$ ,

$$\begin{aligned}
d_0( x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{i-1} \xrightarrow{\alpha_i} x_i \xrightarrow{\alpha_{i+1}} x_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{n+1} ) \\
= x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{i-1} \xrightarrow{\alpha_i} x_i \xrightarrow{\alpha_{i+1}} x_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{n+1}
\end{aligned}$$

Para  $i = n$ ,

$$\begin{aligned}
d_n( x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{i-1} \xrightarrow{\alpha_i} x_i \xrightarrow{\alpha_{i+1}} x_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{n+1} ) \\
= x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{i-1} \xrightarrow{\alpha_i} x_i \xrightarrow{\alpha_{i+1}} x_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_n
\end{aligned}$$

Generalmente la cara  $i$  es denotada como

$$x_0 \rightarrow \cdots \rightarrow x_{i-1} \rightarrow \widehat{x_i} \rightarrow x_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow x_{n+1}$$

Es fácil ver que el nervio de una categoría es, en verdad, un conjunto simplicial.

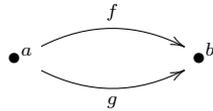
A partir del nervio de una categoría nos falta un paso para poder calcular su homología.

**Definición 2.2.3.** Sea  $C$  una categoría pequeña,  $NC$  su nervio y  $R$  un anillo conmutativo con elemento unitario. Se puede construir un complejo (normalizado) de  $R$ -módulos, denotado por  $\mathbb{C}_*(C, R)$ , tomando  $\mathbb{C}_n(C, R)$  como el  $R$ -módulo libre generado por los elementos no degenerados de  $NC_n$ , es decir, las cadenas de morfismos en  $C$  que se pueden componer que no contienen identidades.

Este complejo de  $R$ -módulos tiene como diferencial  $\partial_n: \mathbb{C}_n(C, R) \rightarrow \mathbb{C}_{n-1}(C, R)$ , con  $\partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$ .

La homología  $n$ -ésima de este complejo es la homología  $n$ -ésima de la categoría  $C$  con coeficientes en  $R$  y se denota  $H_n(C, R)$ . Para calcular la cohomología de  $C$ , basta con tomar el cocomplejo  $\mathbb{C}^*(C, R) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}_*(C, \mathbb{Z}), R)$ .

**Ejemplo 2.2.4.** Sea  $C$  la siguiente categoría:



Su nervio  $NC$  está dado por:

$$NC_0 = \{a, b\}$$

$$NC_1 = \{f, g, 1_a, 1_b\}$$

$$NC_2 = \{ a \xrightarrow{1_a} a \xrightarrow{f} b, a \xrightarrow{1_a} a \xrightarrow{g} b, a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{1_b} b, a \xrightarrow{g} b \xrightarrow{1_b} b, \\ a \xrightarrow{1_a} a \xrightarrow{1_a} a, b \xrightarrow{1_b} b \xrightarrow{1_b} b \}$$

A partir de  $n = 2$  todos los elementos de  $NC_n$  son degenerados. Todo lo que se necesita calcular son  $d_0$ , y  $d_1$  para los 1-símplices  $f$  y  $g$ :

$$\begin{aligned} d_0(f) &= b \\ d_0(g) &= b \\ d_1(f) &= a \\ d_1(g) &= a \end{aligned}$$

Si tomamos  $R = \mathbb{Z}$  tenemos que  $\mathbb{C}_*(C, \mathbb{Z})$  sería el complejo:

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}\{f\} \oplus \mathbb{Z}\{g\} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}\{a\} \oplus \mathbb{Z}\{b\} \longrightarrow 0$$

donde  $\partial = d_0 - d_1$ , así que  $\partial(f) = b - a$  y  $\partial(g) = b - a$ .

Ahora calculamos los grupos de homología de  $C$ :

$$H_n(C, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \frac{\text{Ker}(0)}{\text{Im}(\partial)} = \frac{\mathbb{Z}\{a\} \oplus \mathbb{Z}\{b\}}{\mathbb{Z}\{b-a\}} \cong \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \frac{\text{Ker}(\partial)}{\text{Im}(0)} = \frac{\mathbb{Z}\{f-g\}}{0} \cong \mathbb{Z} & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

**Proposición 2.2.5.** Sea  $C$  una categoría pequeña,  $R$  un anillo con unitario. Si  $C$  tiene un objeto final,  $\mathbb{C}_*(C, R)$  es exacto.

**Demostración.** Sea  $z \in \text{Obj}(C)$  el objeto final. Denotaremos  $\mathbb{C}_n(C, R)$  como  $\mathbb{C}_n$ .

Por definición  $\mathbb{C}_n$  es el  $R$ -módulo libre generado por las  $n$ -cadenas de morfismos que se pueden componer en  $C$ . Ahora definimos

$$s_n: \mathbb{C}_n \longrightarrow \mathbb{C}_{n+1}$$

$$a_0 \rightarrow \dots \rightarrow a_n \longmapsto a_0 \rightarrow \dots \rightarrow a_n \rightarrow z.$$

Esta función está bien definida ya que el morfismo  $a_n \rightarrow z$  existe siempre y es único. Luego extendemos por linealidad. Ahora calculamos

$$\partial_{n+1}s_n(a_0 \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_{n-1}} a_{n-1} \xrightarrow{\gamma_n} a_n) = \partial_{n+1}(a_0 \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_n} a_n \longrightarrow z)$$

$$\begin{aligned}
 &= ( a_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_n} a_n \longrightarrow z ) + \sum_{i=1}^n (-1)^i ( a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_{i-1} \rightarrow \widehat{a}_i \rightarrow a_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow a_n \rightarrow z ) \\
 &\quad + (-1)^{n+1} ( a_0 \xrightarrow{\gamma_1} \cdots \xrightarrow{\gamma_{n-1}} a_{n-1} \longrightarrow a_n )
 \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
 &s_{n-1} \partial_n ( a_0 \xrightarrow{\gamma_1} \cdots \xrightarrow{\gamma_{n-1}} a_{n-1} \longrightarrow a_n ) = s_{n-1} ( ( a_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_{n-1}} a_{n-1} \longrightarrow a_n ) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i ( a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_{i-1} \rightarrow \widehat{a}_i \rightarrow a_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow a_n ) \\
 &\quad + (-1)^n ( a_0 \xrightarrow{\gamma_1} \cdots \xrightarrow{\gamma_{n-2}} a_{n-2} \longrightarrow a_{n-1} ) ) \\
 &= ( a_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_n} a_n \longrightarrow z ) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i ( a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_{i-1} \rightarrow \widehat{a}_i \rightarrow a_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow a_n \rightarrow z ) \\
 &\quad + (-1)^n ( a_0 \xrightarrow{\gamma_1} \cdots \xrightarrow{\gamma_{n-1}} a_{n-1} \longrightarrow z )
 \end{aligned}$$

Ya que los morfismos  $a_j \rightarrow z$  son únicos, tenemos que

$$(\partial_{n+1} s_n - s_{n-1} \partial_n) ( a_0 \xrightarrow{\gamma_1} \cdots \xrightarrow{\gamma_{n-1}} a_{n-1} \longrightarrow a_n ) = (-1)^{n+1} ( a_0 \xrightarrow{\gamma_1} \cdots \xrightarrow{\gamma_{n-1}} a_{n-1} \longrightarrow a_n ).$$

Como  $(\mathbb{C}_*, \partial_*)$  es un complejo, se sigue que  $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ , es decir,  $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subseteq \text{Ker}(\partial_n)$ .

Si tomamos  $( a_0 \xrightarrow{\gamma_1} \cdots \xrightarrow{\gamma_{n-1}} a_{n-1} \xrightarrow{\gamma_n} a_n ) \in \text{Ker}(\partial_n)$ , entonces

$$\partial_{n+1} s_{n+1} ( a_0 \xrightarrow{\gamma_1} \cdots \xrightarrow{\gamma_{n-1}} a_{n-1} \xrightarrow{\gamma_n} a_n ) = (-1)^{n+1} ( a_0 \xrightarrow{\gamma_1} \cdots \xrightarrow{\gamma_{n-1}} a_{n-1} \xrightarrow{\gamma_n} a_n )$$

Así que  $(-1)^{n+1} ( a_0 \xrightarrow{\gamma_1} \cdots \xrightarrow{\gamma_{n-1}} a_{n-1} \xrightarrow{\gamma_n} a_n ) \in \text{Im}(\partial_{n+1})$  y consecuentemente

$( a_0 \xrightarrow{\gamma_1} \cdots \xrightarrow{\gamma_{n-1}} a_{n-1} \xrightarrow{\gamma_n} a_n ) \in \text{Im}(\partial_{n+1})$ , de esta forma tenemos que  $\text{Ker}(\partial_n) \subseteq \text{Im}(\partial_{n+1})$ . Por lo tanto el complejo es exacto.  $\square$

Sin embargo, podemos definir los  $n$ -ésimos grupos de cohomología de una categoría pequeña  $C$  con coeficientes en un funtor  $M: C \rightarrow R\text{-mod}$  por medio de un funtor derivado:

$$H^n(C; M) \cong \text{Ext}_{RC}^n(\underline{R}, M).$$

Para poder calcularlo, necesitamos una resolución de  $RC$ -módulos para el  $RC$ -módulo  $\underline{R}$ . Donde  $\underline{R}$  es el funtor constante definido en el [Ejemplo 1.1.14](#).

**Definición 2.2.6.** Sea  $C$  una categoría pequeña. Definimos  $B_*^C = \mathbb{C}_*(1_C / \ , R)$ , es decir, para cada objeto  $x$  de  $C$ , tenemos que  $B_*^C(x) = \mathbb{C}_*(1_C/x, R)$ . Esto es, para cada  $n \geq 0$ ,

$$B_n^C(x) = \bigoplus R \{ (a_0, \alpha_0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow (a_n, \alpha_n) \},$$

donde cada  $\alpha_i: a_i \rightarrow x$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Si tenemos  $\epsilon: x \rightarrow y$

$$B_n^C(\epsilon) ( (a_0, \alpha_0) \xrightarrow{\gamma_1} \cdots \xrightarrow{\gamma_n} (a_n, \alpha_n) ) = (a_0, \epsilon \alpha_0) \xrightarrow{\gamma_1} \cdots \xrightarrow{\gamma_n} (a_n, \epsilon \alpha_n),$$

pues si  $(a, \beta)$  es un objeto en  $1_C/x$ ,  $\beta: a \rightarrow x$ , entonces  $\epsilon\beta: a \rightarrow y$  y por lo tanto  $(a, \epsilon\beta)$  es un objeto en  $1_C/y$ . Además cuando tenemos una  $n$ -cadena de morfismos que se pueden componer en  $1_C/x$ ,  $(a_0, \alpha_0) \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_n} (a_n, \alpha_n)$ , cada  $\gamma_i$  debe hacer conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} a_{i-1} & & \\ \downarrow \gamma_i & \searrow \alpha_{i-1} & \\ & & x \\ & \nearrow \alpha_i & \\ a_i & & \end{array}$$

es decir,  $\alpha_{i-1} = \alpha_i \gamma_i$ , se sigue que  $\epsilon\alpha_{i-1} = \epsilon\alpha_i \gamma_i$  y por tanto la  $n$ -cadena de morfismos

$$(a_0, \epsilon\alpha_0) \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_n} (a_n, \epsilon\alpha_n)$$

existe en  $1_C/y$ .

Este complejo resulta ser una resolución proyectiva de  $RC$ -módulos para  $\underline{R}$ , llamado la resolución barra de  $C$ .

**Proposición 2.2.7.**  $B_*^C$  es una resolución proyectiva de  $RC$ -módulos para  $\underline{R}$ .

**Demostración.**  $B_*^C$  es un complejo de  $RC$ -módulos, pues de la definición podemos ver que es un funtor de  $C$  a  $R$ -mód. Ahora veamos que cada  $B_n^C$  es proyectivo como  $RC$ -módulo. Para ello, notemos que una  $n$ -cadena de morfismos en  $1_C/x$ , tiene la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc} a_0 & & \\ \downarrow \gamma_1 & \searrow \alpha_0 & \\ \vdots & & x \\ \downarrow \gamma_n & \nearrow \alpha_n & \\ a_n & & \end{array}$$

con todos los posibles triángulos conmutativos, lo cual nos da la  $n+1$ -cadena  $a_0 \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_n} a_n \xrightarrow{\alpha_n} x$ ,

recíprocamente si tenemos la  $n+1$ -cadena  $a_0 \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_n} a_n \xrightarrow{\alpha_n} x$ , podemos recuperar la  $n$ -cadena

original escribiendo  $(a_0, \alpha_n \gamma_n \dots \gamma_1) \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_{n-1}} (a_{n-1}, \alpha_n \gamma_n) \xrightarrow{\gamma_n} (a_n, \alpha_n)$ . Entonces la asignación

$(a_0, \alpha_0) \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_n} (a_n, \alpha_n) \mapsto a_0 \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_n} a_n \xrightarrow{\alpha_n} x$  nos determina un isomorfismo de  $R$ -módulos.

Ahora si ordenamos la nueva base de  $B_n^C$  visto como  $RC$ -módulo, es decir,  $\bigoplus_{x \in \text{Obj}(C)} B_n^C(x)$  de

tal manera que tengamos  $R$ -módulos libres generados por los conjuntos  $\{ a_0 \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_n} a_n \longrightarrow x \}$

tal que cuando se elimina el último objeto  $x$ , queda la misma cadena  $a_0 \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_{n-1}} a_{n-1} \xrightarrow{\gamma_n} a_n$ .

Esto nos determina un funtor

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}\{a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n\}: C & \longrightarrow & R\text{-mód} \\ x \vdash & \longrightarrow & R\{a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n \xrightarrow{\alpha} x\} \\ \begin{array}{c} x \\ \epsilon \downarrow \\ y \end{array} \vdash & \longrightarrow & \begin{array}{c} R\{a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n \xrightarrow{\alpha} x\} \\ \downarrow T_\epsilon \\ R\{a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n \xrightarrow{\alpha'} y\} \end{array} \end{array}$$

$T_\epsilon$  está definido en la base como

$$T_\epsilon: R\{a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n \xrightarrow{\alpha} x\} \longrightarrow R\{a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n \xrightarrow{\alpha'} y\}$$

$$a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n \xrightarrow{\alpha} x \vdash \longrightarrow a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n \xrightarrow{\epsilon\alpha} y.$$

Este funtor está bien definido y hay una equivalencia natural entre  $\mathcal{R}\{a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n\}$  y el funtor  $RMor(a_n, \_)$  pues la asignación  $(a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n \rightarrow x) \mapsto (a_n \rightarrow x)$  determina un isomorfismo de  $R$ -módulos entre  $R\{a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n \xrightarrow{\alpha} x\}$  y  $RMor(a_n, x)$ . Además este isomorfismo hace que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}\{a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n\}(x) & \xrightarrow{\cong} & RHom(a_n, x) \\ T_\epsilon \downarrow & & \downarrow \epsilon_* \\ \mathcal{R}\{a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n\}(y) & \xrightarrow{\cong} & RHom(a_n, y) \end{array}$$

conmute. Con esto tenemos un isomorfismo de  $RC$ -módulos

$$B_n^C \cong \bigoplus_{a_0 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n} RHom_C(a_n, \_).$$

Esto termina la prueba ya que  $RHom_C(a_n, \_)$  es un módulo proyectivo, puesto que  $RC = RMorC = \bigoplus_{x \in \text{Obj}(C)} Hom_C(x, \_)$  como  $RC$ -módulo. Como suma de proyectivos es proyectivo, podemos concluir que  $B_n^C$  es un  $RC$ -módulo proyectivo.

Solo nos falta que es una resolución de  $\underline{R}$ . Para esto notemos que el objeto  $(x, 1_x)$  es un objeto final en la categoría  $1_C/x$ : dado un objeto  $(a, \alpha)$  el único morfismo  $(a, \alpha) \rightarrow (x, 1_x)$  es  $\alpha$  pues necesariamente para que  $\beta$  sea morfismo en esta categoría debe hacer conmutar este diagrama

$$\begin{array}{ccc} a & & \\ \beta \downarrow & \searrow \alpha & \\ & & x \\ & \nearrow 1_x & \\ x & & \end{array}$$

Como toda categoría con objeto final es contráctil, la homología  $n$ -ésima de  $B_*^C$  es igual a cero para  $n > 0$ , esto pasa si y solo si  $B_*^C$  es exacta. Para finalizar tomamos la aumentación  $\epsilon: B_0^C(c) \rightarrow R$ , la cual manda

un elemento de la base,  $(x, \alpha) \in \text{Obj}(1_C/c)$ , al 1 de  $R$ . Es fácil ver que la aumentación es sobreyectiva y define un homomorfismo de  $RC$ -módulos. Además  $\epsilon \partial_1 = 0$  y si tomamos un elemento

$$x = r_1(x_1, \alpha_1) \rightarrow \dots \rightarrow r_n(x_n, \alpha_n) \in \text{Ker}(\epsilon),$$

con  $(x_i, \alpha_i) \in B_0^C(c)$ , entonces tomamos los morfismos  $\alpha_i: (x_i, \alpha_i) \rightarrow (c, 1_c)$ , así

$$\partial_1(-r_1\alpha_1 - \dots - r_n\alpha_n) = -r_1(c, 1_c) - \dots - r_n(c, 1_c) + r_1(x_1, \alpha_1) + \dots + r_n(x_n, \alpha_n).$$

Ya que  $\epsilon(x) = 0$ , se cumple que  $r_1 + \dots + r_n = 0$ , así que  $-r_1(c, 1_c) - \dots - r_n(c, 1_c) = 0$  y tenemos que

$$\partial_1(-r_1\alpha_1 - \dots - r_n\alpha_n) = x.$$

Con esto ya tenemos que  $B_*^C \xrightarrow{\epsilon} \underline{R} \longrightarrow 0$  es exacto.  $\square$

Para finalizar este capítulo, tenemos un resultado importante acerca de la resolución barra y de la extensión de Kan izquierda.

**Proposición 2.2.8.** *Sean  $\tau: C \rightarrow D$  un functor covariante entre categorías pequeñas. Entonces  $\text{LK}_\tau B_*^C \cong \mathbb{C}_*(\tau/ \_, R)$  como  $RD$ -complejos.*

**Demostración.** Fijemos  $n \geq 0$ . Entonces por definición  $\text{LK}_\tau B_n^C = \varinjlim_{\tau/_-} \text{Res}_{\beta_-} \mathbb{C}_n(1_C/ \_, R)$ . Para cada objeto  $d \in \text{Obj}(D)$ , y cada objeto  $(c, \alpha) \in \text{Obj}(\tau/d)$  podemos definir un morfismo  $\iota_{(c, \alpha)}: \mathbb{C}_n(1_C/ \_) \beta_d(c, \alpha) = \mathbb{C}_n(1_C/c) \rightarrow \mathbb{C}_n(\tau/d)$  mandando una  $n$ -cadena  $(c_0, \alpha_0) \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha_n)$  de  $1_C/c$  a la  $n$ -cadena  $(c_0, \alpha\tau(\alpha_0)) \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha\tau(\alpha_n))$ . Si tenemos un morfismo  $\gamma: (c, \alpha) \rightarrow (c', \alpha')$ , este induce un morfismo  $\gamma^*: \mathbb{C}_n(1_C/c) \rightarrow \mathbb{C}_n(1_C/c')$  el cual hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n(1_C/c) & & \\ \downarrow \gamma^* & \searrow \iota_{(c, \alpha)} & \\ & & \mathbb{C}_n(\tau/d) \\ & \nearrow \iota_{(c', \alpha')} & \\ \mathbb{C}_n(1_C/c') & & \end{array}$$

Para verificar lo anterior, tomemos un elemento de la base  $(c_0, \alpha_0) \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha_n)$  en  $\mathbb{C}_n(1_C/c)$ . Por un lado  $\iota_{(c, \alpha)}((c_0, \alpha_0) \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha_n)) = (c_0, \alpha\tau(\alpha_0)) \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha\tau(\alpha_n))$ . Por otro lado,  $\gamma^*$  envía el elemento  $(c_0, \alpha_0) \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha_n)$  a  $(c_0, \gamma\alpha_0) \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} (c_n, \gamma\alpha_n)$  y por último,  $\iota_{(c', \alpha')}$  envía el elemento anterior a  $(c_0, \alpha'\tau(\gamma\alpha_0)) \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha'\tau(\gamma\alpha_n))$ . Ya que  $\gamma: (c, \alpha) \rightarrow (c', \alpha')$  es un morfismo en  $\tau/d$ , tenemos que  $\alpha'\tau(\gamma) = \alpha$ , y el diagrama conmuta.

Ahora notemos que si  $(b_0, \beta_0) \xrightarrow{h_1} \dots \xrightarrow{h_n} (b_n, \beta_n)$  es una  $n$ -cadena de  $\tau/d$ , podemos obtener una en  $1_C/b_n$  de la siguiente manera: Cuando  $n = 0$ , un objeto  $(b_0, \beta_0)$  se envía a  $(b_0, 1_{b_0})$ , en general,  $(b_0, \beta_0) \xrightarrow{h_1} \dots \xrightarrow{h_n} (b_n, \beta_n)$  es enviada a  $(b_0, h_n h_{n-1} \dots h_1) \xrightarrow{h_1} (b_1, h_n \dots h_2) \xrightarrow{h_2} \dots \xrightarrow{h_n} (b_n, 1_{b_n})$ . Esta asignación cumple que

$$\iota_{(b_n, \beta_n)}((b_0, h_n h_{n-1} \dots h_1) \xrightarrow{h_1} (b_1, h_n \dots h_2) \xrightarrow{h_2} \dots \xrightarrow{h_n} (b_n, 1_{b_n})) = (b_0, \beta_0) \xrightarrow{h_1} \dots \xrightarrow{h_n} (b_n, \beta_n)$$

De esta manera, si existe otro  $R$ -módulo  $L$  junto con morfismos  $\iota'_{(c, \alpha)}: \mathbb{C}_n(1_C/c) \rightarrow L$  tal que para cualquier morfismo  $\gamma: (c, \alpha) \rightarrow (c', \alpha')$  tenemos que  $\iota'_{(c', \alpha')} \gamma^* = \iota'_{(c, \alpha)}$ , entonces podemos definir un homomorfismo

$\theta: \mathbb{C}_n(\tau/d) \rightarrow L$  como

$$\theta( (b_0, \beta_0) \xrightarrow{h_1} \cdots \xrightarrow{h_n} (b_n, \beta_n) ) = \iota'_{(b_n, \beta_n)}( (b_0, h_n h_{n-1} \cdots h_1) \xrightarrow{h_1} (b_1, h_n \cdots h_2) \xrightarrow{h_2} \cdots \xrightarrow{h_n} (b_n, 1_{b_n}) )$$

Este homomorfismo esta bien definido. Además, si empezamos tomando un elemento

$$(c_0, \alpha_0) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha_n)$$

en  $\mathbb{C}_n(1_C/c)$ , le aplicamos  $\iota_{(c, \alpha)}$  y posteriormente  $\theta$ , obtenemos

$$\iota'_{(c_n, \alpha_n)}( (c_0, f_n \cdots f_1) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, 1_{a_n}) ),$$

pero  $\alpha_n: (c_n, \alpha_n) \rightarrow (c, \alpha)$  es un morfismo en  $\tau/d$ , esto significa que

$$\iota_{(c, \alpha)} \alpha_n( (c_0, f_n \cdots f_1) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, 1_{a_n}) ) = \iota'_{(c_n, \alpha_n)}( (c_0, f_n \cdots f_1) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, 1_{a_n}) ),$$

ya que  $\alpha_n( (c_0, f_n \cdots f_1) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, 1_{a_n}) ) = (c_0, \alpha_0) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha_n)$  tenemos que  $\theta$  hace conmutar los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n(1_C/c) & \xrightarrow{\iota_{(c, \alpha)}} & \mathbb{C}_n(\tau/d) \xrightarrow{\theta} L \\ \downarrow \gamma^* & \searrow \iota'_{(c, \alpha)} & \uparrow \iota_{(c, \alpha)} \\ \mathbb{C}_n(1_C/c') & \xrightarrow{\iota_{(c', \alpha')}} & \mathbb{C}_n(\tau/d) \end{array}$$

y como consecuencia  $\mathbb{C}_n(\tau/d)$  cumple los axiomas de la definición del límite directo. Si tomamos como definición del colímite  $\varinjlim_{\tau/d} \text{Res}_{\beta_d} \mathbb{C}_n(1_C/d, R)$  el  $R$ -módulo visto en el Teorema 1.3.3, la propiedad universal del

límite directo nos da el isomorfismo  $\theta: \text{LK}_{\tau} B_n^C(d) \rightarrow \mathbb{C}_n(\tau/d)$  que envía  $[ (c_0, \alpha_0) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha_n) ]$  con  $(c_0, \alpha_0) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha_n) \in B_n^C \beta_d(c, \alpha)$  a  $(c_0, \alpha_n) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha_n)$ . Ahora verificaremos que  $\theta$  define una transformación natural y por lo tanto el isomorfismo  $\text{LK}_{\tau} B_n^C \cong \mathbb{C}_n(\tau/d, R)$  es de  $RD$ -módulos. Sea  $\gamma: d \rightarrow d'$  un morfismo en  $D$ . Entonces el morfismo  $\text{LK}_{\tau} B_n^C(\gamma)$  envía

$$[ (c_0, \alpha_0) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha_n) ]$$

con  $(c_0, \alpha_0) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha_n) \in B_n^C \beta_d(c, \alpha)$  a

$$[ (c_0, \alpha_0) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha_n) ],$$

pero con  $(c_0, \alpha_0) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha_n) \in B_n^C \beta_d(c, \gamma\alpha)$  y aplicándole el isomorfismo tenemos que

$$\theta([ (c_0, \alpha_0) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha_n) ]) = (c_0, \gamma\alpha_n) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, \gamma\alpha_n).$$

Por otro lado, si primero aplicamos el isomorfismo,

$$\theta([ (c_0, \alpha_0) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha_n) ]) = (c_0, \alpha_n) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha_n),$$

y por medio del morfismo  $\mathbb{C}_n(\tau/d)(\gamma)$  obtenemos la  $n$ -cadena

$$(c_0, \gamma\alpha_n) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, \gamma\alpha_n),$$

obteniendo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LK}_\tau B_n^C(d) & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{C}_n(\tau/d) \\ \mathrm{LK}_{\tau, B_n^C}(\gamma) \downarrow & & \downarrow \mathbb{C}_n(\tau/\_)(\gamma) \\ \mathrm{LK}_\tau B_n^C(d') & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{C}_n(\tau/d') \end{array}$$

es conmutativo. Para finalizar, debemos comprobar que este isomorfismo de  $kD$ -módulos define un isomorfismo de complejos de cadena, es decir, que conmuta con las diferenciales. Sea  $\partial_n: B_n^C \rightarrow B_{n-1}^C$  la diferencial de  $B_*^C$ , entonces  $\mathrm{LK}_\tau(\partial_n): \mathrm{LK}_\tau B_n^C \rightarrow \mathrm{LK}_\tau B_{n-1}^C$  es la diferencial del complejo  $\mathrm{LK}_\tau B_*^C$ , el cual toma un elemento  $[x_n]$  en  $\mathrm{LK}_\tau B_n^C(d)$  con  $x_n \in B_n^C \beta_d(c, \alpha)$  y lo envía a  $[\partial_n(x_n)]$ , ahora con  $\partial_n(x_n) \in B_{n-1}^C \beta_d(c, \alpha)$ . De esta manera,

$$\mathrm{LK}_\tau(\partial_n)([ (c_0, \alpha_0) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha_n) ]) = \left[ \sum_{i=0}^n (c_0, \alpha_0) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_i} (\widehat{c_i, \alpha_i}) \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha_n) \right]$$

y con el isomorfismo  $\theta$ , obtenemos  $\sum_{i=0}^n (c_0, \alpha\tau(\alpha_0)) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_i} (\widehat{c_i, \alpha\tau(\alpha_i)}) \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha\tau(\alpha_n))$ . Ahora, aplicando primero el isomorfismo  $\theta$ , obtenemos  $(c_0, \alpha\tau(\alpha_0)) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha\tau(\alpha_n))$  y con la diferencial  $\partial'_n: \mathbb{C}_n(\tau/d) \rightarrow \mathbb{C}_{n-1}(\tau/d)$  resulta

$$\sum_{i=0}^n (c_0, \alpha\tau(\alpha_0)) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_i} (\widehat{c_i, \alpha\tau(\alpha_i)}) \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \xrightarrow{f_n} (c_n, \alpha\tau(\alpha_n)).$$

Esto quiere decir que  $\theta$  hace que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LK}_\tau B_n^C(d) & \xrightarrow{\mathrm{LK}_\tau(\partial_n)} & \mathrm{LK}_\tau B_{n-1}^C(d) \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ \mathbb{C}_n(\tau/d) & \xrightarrow{\partial'_n} & \mathbb{C}_{n-1}(\tau/d) \end{array}$$

conmute. □

### 2.3. Cohomología de Hochschild

En esta sección tendremos las principales definiciones y resultados sobre la homología y cohomología de Hochschild. En toda la sección  $k$  denotará un anillo conmutativo y  $A$  una  $k$ -álgebra la cual es proyectiva como  $k$ -módulo. Un  $A$ -bimódulo  $M$  es equivalente a un  $A^e = A \otimes_k A^{op}$ -módulo izquierdo vía  $(a \otimes a^{op})m = ama'$ . También,  $S_n(A) = \underbrace{A \otimes_k \cdots \otimes_k A}_{n+2 \text{ veces}}$  para  $n \geq -1$  es un  $A^e$ -módulo izquierdo con

$$(a \otimes a^{op})(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = (aa_0) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes (a_{n+1}a')$$

Definimos la diferencial  $b'_n: S_n(A) \rightarrow S_{n-1}(A)$  como

$$b'_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$$

Con estas definiciones  $(S_*(A), b')$  se convierte en un complejo, para ello veremos que  $b_{n-1}b_n = 0$ . Notemos que

$$b'_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$$

con  $d_i(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}$ .

$$b'_{n-1} b'_n = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \sum_{i=0}^n (-1)^i d_j d_i$$

Pero

$$\begin{aligned} d_j d_i(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) &= d_j(a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &= a_0 \otimes \cdots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d_{i-1} d_j(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) &= d_{i-1}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &= a_0 \otimes \cdots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}, \end{aligned}$$

esto es,  $d_j d_i = d_{i-1} d_j$  para  $0 \leq j < i \leq n$ . Por lo tanto  $b'_{n-1} b'_n = 0$ .

**Proposición 2.3.1.**  $(S_*(A), b'_*)$  es exacto.

**Demostración.** Definimos  $s_n: S_{n-1}(A) \rightarrow S_n(A)$  por  $s_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1$ . Ya que

$$b'_{n+1} s_{n+1}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n+1} d_i(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)$$

y

$$s_n b'_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^n s_n d_i(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n),$$

entonces  $b'_{n+1} s_{n+1} - s_n b'_n = 1_{S_n(A)}$ . Esto indica que el complejo  $(S_*(A), b'_*)$  es contráctil con homotopía  $(-1)^n s_n$ , y por tanto exacto.  $\square$

Ahora definimos  $\tilde{S}_n(A) = \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n \text{ veces}}$ . Entonces existe un isomorfismo de  $A^e$ -módulos

$$S_n(A) \cong (A \otimes A^{op}) \otimes \tilde{S}_n(A),$$

definido como  $a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \mapsto (a_0 \otimes a_{n+1}^{op}) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ . Como  $A$  es proyectivo como  $k$ -módulo, entonces  $\tilde{S}_n(A)$  es proyectivo como  $k$ -módulo y  $(A \otimes A^{op}) \otimes \tilde{S}_n(A)$  es un  $A^e$ -módulo proyectivo, por consecuencia  $S_n(A)$  es un  $A^e$ -módulo proyectivo. Así que  $S_*(A)$  es una resolución proyectiva de  $A$  por  $A^e$ -módulos.

Si  $M$  es un  $A$ -bimódulo o equivalentemente un  $A^e$ -módulo derecho con la acción  $m(a \otimes a'^{op}) = a' m a$ , se define el complejo de Hochschild  $S_n(A, M) = M \otimes_{A^e} S_n(A)$  con diferencial  $b_n = 1_M \otimes b'_n$ .

**Definición 2.3.2.** El  $n$ -ésimo grupo de homología de Hochschild  $HH_n(A, M)$  se define como la homología del complejo de Hochschild  $S_n(A, M)$

Ya que  $S_n(A)$  es una resolución proyectiva de  $A$  se sigue de la definición anterior que

$$HH_n(A, M) \cong \text{Tor}_n^{A^e}(M, A).$$

La cohomología de Hochschild  $HH^n(A, M)$  se define como la cohomología del complejo

$$\text{Hom}_{A^e}(S_n(A), M)$$

Y ya que  $S_n(A)$  es una resolución proyectiva, se sigue que

$$HH^n(A, M) \cong \text{Ext}_{A^e}^n(A, M).$$



en  $P$ , y  $H(\sigma)$  es el funtor:

$$H(\sigma) : P \longrightarrow P$$

$$x \longmapsto z$$

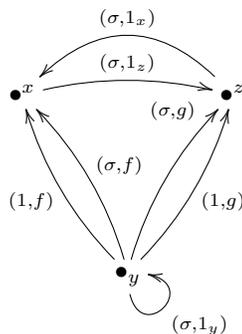
$$y \longmapsto y$$

$$z \longmapsto x$$

$$f \longmapsto g$$

$$g \longmapsto f$$

y que envía identidades a identidades. Es decir,  $P$  es una  $\mathbb{Z}_2$ -categoría con la acción determinada por  $\sigma x = z$ ,  $\sigma y = y$ ,  $\sigma z = x$ ,  $\sigma f = g$  y  $\sigma g = f$ . La categoría transportadora  $\mathbb{Z}_2 \ltimes P$  es



y las identidades,  $(1, 1_x)$ ,  $(1, 1_y)$  y  $(1, 1_z)$ . Un ejemplo de la composición es  $(\sigma, 1_z)(\sigma, f) = (1, g) : y \rightarrow z$ .

La categoría transportadora proviene de una construcción más general llamada la construcción de Grothendieck ([19]). Para realizarla necesitamos una categoría pequeña  $C$  y un funtor  $F : C \rightarrow \text{Cat}$ . Con esto obtenemos una categoría pequeña  $Gr_C F$ , cuyos objetos son pares  $(x, a)$  con  $x \in \text{Obj}(C)$  y  $a \in \text{Obj}(F(x))$ . Un morfismo  $(x, a) \rightarrow (x, b)$  es un par  $(\alpha, f)$  donde  $\alpha : x \rightarrow y$  es un morfismo en  $C$  y  $f : F(\alpha)(a) \rightarrow b$  es un morfismo en  $F(y)$ . Si  $(\alpha, f) \in \text{Mor}((x, a), (x, b))$  y  $(\beta, g) \in \text{Mor}((y, b), (z, c))$ , la composición  $(\beta, g)(\alpha, f) = (\beta\alpha, gF(\beta)(f))$ . Esto tiene sentido porque  $g : F(\beta)(b) \rightarrow c$  es un morfismo en  $F(z)$  y  $F(\beta) : F(y) \rightarrow F(z)$  es un funtor. Como  $f$  va de  $F(\beta)(a)$  a  $b$ , se tiene que  $F(\beta)(f) : F(\beta\alpha)(a) \rightarrow F(\beta)(b)$  es un morfismo en  $F(z)$ .

Toda  $G$ -categoría viene equipada, por definición, con un funtor  $F : \beta G \rightarrow \text{Cat}$ . Al realizar  $Gr_{\beta G} F$  obtenemos una categoría isomorfa a  $G \ltimes C$  de la manera obvia.

Sin embargo, la notación de la categoría transportadora se debe al producto semidirecto. Cuando se tiene una acción de un grupo  $G$  sobre otro grupo  $N$  a través de un homomorfismo  $\theta : G \rightarrow \text{Aut}(N)$  podemos inducir un funtor  $F : \beta G \rightarrow \text{Cat}$  del cual podemos obtener la categoría transportadora  $G \ltimes \beta N$ . Además existe un grupo  $N \rtimes G$  llamado el producto semidirecto de  $G$  y  $N$  con la acción  $\theta$  ([21]). Este grupo es  $N \times G$  con la operación  $(x, g)(y, h) = (x\theta(g)(y), gh)$ , donde  $\theta(g)(y)$  es  $gy$  en términos de la acción. Existe un isomorfismo de categorías  $H : G \ltimes \beta N \rightarrow \beta(N \rtimes G)$ . En este caso  $H(\bullet) = \bullet$  y  $H(g, x) = (x, g)$  para un morfismo  $(g, x)$ . Es facil ver que la identidad va a identidad y

$$H((g, x)(h, y)) = H(gh, x(gy)) = (x(gy), gh) = (x, g)(y, h) = H(g, x)H(h, y).$$

De la misma manera se puede definir el functor  $\psi: \beta(N \rtimes G) \rightarrow G \times \beta N$ . En objetos es obvia su definición, y  $\psi(x, g) = (g, x)$  para un morfismo  $(x, g)$ . De forma inmediata se ve que  $H$  y  $\psi$  son inversos.

**Nota 2.4.3.** Teniendo en cuenta la categoría transportadora podemos definir dos funtores muy importantes. Sea  $C$  una  $G$ -categoría y  $G \times C$  su categoría transportadora. Existen dos funtores  $\iota: C \rightarrow G \times C$  y  $\pi: G \times C \rightarrow \beta G$ . Primero vamos a definir  $\iota$ .

$$\begin{array}{ccc} \iota: C & \longrightarrow & G \times C \\ c & \longmapsto & c \\ \begin{array}{c} c \\ \downarrow \alpha \\ c' \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} c \\ \downarrow (e, \alpha) \\ c' \end{array} \end{array}$$

Claramente  $\iota(1_c) = 1_{\iota(c)} = (e, 1_c)$ , y  $\iota(\alpha\beta) = (e, \alpha\beta) = (e, \alpha)(e, \beta) = \iota(\alpha)\iota(\beta)$ . Ahora  $\pi$  es una proyección:

$$\begin{array}{ccc} \pi: G \times C & \longrightarrow & \beta G \\ c & \longmapsto & \bullet \\ \begin{array}{c} c \\ \downarrow (g, \alpha: gc \rightarrow c') \\ c' \end{array} & \longmapsto & \begin{array}{c} \bullet \\ \downarrow g \\ \bullet \end{array} \end{array}$$

En este caso es más fácil verificar que  $\pi$  es un functor.

# Capítulo 3

## Transfer en cohomología simplicial

En este capítulo veremos condiciones que aseguran la existencia de un transfer en cohomología simplicial para categorías transportadoras. La idea principal es utilizar el morfismo de Dwyer-Wilkerson ([5]), es decir, tomar cierta composición de morfismos de complejos que a su vez está motivada por Becker-Gottlieb ([2]). Los morfismos que Dwyer y Wilkerson utilizaron se pueden modificar ligeramente. Al final, obtenemos una manera de construir un morfismo llamado restricción y otro llamado transfer cuya composición es el número de Lefschetz de un  $G$ -functor.

En este capítulo consideraremos un campo  $k$ , un grupo finito  $G$  y  $C$  una categoría finita.

### 3.1. Morfismos de Dwyer-Wilkerson

La herramienta más importante para la construcción del morfismo de transfer es el morfismo de Dwyer-Wilkerson, que es la composición de varios morfismos de cadena los cuales veremos en esta sección.

Recordemos que dado un grupo finito  $G$ ,  $k$  representa el  $kG$ -módulo trivial. También podemos ver a  $k$  como el complejo  $\dots \rightarrow 0 \rightarrow k \rightarrow 0 \rightarrow \dots$ , donde  $k$  está en dimensión 0. El primer morfismo que analizaremos es

$$\mu: k \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}_*(C), \mathbb{C}_*(C))$$

$$a \longmapsto a \cdot 1_{\mathbb{C}_*(C)},$$

el cual corresponde a un morfismo de cadenas porque  $a \cdot 1_{\mathbb{C}_*(C)}$  está en  $\text{Hom}(\mathbb{C}_*(C), \mathbb{C}_*(C))_0$ .

#### Hom y $\otimes$ de complejos.

Nuestros complejos  $\mathbb{C}_*(C)$  son muy particulares, en las dimensiones negativas lo definimos como 0. Además de que  $C$  sea una categoría finita queremos que a partir de un número natural  $m$  se tenga que  $\mathbb{C}_m(C) = 0$ . Y cuando tomamos los coeficientes en un campo  $k$  (como en el caso de todo este capítulo), tenemos que cada  $\mathbb{C}_k(C)$  es finitamente generado. Estas características motivan la siguiente definición.

**Definición 3.1.1.** Sea  $C_*$  un complejo de cadena de  $R$ -módulos. Diremos que  $C_*$  es acotado si los módulos  $C_j$  son distintos de cero solo para un número finito de  $j$ . Es llamado de tipo finito si es acotado y todos los  $C_j$  son finitamente generados como  $R$ -módulos.

Los resultados para estos complejos de cadena son bastantes. Uno importante es el que presentamos a continuación, que es una generalización de un resultado en  $R$ -módulos (con ciertas condiciones).

**Proposición 3.1.2.** Sea  $k$  un campo y  $(\mathbb{C}_*, \partial_*)$  es un complejo de cadenas de  $k$ -módulos de tipo finito. Entonces  $\text{Hom}(\mathbb{C}_*, \mathbb{C}_*) \cong \mathbb{C}_*^* \otimes \mathbb{C}_*$ , donde  $\mathbb{C}_*^* = \text{Hom}_k(\mathbb{C}_*, k)$ .

**Demostración.** Para poder verificar esto, debemos hacer algunas precisiones. Primero, podemos asumir que el complejo  $\mathbb{C}_j = 0$  para  $j < 0$  y que  $d$  es el entero más grande para el cual  $\mathbb{C}_d \neq 0$ . Lo segundo es que al ser  $\mathbb{C}_*$  un complejo,  $\mathbb{C}_*^*$  es un cocomplejo. Para que tenga sentido  $\mathbb{C}_*^* \otimes \mathbb{C}_*$ , debemos tener dos complejos. Esto se logra volviendo a indexar el cocomplejo  $\mathbb{C}_*^*$  de tal forma que como complejo, en los índices positivos sea 0 y en el índice  $-j$  con  $j > 0$  se encuentra el módulo  $\mathbb{C}_j^*$ . Además, la diferencial  $\partial_{i+1}^*: \mathbb{C}_i^* \rightarrow \mathbb{C}_{i+1}^*$  del complejo  $\mathbb{C}_*^*$  se obtiene de calcular la diferencial vista en la [Definición 1.4.12](#) del complejo  $\text{Hom}(\mathbb{C}_*^*, k)$  viendo a  $k$  como el complejo  $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow k \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$ , resultando que  $\partial_{i+1}^*(f) = (-1)^{i+1} f \circ \partial_{i+1}$ , donde  $f: \mathbb{C}_i \rightarrow k$  es un homomorfismo de  $k$ -módulos.

De esta forma,  $(\mathbb{C}_*^* \otimes \mathbb{C}_*)_n = \bigoplus_j^{d-n} \mathbb{C}_j^* \otimes \mathbb{C}_{j+n}$ . Mientras que  $\text{Hom}(\mathbb{C}_*, \mathbb{C}_*)_n = \bigoplus_{i=0}^{d-n} \text{Hom}_k(\mathbb{C}_i, \mathbb{C}_{i+n})$ . Al módulo  $\mathbb{C}_j^* \otimes \mathbb{C}_{j+n}$  le corresponde el módulo  $\text{Hom}_k(\mathbb{C}_j, \mathbb{C}_{n+j})$ , de aquí podemos ver que los índices están en correspondencia.

Podemos utilizar los isomorfismos  $\text{Hom}(\mathbb{C}_i, \mathbb{C}_{i+n}) \cong \mathbb{C}_i^* \otimes \mathbb{C}_{i+n}$  dado por  $f \mapsto \sum_{j=1}^{d_i} [(c_j^i)^* \otimes f(c_j^i)]$ , donde  $\{c_1^i, \dots, c_{d_i}^i\}$  es una base de  $\mathbb{C}_i$ . El isomorfismo de cadenas se define como sigue: Si  $f \in \text{Hom}(\mathbb{C}_*, \mathbb{C}_*)_n$ , podemos descomponer a  $f$  como una suma de  $f_i: \mathbb{C}_i \rightarrow \mathbb{C}_{i+n}$ . El isomorfismo está determinado por

$$f \mapsto \sum_{i=0}^{d-n} (-1)^{(n+1)i} \left( \sum_{j=1}^{d_i} (c_j^i)^* \otimes f_i(c_j^i) \right),$$

donde  $d_i$  es la dimensión de  $\mathbb{C}_i$  y las  $c_j^i$  forman una base de  $\mathbb{C}_i$ . Para que este isomorfismo sea un isomorfismo entre complejos debemos ver que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\mathbb{C}_*, \mathbb{C}_*)_n & \xrightarrow{D_n} & \text{Hom}(\mathbb{C}_*, \mathbb{C}_*)_{n-1} \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ (\mathbb{C}_*^* \otimes \mathbb{C}_*)_n & \xrightarrow{D'_n} & (\mathbb{C}_*^* \otimes \mathbb{C}_*)_{n-1} \end{array}$$

Sea  $\Gamma: \text{Hom}(\mathbb{C}_*, \mathbb{C}_*)_n \rightarrow (\mathbb{C}_*^* \otimes \mathbb{C}_*)_n$  el isomorfismo anterior y  $f \in \text{Hom}(\mathbb{C}_*, \mathbb{C}_*)_n$ , es decir  $f = (f_i)$  con  $f_i: \mathbb{C}_i \rightarrow \mathbb{C}_{i+n}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \Gamma D_n(f) &= \Gamma(\partial_{i+n} f_i - (-1)^n f_{i-1} \partial_i)_i \\ &= \sum_{i=0}^{d-n+1} (-1)^{ni} \left( \sum_{j=1}^{d_i} (c_j^i)^* \otimes (\partial_{i+n} f_i - (-1)^n f_{i-1} \partial_i)(c_j^i) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{d-n+1} (-1)^{ni} \left( \sum_{j=1}^{d_i} (c_j^i)^* \otimes (\partial_{i+n} f_i)(c_j^i) - (-1)^n \sum_{j=1}^{d_i} (c_j^i)^* \otimes (f_{i-1} \partial_i)(c_j^i) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{d-n+1} (-1)^{ni} \sum_{j=1}^{d_i} (c_j^i)^* \otimes (\partial_{i+n} f_i)(c_j^i) + \sum_{i=0}^{d-n+1} (-1)^{ni} (-1)^{n+1} \sum_{j=1}^{d_i} (c_j^i)^* \otimes (f_{i-1} \partial_i)(c_j^i), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 D'_n \Gamma(f) &= D'_n \left( \sum_{i=0}^{d-n} (-1)^{(n+1)i} \sum_{j=1}^{d_i} (c_j^i)^* \otimes f_i(c_j^i) \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{d-n} (-1)^{(n+1)i} \left( \sum_{j=1}^{d_i} \partial_{i+1}^*(c_j^i)^* \otimes f_i(c_j^i) + (-1)^i (c_j^i)^* \otimes \partial_{i+n} f_i(c_j^i) \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{d-n} (-1)^{(n+1)i} \left( \sum_{j=1}^{d_i} \partial_{i+1}^*(c_j^i)^* \otimes f_i(c_j^i) + (-1)^i \sum_{j=1}^{d_i} (c_j^i)^* \otimes \partial_{i+n} f_i(c_j^i) \right) \\
 &= \sum_{i=0}^{d-n} (-1)^{(n+1)i} \sum_{j=1}^{d_i} \partial_{i+1}^*(c_j^i)^* \otimes f_i(c_j^i) + \sum_{i=0}^{d-n} (-1)^{(n+1)i} (-1)^i \sum_{j=1}^{d_i} (c_j^i)^* \otimes \partial_{i+n} f_i(c_j^i) \\
 &= \sum_{i=0}^{d-n} (-1)^{(n+1)i} \sum_{j=1}^{d_i} \partial_{i+1}^*(c_j^i)^* \otimes f_i(c_j^i) + \sum_{i=0}^{d-n} (-1)^{ni} \sum_{j=1}^{d_i} (c_j^i)^* \otimes \partial_{i+n} f_i(c_j^i).
 \end{aligned}$$

Notemos que  $f_{d-n+1} = 0$ , así que  $(c_j^{d-n+1})^* \otimes (\partial_{d+1} f_{d-n+1})(c_j^{d-n+1}) = 0$ , por lo que

$$\sum_{i=0}^{d-n+1} (-1)^{ni} \sum_{j=1}^{d_i} (c_j^i)^* \otimes (\partial_{i+n} f_i)(c_j^i) = \sum_{i=0}^{d-n} (-1)^{ni} \sum_{j=1}^{d_i} (c_j^i)^* \otimes \partial_{i+n} f_i(c_j^i).$$

Como  $\partial_{i+1}^*(c_j^i)^*$  es un morfismo de  $\mathbb{C}_{i+1}$  a  $k$ , se puede escribir como

$$\partial_{i+1}^*(c_j^i)^* = \sum_{l=1}^{d_{i+1}} \partial_{i+1}^*(c_j^i)^*(c_l^{i+1}) \cdot (c_l^{i+1})^*.$$

Utilizando propiedades del producto tensorial se cumple que

$$\partial_{i+1}^*(c_j^i)^* \otimes f_i(c_j^i) = \sum_{l=1}^{d_{i+1}} (\partial_{i+1}^*(c_j^i)^*(c_l^{i+1}) \cdot (c_l^{i+1})^* \otimes f_i(c_j^i)).$$

Pero  $\partial_{i+1}^*(c_j^i)^*(c_l^{i+1}) \in k$  y cada  $f_i$  es un homomorfismo de  $k$ -módulos, de esta manera se sigue que

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^{d_{i+1}} (\partial_{i+1}^*(c_j^i)^*(c_l^{i+1}) \cdot (c_l^{i+1})^* \otimes f_i(c_j^i)) &= \sum_{l=1}^{d_{i+1}} ((c_l^{i+1})^* \otimes \partial_{i+1}^*(c_j^i)^*(c_l^{i+1}) f_i(c_j^i)) \\
 &= (-1)^{i+1} \sum_{l=1}^{d_{i+1}} ((c_l^{i+1})^* \otimes (c_j^i)^* \partial_{i+1}(c_l^{i+1}) f_i(c_j^i)) \\
 &= (-1)^{i+1} \sum_{l=1}^{d_{i+1}} ((c_l^{i+1})^* \otimes f_i((c_j^i)^* \partial_{i+1}(c_l^{i+1}) c_j^i)),
 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{d_i} (\partial_{i+1}^*(c_j^i)^* \otimes f_i(c_j^i)) &= (-1)^{i+1} \sum_{j=1}^{d_i} \sum_{l=1}^{d_{i+1}} ((c_l^{i+1})^* \otimes f_i((c_j^i)^* \partial_{i+1}(c_l^{i+1}) c_j^i)) \\
 &= (-1)^{i+1} \sum_{l=1}^{d_{i+1}} \sum_{j=1}^{d_i} ((c_l^{i+1})^* \otimes f_i((c_j^i)^* \partial_{i+1}(c_l^{i+1}) c_j^i)) \\
 &= (-1)^{i+1} \sum_{l=1}^{d_{i+1}} \left( (c_l^{i+1})^* \otimes f_i \left( \sum_{j=1}^{d_i} (c_j^i)^* \partial_{i+1}(c_l^{i+1}) c_j^i \right) \right).
 \end{aligned}$$

Ya que  $\sum_{j=1}^{d_i} (c_j^i)^* \partial_{i+1}(c_l^{i+1}) c_j^i = \partial_{i+1}(c_l^{i+1})$  concluimos que

$$\sum_{j=1}^{d_i} \partial_{i+1}^*(c_j^i)^* \otimes f_i(c_j^i) = (-1)^{i+1} \sum_{l=1}^{d_{i+1}} (c_l^{i+1})^* \otimes f_i(\partial_{i+1}(c_l^{i+1}))$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{d-n} (-1)^{(n+1)i} \sum_{j=1}^{d_i} \partial_{i+1}^*(c_j^i)^* \otimes f_i(c_j^i) &= \sum_{i=0}^{d-n} (-1)^{(n+1)i} (-1)^{i+1} \sum_{l=1}^{d_{i+1}} (c_l^{i+1})^* \otimes f_i(\partial_{i+1}(c_l^{i+1})) \\ &= \sum_{i=0}^{d-n} (-1)^{ni+1} \sum_{l=1}^{d_{i+1}} (c_l^{i+1})^* \otimes f_i(\partial_{i+1}(c_l^{i+1})) \end{aligned}$$

Ahora notemos que  $f_{-1} = 0$ , así que  $(c_j^i)^* \otimes (f_{i-1} \partial_i)(c_j^i) = 0$  y

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{d-n+1} (-1)^{ni} (-1)^{n+1} \sum_{j=1}^{d_i} (c_j^i)^* \otimes (f_{i-1} \partial_i)(c_j^i) &= \sum_{i=0}^{d-n} (-1)^{ni+n} (-1)^{n+1} \sum_{j=1}^{d_{i+1}} (c_j^{i+1})^* \otimes (f_i \partial_{i+1})(c_j^{i+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{d-n} (-1)^{ni+1} \sum_{j=1}^{d_{i+1}} (c_j^{i+1})^* \otimes (f_i \partial_{i+1})(c_j^{i+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{d-n} (-1)^{(n+1)i} \sum_{j=1}^{d_i} \partial_{i+1}^*(c_j^i)^* \otimes f_i(c_j^i). \end{aligned}$$

Esto nos dice que  $D'_n \Gamma(f) = \Gamma D_n(f)$ . □

De inmediato podemos ver que  $1_{\mathbb{C}_*}$  es un elemento de  $\text{Hom}(\mathbb{C}_*, \mathbb{C}_*)_0$ . En general, todos los morfismos de cadenas se encuentran en  $\text{Hom}(\mathbb{C}_*, \mathbb{C}_*)_0$ . Pero también hay que no son de cadenas.

### El morfismo de Alexander-Whitney y el morfismo de Eilenber-Zilber.

Ahora vamos a definir dos morfismos de cadenas que nos serán de gran utilidad al momento de relacionar los complejos de dos categorías  $C$  y  $D$ . El primero es el morfismo  $AW: \mathbb{C}_*(C \times D) \rightarrow \mathbb{C}_*(C) \otimes \mathbb{C}_*(D)$  de Alexander-Whitney definido como sigue: Dada una  $n$ -cadena  $\sigma = (x_0, y_0) \rightarrow \dots \rightarrow (x_n, y_n)$  de  $C \times D$  definimos

$$AW(\sigma) = \sum_{j=0}^n z_j(\sigma) \otimes z^j(\sigma),$$

donde  $z_j(\sigma) = x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_j$  y  $z^j(\sigma) = y_j \rightarrow \dots \rightarrow y_n$ . Podemos ver de forma facil que  $z_j(\sigma) \otimes z^j(\sigma) \in (\mathbb{C}_*(C) \otimes \mathbb{C}_*(D))_n$  además que este es un morfismo de cadenas.

Notemos que podemos definir funciones  $s: [p+q] \rightarrow [p] \times [q]$ , donde  $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$  para  $n \in \mathbb{N}$ , tal que en cada coordenada sea monótona,  $s(0) = (0, 0)$ ,  $s(p+q) = (p, q)$  y en cada paso  $p(n)$  a  $p(n+1)$  solo cambie una coordenada. Esto se puede ver pensándolo como si tuvieramos una cuadrícula de  $p$  por  $q$  y entonces  $s$  sería un camino del  $(0, 0)$  al punto  $(p, q)$  de tal forma que solo podamos avanzar hacia arriba o hacia la derecha un cuadro a la vez. Hay dos caminos canónicos que podemos seguir el primero es avanzar  $p$  pasos a la derecha para luego avanzar  $q$  hacia arriba. Este camino es  $s_0 = ((0, 0), (1, 0), \dots, (p, 0), (p, 1), (p, 2), \dots, (p, q))$ . El camino  $s_1$  es avanzar  $q$  pasos arriba y luego  $p$  hacia la derecha. Se define el signo de  $s$  como  $\text{sgn}(s) = (-1)^k$  donde  $k$  es el área de la cuadrícula comprendida entre el camino  $s_0$  y  $s$ . A estos caminos se les llama  $(p, q)$ -reordenamientos (también llamados  $(p, q)$ -shuffles

en [14]).

El segundo morfismo es  $EZ: \mathbb{C}_*(C) \otimes \mathbb{C}_*(D) \rightarrow \mathbb{C}_*(C \times D)$  llamado el morfismo de Eilenberg-Zilber. Para un elemento  $x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_p \in \mathbb{C}_p(C)$  y  $y_0 \rightarrow \dots \rightarrow y_q \in \mathbb{C}_q(D)$  con  $p + q = n$ , tenemos que

$$EZ((x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_p) \otimes (y_0 \rightarrow \dots \rightarrow y_q)) = \sum_{(p,q)\text{-shuffles}, s} (-1)^{sgn(s)} (s_*(x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_p), s^*(y_0 \rightarrow \dots \rightarrow y_q)).$$

Con  $s_*(x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_p) = (x_0 \rightarrow x_{\pi_1 s(1)} \rightarrow \dots \rightarrow x_{\pi_1 s(i)} \rightarrow \dots \rightarrow x_p)$ ,  $s^*(y_0 \rightarrow \dots \rightarrow y_q) = (y_0 \rightarrow y_{\pi_2 s(1)} \rightarrow \dots \rightarrow y_{\pi_2 s(i)} \rightarrow \dots \rightarrow y_q)$ , esto es,  $s_*$  y  $s^*$  aplican una degeneración  $i$  (se añade una identidad del objeto en la posición  $i$ ) cada vez que un camino  $s(i)$  a  $s(i+1)$  es constante. Los morfismos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  son las proyecciones a la primera y segunda coordenada respectivamente y los complejos  $\mathbb{C}_p(C)$  y  $\mathbb{C}_{p+q}(C)$  no se toman normalizados. Aún así,  $EZ$  es un morfismo de cadenas y cuando se toman los complejos normalizados,  $EZ$  sigue siendo un morfismo de cadena. Mas aún, es un hecho muy conocido que los morfismos  $EZ$  y  $AW$  son inversos homotópicos ([10, 14]).

**Ejemplo 3.1.3.** Sea  $s = ((0, 0), (1, 0), (2, 0), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 3), (5, 3))$ . Entonces el signo de  $s$  es 7. Si  $x \otimes y = (x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5) \otimes (y_0 \rightarrow y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3)$  es un elemento de la base de  $(\mathbb{C}_*(C) \otimes \mathbb{C}_*(D))_8$ , entonces

$$s_*(x \otimes y) = (x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_3 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5)$$

y

$$s^*(x \otimes y) = (y_0 \rightarrow y_0 \rightarrow y_0 \rightarrow y_1 \rightarrow y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_3 \rightarrow y_3).$$

Dada una categoría  $C$  existe un functor diagonal  $D: C \rightarrow C \times C$ , el cual envía  $c \in \text{Obj}(C)$  a  $(c, c) \in \text{Obj}(C \times C)$  y un morfismo  $\alpha$  a  $(\alpha, \alpha)$ . Con ayuda del morfismo de Alexander-Whitney  $AW: \mathbb{C}_*(C \times C) \rightarrow \mathbb{C}_*(C) \otimes \mathbb{C}_*(C)$  y el morfismo de cadenas  $D_*: \mathbb{C}_*(C) \rightarrow \mathbb{C}_*(C \times C)$  inducido por  $D$ , obtenemos  $\Delta: \mathbb{C}_*(C) \rightarrow \mathbb{C}_*(C) \otimes \mathbb{C}_*(C)$  definido en una  $n$ -cadena  $x = x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$  como

$$\Delta(x) = \sum_{j=0}^n z_j(x) \otimes z^j(x),$$

donde  $z_j(x) = x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_j$  y  $z^j(x) = x_j \rightarrow \dots \rightarrow x_n$ .

### El morfismo evaluación.

El último morfismo a considerar lo definiremos sobre  $\mathbb{C}_*^* \otimes \mathbb{C}_*$  donde  $\mathbb{C}_*$  es un complejo de cadenas. Cuando vemos a  $k$  como un complejo, el morfismo  $ev: \mathbb{C}_*^* \otimes \mathbb{C}_* \rightarrow k$  está definido como 0 en  $(\mathbb{C}_*^* \otimes \mathbb{C}_*)_n$  si  $n \neq 0$  y para un elemento  $f \otimes x$  de la base de  $(\mathbb{C}_*^* \otimes \mathbb{C}_*)_0$ , es decir,  $f \in \mathbb{C}_p(C)^*$  y  $x \in \mathbb{C}_p(C)$ , definimos  $ev(f \otimes x) = f(x)$ . Esta asignación define un morfismo de cadenas que se verifica calculando que  $ev \circ D_1 = 0$ , con  $D_1: (\mathbb{C}_*^* \otimes \mathbb{C}_*)_1 \rightarrow (\mathbb{C}_*^* \otimes \mathbb{C}_*)_0$  la diferencial vista en la [Definición 1.4.11](#):

$$\begin{aligned} evD_1(f \otimes x) &= ev((\partial_{n+1})^* f \otimes x + (-1)^p f \otimes \partial_{p+1}(x)) \\ &= (-1)^{p+1} ev(f \partial_{p+1} \otimes x) + (-1)^p ev(f \otimes \partial_{p+1}(x)) \\ &= (-1)^{p+1} f \partial_{p+1}(x) + (-1)^p f \partial_{p+1}(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sea  $G$  un grupo finito. Dada una  $G$ -categoría finita  $C$ , tal que  $\mathbb{C}_*(C)$  sea acotado y de tipo finito, podemos definir el morfismo de Dwyer-Wilkerson,  $DW: k \rightarrow \mathbb{C}_*(C)$  como la composición

$$k \xrightarrow{\mu} \text{Hom}_k(\mathbb{C}_*(C), \mathbb{C}_*(C)) \xrightarrow{\Gamma} \mathbb{C}_*(C)^* \otimes \mathbb{C}_*(C) \xrightarrow{1 \otimes \Delta} \mathbb{C}_*(C)^* \otimes \mathbb{C}_*(C) \otimes \mathbb{C}_*(C) \xrightarrow{ev \otimes 1} k \otimes \mathbb{C}_*(C).$$

Para fines prácticos, identificamos  $k \otimes \mathbb{C}_*(C)$  con  $\mathbb{C}_*(C)$  pues son naturalmente isomorfos.

Un  $G$ -functor  $F$  induce un morfismo de cadenas  $F_*: \mathbb{C}_*(C) \rightarrow \mathbb{C}_*(C)$  que envía una  $n$ -cadena  $x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$  a  $F(x_0) \rightarrow \dots \rightarrow F(x_n)$ . Podemos modificar el primer morfismo de cadenas  $k \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}_*(C), \mathbb{C}_*(C))$  que conforma el morfismo  $DW$  por  $a \mapsto a \cdot F_*$ , todos los demás morfismos en la composición permanecen iguales. A este nuevo morfismo lo llamaremos  $DW^F$ . Notemos que  $a \cdot F_*$  es un elemento de  $\text{Hom}(\mathbb{C}_*(C), \mathbb{C}_*(C))_0$ , entonces el isomorfismo  $\text{Hom}_k(\mathbb{C}_*(C), \mathbb{C}_*(C)) \cong \mathbb{C}_*(C)^* \otimes \mathbb{C}_*(C)$  envía  $a \cdot F_*$  a

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i \left( \sum_{l=1}^{d_i} (c_l^i)^* \otimes aF_*(c_l^i) \right) = \sum_{i=0}^d (-1)^i \left( \sum_{l=1}^{d_i} a(c_l^i)^* \otimes F_*(c_l^i) \right)$$

Por medio de  $1 \otimes \Delta$  obtenemos

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i \left( \sum_{l=1}^{d_i} a(c_l^i)^* \otimes \left[ \sum_{j=0}^i z_j(F_*(c_l^i)) \otimes z^j(F_*(c_l^i)) \right] \right).$$

Cuando le aplicamos  $(ev \otimes 1)$  a

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i \left( \sum_{l=1}^{d_i} a(c_l^i)^* \otimes \left[ \sum_{j=0}^i z_j(F_*(c_l^i)) \otimes z^j(F_*(c_l^i)) \right] \right)$$

nos queda

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i \left( \sum_{l=1}^{d_i} [a(c_l^i)^*(F_*(c_l^i))] \otimes z^i(F_*(c_l^i)) \right) \mapsto a \sum_{i=0}^d (-1)^i \left( \sum_{l=1}^{d_i} [(c_l^i)^*(F_*(c_l^i))] \cdot z^i(F_*(c_l^i)) \right) \in \mathbb{C}_0(C).$$

Donde  $(c_l^i)^*(F_*(c_l^i))$  son 1 o 0 dependiendo si  $F_*(c_l^i) = c_l^i$ .

Por último, veremos que  $DW^F$  es  $G$ -equivariante. Ya que  $k$  tiene una  $G$ -acción trivial, lo que tenemos que verificar es que

$$a \sum_{i=0}^d (-1)^i \left( \sum_{l=1}^{d_i} [(c_l^i)^*(F_*(c_l^i))] \cdot z^i(F_*(c_l^i)) \right) = g \cdot \left\{ a \sum_{n=0}^d (-1)^i \left( \sum_{l=1}^{d_i} [(c_l^i)^*(F_*(c_l^i))] \cdot z^l(F_*(c_l^i)) \right) \right\}.$$

Pero

$$g \cdot \left\{ a \sum_{i=0}^d (-1)^i \left( \sum_{l=1}^{d_i} [(c_l^i)^*(F_*(c_l^i))] \cdot z^i(F_*(c_l^i)) \right) \right\} = a \sum_{n=0}^d (-1)^i \left( \sum_{l=1}^{d_i} [(c_l^i)^*(F_*(c_l^i))] \cdot z^i(F_*(g \cdot c_l^i)) \right)$$

porque  $F$  es  $G$ -equivariante. El resultado se sigue del hecho de que si tenemos un sumando  $z^i(F_*(c_l^i))$ , es decir  $F_*(c_l^i) = c_l^i$ , entonces  $z^i(F_*(g c_l^i))$  también es un sumando, pues  $g c_l^i$  es una  $i$ -cadena que cumple que  $F_*(g c_l^i) = g F_*(c_l^i) = g c_l^i$ .

### 3.2. Construcción del transfer

Consideremos el functor  $\pi: G \ltimes C \rightarrow \beta G$  visto anteriormente. Los objetos de  $\pi/\bullet$  son los pares  $(c, g)$ , donde  $c$  es un objeto de  $C$  y  $g$  un morfismo en  $\beta G$ . Un morfismo  $(c, g) \rightarrow (c', g')$  es un morfismo  $(h, \alpha): c \rightarrow c'$  en  $G \ltimes C$ , tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \bullet & & \bullet \\ \downarrow h & \searrow g & \\ \bullet & & \bullet \\ & \nearrow g' & \\ \bullet & & \bullet \end{array}$$

es decir,  $h = g'^{-1}g$ . La composición en  $\pi/\bullet$  está dada de la siguiente manera: Para  $(h, \alpha): (c, g) \rightarrow (c', g')$  y  $(h', \beta): (c', g') \rightarrow (c'', g'')$

$$(h', \beta) \circ (h, \alpha) = (h'h, \beta \circ h'\alpha): (c, g) \rightarrow (c'', g'').$$

Además la [Proposición 1.5.2](#) nos describe una única  $G$ -acción sobre  $\pi/\bullet$ . Para ser más específico,

$$u \cdot (x, g) = (x, ug).$$

Para un morfismo  $(h^{-1}g, \alpha): (x, g) \rightarrow (y, h)$ ,

$$u \cdot (h^{-1}g, \alpha) = (h^{-1}g, \alpha): (x, ug) \rightarrow (y, uh).$$

Esta acción concuerda con el isomorfismo de la [Proposición 2.2.8](#), es decir, hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LK}_\pi B_0^{G \times C}(\bullet) & \xrightarrow{\mathrm{LK}_\pi B_0^{G \times C}(u)} & \mathrm{LK}_\pi B_0^{G \times C}(\bullet) \\ \cong \uparrow & & \downarrow \cong \\ \mathbb{C}_0(\pi/\bullet) & \dashrightarrow & \mathbb{C}_0(\pi/\bullet) \end{array}$$

Para ver esto primero tomemos  $(x, g)$  en  $\mathrm{Obj}(\pi/\bullet)$ . Este objeto es enviado por el isomorfismo  $\mathbb{C}_0(\pi/\bullet) \cong \mathrm{LK}_\pi B_0^{G \times C}(\bullet)$  a  $[(x, (e, 1_x))]$  con  $(x, (e, 1_x)) \in \mathbb{C}_0(1_{G \times C}/ \ )\beta_\bullet(x, g)$ . Ahora, el morfismo  $\mathrm{LK}_\pi B_0^{G \times C}(u)$  envía  $[(x, (e, 1_x))]$  a  $[(x, (e, 1_x))] \in \mathbb{C}_0(1_{G \times C}/ \ )\beta_\bullet(x, ug)$ . Por último, teniendo una 0-cadena en  $\mathbb{C}_0(1_{G \times C}/ x)$  obtenemos una 0-cadena en  $\pi/\bullet$  por medio de  $\iota_{(x, ug)}$ , que es el morfismo que define a  $\mathbb{C}_0(\pi/\bullet)$  como  $\varinjlim_{\pi/\bullet} \mathrm{Res}_{\beta_\bullet} B_0^{G \times C}$ . Ya que

$$\iota_{(x, ug)}(x, (e, 1_x)) = (x, ug\pi(e, 1_x)) = (x, ug)$$

se tiene el resultado.

En [20], Xu propone una acción sobre  $\pi/\bullet$  diferente a esta, pero hay que mencionar que es incorrecta ya que no concuerda con el isomorfismo de la [Proposición 2.2.8](#).

Sabemos aún más de la categoría  $\pi/\bullet$ . Los objetos en esta categoría son muy particulares, ya que si  $(x, h) \neq (x, e)$  siempre existe otro objeto isomorfo a él. Esto puede servirnos de mucho en el momento de buscar morfismos entre dos objetos

**Proposición 3.2.1.**  $(x, h)$  es isomorfo a  $(hx, e)$  en  $\pi/\bullet$ .

**Demostración.** Empezaremos tomando el morfismo  $(h, 1_{hx}): (x, h) \rightarrow (hx, e)$ . El inverso de este morfismo es  $(h^{-1}, 1_x)$ . Debemos notar que  $h1_x = 1_{hx}$ . El resultado se tiene calculando las composiciones:

$$\begin{aligned} (h^{-1}, 1_x) \circ (h, 1_{hx}) &= (h^{-1}h, 1_x \circ h^{-1}1_{hx}) \\ &= (e, 1_x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (h, 1_{hx}) \circ (h^{-1}, 1_x) &= (hh^{-1}, 1_{hx} \circ h1_x) \\ &= (e, 1_{hx}) \end{aligned}$$

las cuales son las identidades para los objetos  $(x, h)$  y  $(hx, e)$  respectivamente.  $\square$

La gran ventaja de la categoría  $\pi/\bullet$  es que su complejo  $\mathbb{C}_*(\pi/\bullet)$  está estrechamente relacionado con la resolución barra  $B_*^G$ , la cual se define mediante la sobrecategoría  $1_{\beta_G}/\bullet$ . Aunque  $\pi/\bullet$  y  $1_{\beta_G}/\bullet$  no son isomorfas, la siguiente proposición nos da una descripción de la relación existente.

**Proposición 3.2.2.** La categoría  $\pi/\bullet$  es  $G$ -isomorfa a  $(1_{\beta_G}/\bullet) \times C$ .

**Demostración.** Recordemos que los objetos de  $1_{\beta G}/\bullet$  son de la forma  $(\bullet, g)$  donde  $g$  es un morfismo en  $\beta G$ , sin embargo para no hacer tan pesada la notación identificaremos  $(\bullet, g)$  con  $g$ .

Ahora, definimos

$$\begin{array}{ccc} \phi: (1_{\beta G}/\bullet) \times C & \longrightarrow & \pi/\bullet \\ (g, c) & \longmapsto & (g^{-1}c, g) \\ (g, c) & & (g^{-1}c, g) \\ (h^{-1}g, \alpha) \downarrow & \longmapsto & \downarrow (h^{-1}g, h^{-1}\alpha) \\ (h, d) & & (h^{-1}d, h) \end{array}$$

donde  $h^{-1}g: g \rightarrow h$  y  $\alpha: c \rightarrow d$  son morfismos en  $1_{\beta G}/\bullet$  y  $C$  respectivamente. Primero notemos que  $(g^{-1}c, g)$  es un objeto de  $\pi/\bullet$ , y que  $(h^{-1}g, h^{-1}\alpha): (g^{-1}c, g) \rightarrow (h^{-1}d, h)$  es un morfismo, pues  $h^{-1}\alpha: h^{-1}gg^{-1}c \rightarrow g^{-1}d$ , es decir,  $(h^{-1}g, h^{-1}\alpha)$  es un morfismo en  $G \times C$  de  $g^{-1}c$  a  $h^{-1}d$ . De manera inmediata vemos que identidades son enviadas a identidades. Además, ya que  $\phi$  envía la composición

$$(g, c) \xrightarrow{(h^{-1}g, \alpha)} (h, d) \xrightarrow{(k^{-1}h, \beta)} (k, e) \\ \searrow \quad \swarrow \\ \quad \quad \quad (k^{-1}g, \beta\alpha)$$

a  $(k^{-1}g, k^{-1}\beta\alpha)$  y la composición de las imágenes de cada uno de los morfismos bajo  $\phi$  es

$$\begin{aligned} (k^{-1}h, k^{-1}\beta)(h^{-1}g, g^{-1}\alpha) &= (k^{-1}g, k^{-1}\beta k^{-1}h h^{-1}\alpha) \\ &= (k^{-1}g, k^{-1}\beta\alpha), \end{aligned}$$

podemos asegurar que  $\phi$  es un funtor covariante. Más aún, este funtor es un  $G$ -funtor: Sea  $u \in G$ . Para objetos  $(g, c)$  tenemos

$$\begin{aligned} \phi(u(g, c)) &= \phi(ug, uc) \\ &= (g^{-1}u^{-1}uc, ug) \\ &= (g^{-1}c, ug) \\ &= u(g^{-1}c, g) \\ &= u\phi(g, c), \end{aligned}$$

y para un morfismo  $(h^{-1}g, \alpha): (g, c) \rightarrow (h, d)$

$$\begin{aligned} \phi(u(h^{-1}g, \alpha)) &= \phi(h^{-1}u^{-1}ug, u\alpha) \\ &= (h^{-1}u^{-1}ug, h^{-1}u^{-1}u\alpha) \\ &= (h^{-1}u^{-1}ug, h^{-1}\alpha) \\ &= u\phi(h^{-1}g, \alpha). \end{aligned}$$

También definimos

$$\begin{array}{ccc} \psi: \pi/\bullet & \longrightarrow & (1_G/\bullet) \times C \\ (c, g) & \longmapsto & (g, gc) \\ (c, g) & & (g, gc) \\ (h^{-1}g, \alpha) \downarrow & \longmapsto & \downarrow (h^{-1}g, h\alpha) \\ (d, h) & & (h, hd) \end{array}$$

Puesto que  $\alpha$  es un morfismo de  $h^{-1}gc$  a  $d$ ,  $h\alpha$  es un morfismo en  $C$  que va de  $gc$  a  $hd$ . Verificamos primero que  $\psi(g^{-1}g, 1_c) = (e, 1_{gc})$  el cual es la identidad del objeto  $(g, gc)$ . La composición

$$(c, g) \xrightarrow{(h^{-1}g, \alpha)} (d, h) \xrightarrow{(k^{-1}h, \beta)} (e, k)$$

$$\searrow \xrightarrow{(k^{-1}g, \beta k^{-1}h\alpha)} \nearrow$$

es enviada mediante  $\psi$  al morfismo  $(k^{-1}g, k\beta h\alpha)$ , y

$$\begin{aligned} \psi(k^{-1}h, \beta)\psi(h^{-1}g, \alpha) &= (k^{-1}h, k\beta)(h^{-1}g, h\alpha) \\ &= (k^{-1}g, k\beta h\alpha). \end{aligned}$$

Por tanto,  $\psi$  es un funtor covariante. Cuando tomamos un elemento  $u \in G$ , las identidades

$$\begin{aligned} \psi(u(c, g)) &= \psi(c, ug) \\ &= (ug, ugc) \\ &= u(g, gc) \\ &= u\psi(c, g) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \psi(u(h^{-1}g, \alpha)) &= \psi(h^{-1}u^{-1}ug, \alpha) \\ &= (h^{-1}u^{-1}ug, uh\alpha) \\ &= u(h^{-1}g, h\alpha) \\ &= u\psi(h^{-1}g, \alpha) \end{aligned}$$

nos sirven para afirmar que  $\psi$  es un  $G$ -funtor.

Por último, veamos que  $\phi$  y  $\psi$  son inversos uno del otro. En objetos tenemos

$$\psi\phi(g, c) = \psi(g^{-1}c, g) = (g, gg^{-1}c) = (g, c)$$

y

$$\phi\psi(c, g) = \phi(g, gc) = (g^{-1}gc, g) = (c, g).$$

Y en morfismos

$$\psi\phi(h^{-1}g, \alpha) = \psi(h^{-1}g, h^{-1}\alpha) = (h^{-1}g, hh^{-1}\alpha) = (h^{-1}g, \alpha)$$

y

$$\phi\psi(h^{-1}g, \alpha) = \phi(h^{-1}g, h\alpha) = (h^{-1}g, h^{-1}h\alpha) = (h^{-1}g, \alpha).$$

Por lo tanto la categoría  $\pi/\bullet$  es  $G$ -isomorfa a  $(1_G/\bullet) \times C$ .  $\square$

Esta es otra razón por la cual la acción sobre  $\pi/\bullet$  que describimos es correcta. Necesitamos que el isomorfismo anterior sea  $G$ -equivariante. Esto no se tendría con la acción descrita en [20]. También hay que mencionar que el isomorfismo anterior también es diferente al que aparece en [20].

Antes de seguir con los resultados que se obtienen a partir de la [Proposición 3.2.2](#), veamos una definición.

**Definición 3.2.3.** Sea  $F: C \rightarrow D$  un funtor covariante. Se dice que  $F$  es un encaje si  $F$  es inyectivo en objetos y la función

$$F_{x,y}: \text{Hom}_C(x, y) \longrightarrow \text{Hom}_D(F(x), F(y))$$

$$\alpha \longmapsto F(\alpha)$$

inducida por  $F$ , es biyectiva para todo  $x, y \in \text{Obj}(C)$ .

El siguiente corolario nos ayuda a dar una caracterización de la extensión de Kan izquierda en términos de límites sobre la categoría  $C$  en vez de sobre la categoría  $\pi/\bullet$  que nos será de gran utilidad.

**Corolario 3.2.4.** 1. El funtor  $\pi/\bullet \rightarrow C$  inducido por la proyección  $1_{\beta_G}/\bullet \times C \rightarrow C$  es un  $G$ -funtor  
 2. Existe un encaje  $C \hookrightarrow \pi/\bullet$  el cual es una equivalencia de categorías. Como consecuencia  $\text{LK}_\pi M \cong \varinjlim_C M\iota$  y  $\text{RK}_\pi M \cong \varprojlim_C M\iota$  como  $kG$ -módulos, para cualquier  $M \in k(G \rtimes C)\text{-mod}$ , donde  $\iota$  es el funtor definido en la Nota 2.4.3.

**Demostración.**

1. El funtor al que se refiere el enunciado es

$$\begin{array}{ccc}
 F: \pi/\bullet & \longrightarrow & C \\
 (x, g) & \longmapsto & gx \\
 \begin{array}{ccc}
 (x, g) & & gx \\
 \downarrow (h^{-1}g, \alpha) & \longrightarrow & \downarrow h\alpha \\
 (y, h) & & hy
 \end{array}
 \end{array}$$

teniendo en cuenta que  $(h^{-1}g, \alpha): (x, g) \rightarrow (y, h)$  y por tanto  $\alpha: h^{-1}gx \rightarrow y$ . Para objetos tenemos

$$\begin{aligned}
 F(u \cdot (x, g)) &= F(x, ug) = ugx \\
 uF(x, g) &= u(gx) = ugx,
 \end{aligned}$$

y para morfismos

$$F(u(h^{-1}g, \alpha)) = F(h^{-1}g, \alpha) = uh\alpha$$

pues el segundo  $(h^{-1}g, \alpha)$ , tiene de dominio  $(x, ug)$  y de codominio a  $(y, uh)$ ,

$$uF(h^{-1}g, \alpha) = u(h\alpha) = uh\alpha.$$

Por tanto  $F$  es un  $G$ -funtor.

2. Empezaremos definiendo el siguiente funtor:

$$\begin{array}{ccc}
 H: C & \longrightarrow & \pi/\bullet \\
 x & \longmapsto & (x, e) \\
 \begin{array}{ccc}
 x & & (x, e) \\
 \downarrow \alpha & \longrightarrow & \downarrow (e, \alpha) \\
 y & & (y, e)
 \end{array}
 \end{array}$$

Este funtor es un encaje pues la función

$$H_{x,y}: \text{Hom}_C(x, y) \longrightarrow \text{Hom}_{\pi/\bullet}((x, e), (y, e))$$

$$\alpha \longmapsto (e, \alpha)$$

es inyectiva y suprayectiva, además que  $H$  cumple ser inyectiva en objetos.

Ahora, consideraremos otro funtor:

$$\begin{array}{ccc}
 F: \pi/\bullet & \longrightarrow & C \\
 (c, g) & \longmapsto & gc \\
 (c, g) & & gc \\
 \downarrow ((g')^{-1}g, \beta) & \longmapsto & \downarrow g'\beta \\
 (c', g') & & g'c'
 \end{array}$$

Considerando que  $\beta$  es un morfismo de  $(g')^{-1}gc$  a  $c'$  aseguramos la existencia de  $g'\beta: gc \rightarrow g'c'$ .

$F \circ H: C \rightarrow C$  es la identidad pues en objetos tenemos

$$\begin{aligned}
 (F \circ H)(x) &= F(H(x)) \\
 &= F(x, e) \\
 &= x,
 \end{aligned}$$

y en morfismos

$$\begin{aligned}
 (F \circ H)(\alpha) &= F(H(\alpha)) \\
 &= F(e, \alpha) \\
 &= e\alpha \\
 &= \alpha,
 \end{aligned}$$

pues tomamos  $\alpha: x \rightarrow y$  en  $C$ . Sin embargo,  $H \circ F$  no es el funtor identidad de  $\pi/\bullet$ , así que debemos definir un isomorfismo natural de  $H \circ F$  a  $1_{\pi/\bullet}$ . Para cada objeto  $(x, g)$  de  $\pi/\bullet$  asignamos el isomorfismo de [la Proposición 3.2.1](#)

$$(g^{-1}, 1_x): (H \circ F)(x, g) = (gx, e) \rightarrow (x, g) = 1_{\pi/\bullet}(x, g),$$

Dado un morfismo  $(h^{-1}g, \alpha): (x, g) \rightarrow (y, h)$ , tenemos que  $(H \circ F)(h^{-1}g, \alpha) = (e, h\alpha)$ , con  $\alpha: h^{-1}gx \rightarrow y$ , con lo que

$$(h^{-1}g, \alpha) \circ (g^{-1}, 1_x) = (h^{-1}, \alpha \circ h^{-1}g1_x),$$

y

$$(h^{-1}, 1_y) \circ (e, h\alpha) = (h^{-1}, 1_y \circ h^{-1}h\alpha),$$

pero  $\alpha \circ h^{-1}g1_x = \alpha = 1_y \circ h^{-1}h\alpha$ , de esta manera tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 (H \circ F)(x, g) & \xrightarrow[\cong]{(g^{-1}, 1_x)} & 1_{\pi/\bullet}(x, g) \\
 \downarrow (H \circ F)(h^{-1}g, \alpha) & & \downarrow 1_{\pi/\bullet}(h^{-1}g, \alpha) \\
 (H \circ F)(y, h) & \xrightarrow[\cong]{(h^{-1}, 1_y)} & 1_{\pi/\bullet}(y, h)
 \end{array}$$

Por lo tanto  $H$  es una equivalencia natural entre las categorías  $\pi/\bullet$  y  $C$ .

Debido a que existe una equivalencia entre esas categorías, podemos utilizar los isomorfismos de esas equivalencias para demostrar que  $LK_\pi M \cong \varinjlim_C M\iota$ , siendo  $M: G \times C \rightarrow k\text{-mod}$ . Recordemos que para la extensión izquierda de Kan definimos el funtor

$$\begin{array}{ccc} \beta_\bullet: \pi/\bullet & \longrightarrow & G \times C \\ (x, g) & \longmapsto & x \\ \begin{array}{ccc} (x, g) & & x \\ \downarrow (h^{-1}g, \alpha) & \longmapsto & \downarrow (h^{-1}g, \alpha) \\ (y, h) & & y \end{array} \end{array}$$

Entonces lo que debemos demostrar es que

$$\varinjlim_{\pi/\bullet} M\beta_\bullet \cong \varinjlim_C M\iota.$$

donde  $\iota$  es el funtor de la Nota 2.4.3. Sea  $\alpha: x \rightarrow y$  en  $C$ . Ya que  $M\iota(x) = M(x) = M\beta_\bullet(x, e)$ ,  $M\iota(\alpha) = M(e, \alpha) = M\beta_\bullet(e, \alpha)$  y por las definiciones de los límites directos,  $\varinjlim_C M\iota$  y  $\varinjlim_{\pi/\bullet} M\beta_\bullet$ ,

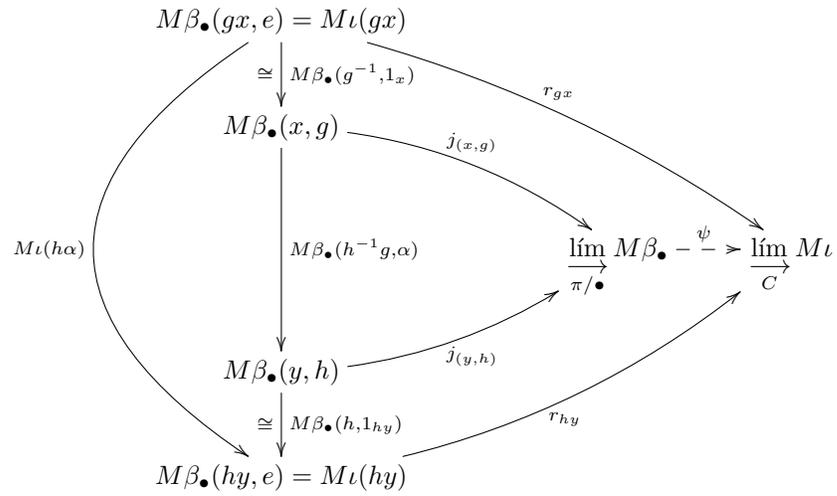
tenemos la existencia de  $\theta$  en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M\iota(x) = M\beta_\bullet(x, e) & & \\ \swarrow^{M\iota(\alpha) = M\beta_\bullet(e, \alpha)} & \downarrow r_x & \searrow^{j_{(x, e)}} \\ M\iota(y) = M\beta_\bullet(y, e) & \xrightarrow{r_y} \varinjlim_C M\iota & \xrightarrow{\theta} \varinjlim_{\pi/\bullet} M\beta_\bullet \\ & \searrow^{j_{(y, e)}} & \end{array}$$

donde  $r_z$  y  $j_{(z, g)}$  son los morfismos estructurales de los respectivos límites. Ya que

$$\begin{aligned} (h, 1_{hy}) \circ (h^{-1}g, \alpha) \circ (g^{-1}, 1_x) &= (h, 1_{hy}) \circ (h^{-1}, \alpha \circ h^{-1}g1_x) \\ &= (e, 1_{hy} \circ h(\alpha \circ h^{-1}g1_x)) \\ &= (e, h\alpha) \end{aligned}$$

podemos asegurar la existencia de  $\psi$  y la conmutatividad del siguiente diagrama



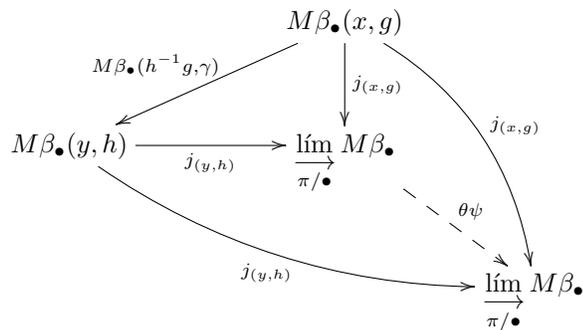
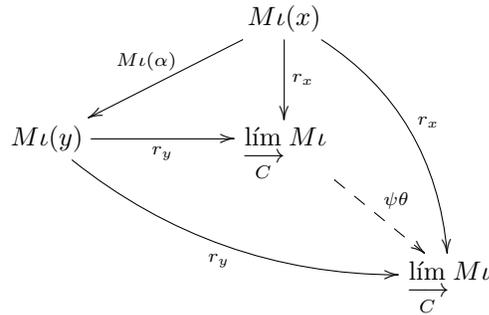
Sólo nos falta verificar que  $\theta$  es la inversa de  $\psi$ , lo cual es cierto por la propiedad universal del límite directo y porque

$$\psi\theta r_x = \psi j_{(x,e)} = r_x$$

y

$$\theta\psi j_{(x,g)} = \theta r_{gx} = j_{(x,g)},$$

es decir,  $\psi\theta$  y  $\theta\psi$  hacen conmutar los siguientes diagramas:



igual que las identidades  $1_{\lim_C M_\iota}$  y  $1_{\lim_{\pi/\bullet} M\beta_\bullet}$  respectivamente, lo cual nos dice que esas composiciones son las identidades, así

$$\lim_{\pi/\bullet} M\beta_\bullet \cong \lim_C M_\iota.$$

Hasta este punto hemos demostrado el isomorfismo como  $k$ -módulos. Si queremos que el isomorfismo sea de  $kG$ -módulos debemos especificar qué es  $\varinjlim_C M\iota(g)$  con  $g$  un morfismo de  $\beta G$ . El morfismo  $\varinjlim_C M\iota(g): \varinjlim_C M\iota \rightarrow \varinjlim_C M\iota(g)$  se construye de la siguiente manera: Sea  $\theta: \varinjlim_{\pi/\bullet} \text{Res}_{\beta_\bullet} M \rightarrow \varinjlim_C M\iota$  el isomorfismo de  $k$ -módulos anterior y  $\theta^{-1}$  su inverso. Entonces definimos  $\varinjlim_C M\iota(g) = \theta \text{LK}_\pi M(g) \theta^{-1}$ . De esta forma para  $[m] \in \varinjlim_C M\iota$  con  $m \in M\iota(c)$  tenemos que

$$\begin{aligned} \varinjlim_C M\iota(g)([m]) &= \theta \text{LK}_\pi M(g) \theta^{-1}([m]) \\ &= \theta \text{LK}_\pi M(g)([m]), & m \in M\beta_\bullet(c, e) \\ &= \theta([m]), & m \in M\beta_\bullet(c, g) \\ &= [M(g, 1_{gc})(m)] = [(g, 1_{gc}) \cdot m], & (g, 1_{gc}) \cdot m \in M\iota(gc). \end{aligned}$$

Esta definición cumple que  $\varinjlim_C M\iota(e)([m]) = [(e, 1_c)m] = [m]$ , es decir, envía identidades a identidades. Además,

$$\begin{aligned} \varinjlim_C M\iota(g) \varinjlim_C M\iota(h)([m]) &= \varinjlim_C M\iota(g)([(h, 1_{hc})m]), & (h, 1_{hc})m \in M\iota(hc) \\ &= [(g, 1_{ghc})(h, 1_{hc})m], & (g, 1_{ghc})(h, 1_{hc})m \in M\iota(ghc) \\ &= [(gh, 1_{ghc} \circ g1_{hc})m] \\ &= [(gh, 1_{ghc})m] \\ &= \varinjlim_C M\iota(gh)([m]), & m \in M\iota(c). \end{aligned}$$

Esto define a  $\varinjlim_C M\iota$  como un funtor de  $\beta G$  a  $k\text{-mod}$ . Y por definición tenemos que hace conmutar diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{LK}_\pi M(\bullet) & \xrightarrow{\theta} & \varinjlim_C M\iota \\ \text{LK}_\pi M(g) \downarrow & & \downarrow \varinjlim_C M\iota(g) \\ \text{LK}_\pi M(\bullet) & \xrightarrow{\theta} & \varinjlim_C M\iota \end{array}$$

De esta forma el isomorfismo es de  $kG$ -módulos. □

Cabe señalar que el funtor  $C \rightarrow \pi/\bullet$  no es un  $G$ -funtor ya que el elemento  $ux$  va a  $(ux, e)$  bajo el funtor y  $u(x, e) = (x, u)$ , pero no siempre  $(ux, e) = (x, u)$ , por ejemplo cuando  $u \in G$  tal que  $u \neq e$ , se tiene que  $(ux, e) \neq (x, u)$ , aún cuando  $u$  actuara trivialmente sobre el objeto  $x$ .

**Corolario 3.2.5.** *Existe un casi isomorfismo de  $kG$ -complejos entre  $\text{LK}_\pi B_*^{G \times C} \cong \mathbb{C}_*(\pi/\bullet) \simeq B_*^G \otimes \mathbb{C}_*(C)$  y  $\mathbb{C}_*(C)$ .*

**Demostración.** Ya que  $\text{LK}_\pi$  preserva proyectivos y  $\text{LK}_\pi B_*^{G \times C} \cong \mathbb{C}_*(\pi/\bullet)$  es un isomorfismo de  $kG$ -complejos, entonces  $\mathbb{C}_*(\pi/\bullet)$  un complejo de  $kG$ -módulos proyectivos. Por la [Proposición 3.2.2](#) se sigue que  $\mathbb{C}_*(\pi/\bullet) \cong \mathbb{C}_*((1_{\beta G}/\bullet) \times C)$ . El morfismo de Alexander-Whitney nos da una equivalencia  $\mathbb{C}_*((1_{\beta G}/\bullet) \times C) \simeq B_*^G \otimes \mathbb{C}_*(C)$ . Utilizando el corolario anterior podemos obtener una equivalencia de  $kG$ -complejos  $\mathbb{C}_*(C) \rightarrow \mathbb{C}_*(\pi/\bullet)$ . Por lo tanto existe un casi isomorfismo  $B_*^G \otimes \mathbb{C}_*(C) \rightarrow \mathbb{C}_*(C)$ . □

Gracias al [Corolario 3.2.4](#) podemos seguir dando más resultados que se relacionan con las extensiones de Kan, en este caso, se describe una manera de separar el producto tensorial entre  $k(G \times C)$ -módulos bajo ciertas condiciones cuando se le aplica la extensión de Kan.

**Corolario 3.2.6.** *Supongamos que  $M \in kG\text{-mod}$  y  $N \in k(G \times C)\text{-mod}$ . Entonces  $\text{LK}_\pi(k_M \widehat{\otimes} N) \cong M \otimes \text{LK}_\pi N$  y  $\text{RK}_\pi(k_M \widehat{\otimes} N) \cong M \otimes \text{RK}_\pi N$  como  $kG$ -módulos. En particular,  $\text{LK}_\pi(k_M) \cong M \otimes \text{LK}_\pi \underline{k}$  y  $\text{RK}_\pi(k_M) \cong M \otimes \text{RK}_\pi \underline{k}$ , donde  $\text{LK}_\pi(\underline{k}) \cong H_0(BC, k) \cong H^0(BC, k) \cong \text{RK}_\pi \underline{k}$ .*

**Demostración.** Para la extensión de Kan izquierda tenemos

$$\text{LK}_\pi(k_M \widehat{\otimes} N) \cong \varinjlim_C [(k_M \widehat{\otimes} N)\iota]$$

por el Corolario 3.2.4. Debido a que  $k_M \iota$  es visto como un  $kC$ -módulo trivial tenemos el isomorfismo

$$\varinjlim_C (k_M \widehat{\otimes} N)\iota \cong M \otimes \varinjlim_C N\iota$$

Utilizando nuevamente el Corolario 3.2.4 obtenemos el primer resultado. Para los casos particulares se usa el isomorfismo  $k_M \cong k_M \widehat{\otimes} \underline{k}$ . Además, el isomorfismo  $\text{LK}_\pi \underline{k} \cong \varinjlim_C \underline{k}\iota$  junto con la definición de colímite nos sirve para afirmar que  $\text{LK}_\pi \underline{k}$  es isomorfo a

$$\bigoplus_{c \in \text{Obj}(C)} k\{c\}/N$$

donde  $N$  es el submódulo generado por los elementos de la forma  $a - \underline{k}(\alpha)(a)$ , con  $a \in k\{c\}$  y  $\alpha: c \rightarrow c'$  es un morfismo en  $C$ . El cual es claramente isomorfo a

$$H_0(BC, k) \cong H_0(C_*(C)) = k\text{Obj}(C)/\text{Im}(\partial_1)$$

donde  $\text{Im}(\partial_1)$  está generado por los elementos  $c' - c$  por cada morfismo  $\alpha: c \rightarrow c'$  en  $C$ .

Las demostraciones de los resultados para la extensión de Kan derecha son duales. □

Anteriormente habíamos demostrado que dada una categoría  $C$ ,  $B_*^C$  es una resolución proyectiva para el  $kC$ -módulo  $\underline{k}$ , esto es de gran importancia. Sin embargo, todavía nos surge la duda sobre cómo obtener una resolución proyectiva para otro  $kC$ -módulo  $N$ . La respuesta la tenemos parcialmente cuando nuestra categoría es  $G \times C$  y nuestro módulo es la restricción  $\text{Res}_\pi M$  para algún  $kG$ -módulo  $M$ .

**Lema 3.2.7.** *Sea  $B \in k(G \times C)\text{-mod}$  un módulo proyectivo y denotemos  $k_M = \text{Res}_\pi M$  para alguna  $M \in kG\text{-mod}$ . Entonces  $B \widehat{\otimes} k_M$  es un módulo proyectivo.*

**Demostración.** Como vimos en la demostración del Teorema de Mitchell, podemos descomponer a  $kC$  como una suma directa  $\bigoplus_{x \in \text{Obj} C} kC \cdot 1_x$ , cuando la categoría  $C$  es finita, y esto se debe a que tenemos

una identidad en el anillo  $kC$  escrito como  $\sum_{x \in \text{Obj}(C)} 1_x$ . Así que cada sumando directo de  $kC$  se puede ver como una suma de  $k\text{Hom}_C(x, \_)$ .

Demostraremos que  $B \widehat{\otimes} k_M \cong B \otimes M$ , con  $k(G \times C)$  actuando sobre  $B \otimes M$  únicamente en la primera coordenada.

Como  $B$  es proyectivo podemos asumir que  $B = k\text{Hom}_{G \times C}(x, \_)$ . Definimos el homomorfismo

$$\varphi: k\text{Hom}_{G \times C}(x, \_) \otimes M \longrightarrow k\text{Hom}(x, \_) \widehat{\otimes} k_M,$$

$$(g, \alpha) \otimes m \longmapsto (g, \alpha) \otimes (g, \alpha)m$$

La  $m$  del lado derecho esta en  $k_M$ . Debemos verificar que  $\varphi$  es un homomorfismo de  $k(G \times C)$ -módulos:

Para un elemento de la base  $(h, \beta)$  de  $k(G \rtimes C)$  tenemos

$$\begin{aligned}\varphi[(h, \beta)((g, \alpha) \otimes m)] &= \varphi[(hg, \beta h\alpha) \otimes m] \\ &= (hg, \beta h\alpha) \otimes (hg, \beta h\alpha)m.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}(h, \beta)\varphi((g, \alpha) \otimes m) &= (h, \beta)((g, \alpha) \otimes (g, \alpha)m) \\ &= (hg, \beta h\alpha) \otimes (hg, \beta h\alpha)m.\end{aligned}$$

Así que  $\varphi$  es un homomorfismo de  $k(G \rtimes C)$ -módulos.

Ahora definamos

$$\psi: k\text{Hom}_{G \rtimes C}(x, \_) \widehat{\otimes} k_M \longrightarrow k\text{Hom}_{G \rtimes C}(x, \_) \otimes M$$

$$(g, \alpha) \otimes m \longmapsto (g, \alpha) \otimes g^{-1}m,$$

el cual también es un homomorfismo de  $k(G \rtimes C)$ -módulos:

$$\begin{aligned}\psi[(h, \beta)((g, \alpha) \otimes m)] &= \psi[(hg, \beta h\alpha) \otimes (h, \beta)m] \\ &= (hg, \beta h\alpha) \otimes g^{-1}h^{-1}(h, \beta)m \\ &= (hg, \beta h\alpha) \otimes g^{-1}m\end{aligned}$$

y también tenemos

$$\begin{aligned}(h, \beta)\psi((g, \alpha) \otimes m) &= (h, \beta)((g, \alpha) \otimes g^{-1}m) \\ &= (hg, \beta h\alpha) \otimes g^{-1}m.\end{aligned}$$

Ahora veamos que  $\psi$  es la inversa de  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}\psi\varphi((g, \alpha) \otimes m) &= \psi((g, \alpha) \otimes (g, \alpha)m) \\ &= \psi((g, \alpha) \otimes g^{-1}m) \\ &= (g, \alpha) \otimes g^{-1}gm \\ &= (g, \alpha) \otimes m\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}\varphi\psi((g, \alpha) \otimes m) &= \varphi((g, \alpha) \otimes g^{-1}m) \\ &= (g, \alpha) \otimes (g, \alpha)(g^{-1}m) \\ &= (g, \alpha) \otimes m.\end{aligned}$$

Como  $M$  es un  $k$ -módulo libre, y además, un  $k(G \rtimes C)$  módulo con la acción trivial, el isomorfismo de  $k$ -módulos,  $B \otimes_k M \cong B^{\dim_k M}$  también es un isomorfismo de  $k(G \rtimes C)$ -módulos. Ya que  $B$  es un módulo proyectivo, se sigue que  $B \otimes M$  es proyectivo y consecuentemente  $B \widehat{\otimes} k_M$  es proyectivo.  $\square$

**Corolario 3.2.8.**  $B_*^{G \rtimes C} \widehat{\otimes} k_M \longrightarrow \underline{k} \widehat{\otimes} k_M = k_M \longrightarrow 0$  es una resolución proyectiva.

**Demostración.** Por el lema anterior sabemos que  $B_n^{G \rtimes C} \widehat{\otimes} k_M$  es proyectivo para toda  $n$ . La exactitud de la sucesión

$$B_*^{G \rtimes C} \widehat{\otimes} k_M \longrightarrow \underline{k} \widehat{\otimes} k_M \cong k_M \longrightarrow 0$$

se debe a que en cada objeto  $c$  de  $G \times C$  la sucesión anterior nos da la sucesión  $B_*^{G \times C}(c) \otimes M$ , pero  $M$  como  $k$ -módulo es libre y por tanto plano, es decir, el funtor  $\_ \otimes M$  es exacto.  $\square$

Hasta ahora hemos podido conseguir, bajo ciertas restricciones, resoluciones proyectivas para  $k(G \times C)$ -módulos que provienen de un  $kG$ -módulo bajo el funtor  $\text{Res}_\pi$ . Ahora veremos que las resoluciones  $B_*^{G \times C}$  y  $\text{Res}_\pi B_*^G$  están estrechamente relacionadas por medio de un morfismo que es único salvo homotopía. Lo mismo pasa cuando tomamos una resolución de la forma  $B_*^{G \times C} \widehat{\otimes} k_M \rightarrow k_M$ .

**Lema 3.2.9.** *El funtor  $\pi: G \times C \rightarrow G$  induce un morfismo de cadenas natural, único salvo homotopía  $\Pi: \{B_*^{G \times C} \rightarrow \underline{k} \rightarrow 0\} \rightarrow \{k_{B_*^G} \rightarrow \underline{k} \rightarrow 0\}$ . Más aún, para cualquier  $M \in kG\text{-mod}$ , induce naturalmente un morfismo de cadenas entre sucesiones exactas de  $k(G \times C)$ -módulos*

$$\Pi_M: \{B_*^{G \times C} \widehat{\otimes} k_M \rightarrow \underline{k} \rightarrow 0\} \rightarrow \{k_{B_*^G} \widehat{\otimes} k_M = k_{B_*^G \otimes M} \rightarrow \underline{k} \rightarrow 0\}$$

**Demostración.** Los complejos  $B_*^{G \times C} \rightarrow \underline{k} \rightarrow 0$  y  $k_{B_*^G} \rightarrow \underline{k} \rightarrow 0$  evaluados en cualquier  $x \in \text{Obj}(G \times C)$  son  $\mathbb{C}_*(1_{G \times C}/x) \rightarrow k \rightarrow 0$  y  $B_*^G \rightarrow k \rightarrow 0$  respectivamente. El funtor  $\pi: G \times C \rightarrow \beta G$ , induce un morfismo  $\Pi: B_*^{G \times C} \rightarrow B_*^G$  de la siguiente manera: En una  $n$ -cadena en  $1_{G \times C}/x$  de la forma  $(a_0, \alpha_0) \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_n} (a_n, \alpha_n)$ , donde  $\alpha_i = (g_i, g_i a_i \rightarrow x)$  y  $\gamma_i = (h_i, h_i a_i \rightarrow a_{i+1})$  son morfismos en  $G \times C$ . Definimos

$$\Pi((a_0, \alpha_0) \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_n} (a_n, \alpha_n)) = (\bullet, g_0) \xrightarrow{h_1} \dots \xrightarrow{h_n} (\bullet, g_n).$$

Este morfismo está bien definido ya que  $(\bullet, g_0) \xrightarrow{h_1} \dots \xrightarrow{h_n} (\bullet, g_n)$  es una  $n$ -cadena de  $1_{\beta G}/\bullet$ . Además si tenemos un morfismo  $\beta = (r, rx \rightarrow y): x \rightarrow y$  en  $G \times C$

$$\begin{aligned} B_n^G \pi(\beta) \Pi((a_0, \alpha_0) \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_n} (a_n, \alpha_n)) &= B_n^G \pi(\beta) ((\bullet, g_0) \xrightarrow{h_1} \dots \xrightarrow{h_n} (\bullet, g_n)) \\ &= (\bullet, r g_0) \xrightarrow{h_1} \dots \xrightarrow{h_n} (\bullet, r g_n), \end{aligned}$$

y

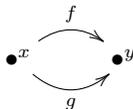
$$\begin{aligned} \Pi B_n^{G \times C}(\beta) ((a_0, \alpha_0) \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_n} (a_n, \alpha_n)) &= \Pi((a_0, \beta \alpha_0) \xrightarrow{\gamma_1} \dots \xrightarrow{\gamma_n} (a_n, \beta \alpha_n)) \\ &= (\bullet, r g_0) \xrightarrow{h_1} \dots \xrightarrow{h_n} (\bullet, r g_n), \end{aligned}$$

es decir, conmuta el diagrama

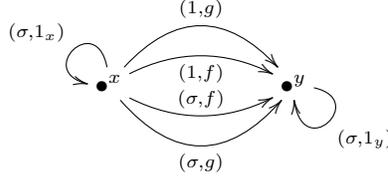
$$\begin{array}{ccc} B_n^{G \times C}(x) & \xrightarrow{\Pi} & k_{B_n^G}(x) \\ \downarrow B_n^{G \times C}(\beta) & & \downarrow k_{B_n^G}(\beta) \\ B_n^{G \times C}(y) & \xrightarrow{\Pi} & k_{B_n^G}(y) \end{array}$$

y con esto se demuestra que  $\Pi$  es un morfismo de  $k(G \times C)$ -módulos. Es fácil ver que  $\Pi \partial = \partial' \Pi$ , donde  $\partial$  y  $\partial'$  son las diferenciales de  $B_n^{G \times C}(x)$  y  $k_{B_n^G}(x)$  respectivamente. Lo único que nos falta demostrar es que es único salvo homotopía. Ya que  $k_{B_n^G}$  es exacto y  $\epsilon = \epsilon \Pi$ , con  $\epsilon$  la aumentación, por la [Proposición 1.4.5](#)  $\Pi$  es único salvo homotopía. El morfismo  $\Pi_M$  se construye de la misma forma.  $\square$

**Nota 3.2.10.** Debemos notar que  $B_*^{G \times C}$  es una resolución proyectiva mientras que  $k_{B_*^G}$  no necesariamente lo es. Esto se debe a que  $\text{Res}_\pi$  no necesariamente preserva proyectivos. Pero sí es un funtor exacto. Por ejemplo, sea  $C$  la siguiente categoría:



con la acción de  $\mathbb{Z}_2 = \{1, \sigma\}$  definida como  $\sigma x = x, \sigma y = y, \sigma f = g$  y  $\sigma g = f$ . Entonces la categoría transportadora  $\mathbb{Z}_2 \ltimes C$  es



Consideremos  $k\mathbb{Z}_2$  y veremos que  $\text{Res}_\pi k\mathbb{Z}_2$  no es proyectivo como  $(\mathbb{Z}_2 \ltimes C)$ -módulo. Recordemos que  $\text{Res}_\pi k\mathbb{Z}_2 = k\mathbb{Z}_2 \oplus k\mathbb{Z}_2$  con acción dada por

$$(c, h) \cdot (a, b) = \begin{cases} (ca, 0) & \text{si } (c, h) \text{ es un morfismo de } x \text{ a } x \\ (0, cb) & \text{si } (c, h) \text{ es un morfismo de } y \text{ a } y \\ (0, ca) & \text{si } (c, h) \text{ es un morfismo de } x \text{ a } y \end{cases}$$

donde  $(c, h)$  está en  $\mathbb{Z}_2 \ltimes C$  y  $(a, b) \in k\mathbb{Z}_2 \oplus k\mathbb{Z}_2$ . De aquí tenemos que  $\text{Res}_\pi k\mathbb{Z}_2$  está generado por  $(1, 0)$  como  $k(\mathbb{Z}_2 \ltimes C)$ -módulo. Si definimos  $p: k(\mathbb{Z}_2 \ltimes C) \rightarrow \text{Res}_\pi k\mathbb{Z}_2$  de tal forma que  $p((1, 1_x) + (1, 1_y)) = (1, 0)$ , entonces  $p$  es suprayectivo. Si  $\text{Res}_\pi k\mathbb{Z}_2$  fuera proyectivo, entonces

$$\text{Ker}(p) \longrightarrow k(\mathbb{Z}_2 \ltimes C) \xrightarrow{p} \text{Res}_\pi k\mathbb{Z}_2$$

se escindiría, es decir, existiría un homomorfismo  $s: \text{Res}_\pi k\mathbb{Z}_2 \rightarrow k(\mathbb{Z}_2 \ltimes C)$  de  $k(\mathbb{Z}_2 \ltimes C)$ -módulos tal que  $ps = 1_{\text{Res}_\pi k\mathbb{Z}_2}$ . Para que  $s$  tuviera esta propiedad, debería enviar  $(1, 0)$  a un elemento al cual envíe  $p$  al  $(1, 0)$ . Estos elementos son de la forma  $(1, 1_x) + (1, 1_y) + q$  y  $(1, 1_x) + q$ , donde  $q$  es un elemento del núcleo de  $p$ . Los generadores de  $\text{Ker}(p)$  son  $(1, f) - (1, g), (\sigma, f) - (\sigma, g), (1, 1_y)$  y  $(\sigma, 1_y)$ . Supongamos que  $s(1, 0) = (1, 1_x) + (1, 1_y) + r_1((1, f) - (1, g)) + r_2((\sigma, f) - (\sigma, g)) + r_3(1, 1_y) + r_4(\sigma, 1_y)$ , ya que queremos que  $s$  sea un homomorfismo de  $k(\mathbb{Z}_2 \ltimes C)$ -módulos se debe cumplir que  $r((1, f)(1, 0)) = (1, f)((1, 1_x) + (1, 1_y) + r_1((1, f) - (1, g)) + r_2((\sigma, f) - (\sigma, g)) + r_3(1, 1_y) + r_4(\sigma, 1_y))$ , pero

$$(1, f)((1, 1_x) + (1, 1_y) + r_1((1, f) - (1, g)) + r_2((\sigma, f) - (\sigma, g)) + r_3(1, 1_y) + r_4(\sigma, 1_y)) = (1, f).$$

Puesto que  $(1, f)(1, 0) = (0, 1)$  se sigue que  $s(0, 1) = (1, f)$ . Aplicando de nuevo el argumento con  $(1, g)$ , obtenemos que  $s((1, g)(1, 0)) = s(0, 1) = (1, g)$  por lo tanto  $s$  no estaría bien definida. Lo mismo ocurre si  $s(1, 0) = (1, 1_x) + q$ . Así que  $\text{Res}_\pi k\mathbb{Z}_2$  no es un  $k(\mathbb{Z}_2 \ltimes C)$ -módulo proyectivo.

Ya vimos que  $B_*^G$  es una resolución proyectiva de  $kG$ -módulos para  $k$ . Así que  $B_*^G \otimes M$  es una resolución proyectiva para  $M$ . Aplicando el funtor  $\text{Hom}_{kG}(\quad, N)$  para otro  $kG$ -módulo  $N$ , obtenemos el complejo de cocadena  $\text{Hom}_{kG}(B_*^G \otimes M, N)$ . El funtor  $\text{Res}_\pi$  induce un morfismo de cadenas

$$\text{Hom}_{kG}(B_*^G \otimes M, N) \xrightarrow{\text{Res}_\pi} \text{Hom}_{k(G \ltimes C)}(k_{B_*^G \otimes M}, k_N)$$

Como dijimos anteriormente, no sabemos si  $k_{B_*^G \otimes M}$  es una resolución proyectiva. Pero con el morfismo  $\Pi_M$  construido en el [Lema 3.2.9](#) obtenemos morfismos de cadenas

$$\text{Hom}_{kG}(B_*^G \otimes M, N) \xrightarrow{\text{Res}_\pi} \text{Hom}_{k(G \ltimes C)}(k_{B_*^G \otimes M}, k_N) \xrightarrow{\Pi_M^*} \text{Hom}_{k(G \ltimes C)}(B_*^{G \ltimes C} \widehat{\otimes} k_M, k_N).$$

La composición  $\Pi_M \circ \text{Res}_\pi$  induce en homología un morfismo  $\text{res}_C^{M, N}$  que llamaremos *restricción*:

$$\text{Ext}_{kG}^*(M, N) \xrightarrow{\text{res}_C^{M, N}} \text{Ext}_{k(G \ltimes C)}^*(k_M, k_N).$$

El siguiente resultado nos da una caracterización de este morfismo recién construido.

**Proposición 3.2.11.** *El morfismo  $\text{res}_C^{M,N} : \text{Ext}_{kG}^*(M, N) \rightarrow \text{Ext}_{k(G \rtimes C)}^*(k_M, k_N)$  es inducido por la aumentación  $\epsilon : \mathbb{C}_*(C) \rightarrow k$ .*

**Demostración.** Por adjunción tenemos un isomorfismo

$$\Omega : \text{Hom}_{k(G \rtimes C)}(B_*^{G \rtimes C} \widehat{\otimes} k_M, k_N) \rightarrow \text{Hom}_{kG}(\text{LK}_\pi(B_*^{G \rtimes C} \widehat{\otimes} k_M), N)$$

Por el Corolario 3.2.6 hay un isomorfismo  $\text{Hom}_{kG}(\text{LK}_\pi(B_*^{G \rtimes C} \widehat{\otimes} k_M), N) \cong \text{Hom}_{kG}(\text{LK}_\pi(B_*^{G \rtimes C}) \otimes M, N)$ . Y con el Corolario 3.2.5 tenemos que  $\text{LK}_\pi B_*^{G \rtimes C} \simeq B_*^G \otimes \mathbb{C}_*(C)$ , de esta manera,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{kG}(\text{LK}_\pi(B_*^{G \rtimes C}) \otimes M, N) &\simeq \text{Hom}_{kG}(B_*^G \otimes \mathbb{C}_*(C) \otimes M, N) \\ &\cong \text{Hom}_{kG}(B_*^G \otimes M \otimes \mathbb{C}_*(C), N) \end{aligned}$$

Cuando tomamos un  $kG$ -homomorfismo  $\alpha : B_*^G \otimes M \rightarrow N$ , a nivel de complejos, estos morfismos e isomorfismos para la construcción de la restricción, llevan a  $\alpha$  al  $kG$ -homomorfismo

$$\Lambda_N \circ \text{LK}_\pi((\text{Res}_\pi \alpha) \Pi_M) \phi \psi v : B_*^G \otimes M \otimes \mathbb{C}_*(C) \rightarrow N,$$

donde  $v$  es el isomorfismo  $B_*^G \otimes M \otimes \mathbb{C}_*(C) \cong B_*^G \otimes \mathbb{C}_*(C) \otimes M$ ,  $\psi$  la equivalencia homotópica  $B_*^G \otimes \mathbb{C}_*(C) \otimes M \simeq \text{LK}_\pi(B_*^{G \rtimes C}) \otimes M$ ,  $\phi$  es el isomorfismo  $\text{LK}_\pi(B_*^{G \rtimes C}) \otimes M \cong \text{LK}_\pi(B_*^{G \rtimes C} \widehat{\otimes} k_M)$  y  $\Lambda_N : \text{LK}_\pi k_N \rightarrow N$  es la counidad de la adjunción  $\Omega$ .

Tomemos un elemento  $b^i \otimes m \otimes c^{n-i}$  de la base de  $(B_*^G \otimes M \otimes \mathbb{C}_*(C))_n$  con  $b^j$  y  $c^j$   $j$ -cadenas en  $1_{G \rtimes C} / \bullet$  y  $C$  respectivamente. Entonces

$$v(b^i \otimes m \otimes c^{n-i}) = b^i \otimes (c^{n-i} \otimes m).$$

Notemos que  $\psi$  se factoriza a través de  $\mathbb{C}_*((1_{\beta_G} / \bullet) \times C)$  utilizando el morfismo de Eilenberg-Zilber el cual envía  $b^i \otimes (c^{n-i} \otimes m)$  a una suma de  $n$ -cadenas de la forma  $\pm(b^n, c^n) \otimes m$ . Inmediatamente se le aplica el isomorfismo  $((1_{\beta_G} / \bullet) \times C) \cong \pi / \bullet$  a esa suma de  $n$ -cadenas. Tomemos un elemento  $(b^n, c^n) \otimes m$  de dicha suma. Veremos a  $b^n$  como la  $n$ -cadena  $b_0 \rightarrow \dots \rightarrow b_n$  con morfismos  $b_{j+1}^{-1} b_j : b_j \rightarrow b_{j+1}$  y  $c^n = c_0 \rightarrow \dots \rightarrow c_n$  con morfismos  $\alpha_j : c_{j-1} \rightarrow c_j$  para  $j = 1, \dots, n$ . El elemento que nos queda en  $\mathbb{C}_n(\pi / \bullet) \otimes M$  es

$$(b_0^{-1} c_0, b_0) \xrightarrow{(b_1^{-1} b_0, b_1^{-1} \alpha_1)} \dots \xrightarrow{(b_n^{-1} b_{n-1}, b_n^{-1} \alpha_n)} (b_n^{-1} c_n, b_n) \otimes m$$

el cual es llevado a  $\text{LK}_\pi B_*^{G \rtimes C} \otimes M$  por medio del isomorfismo  $\mathbb{C}_*(\pi / \bullet) \cong \text{LK}_\pi B_*^{G \rtimes C}$  quedando

$$[(b_0^{-1} c_0, \gamma_0) \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_j} (b_j^{-1} c_j, \gamma_j) \xrightarrow{f_{j+1}} \dots \xrightarrow{f_n} (b_n^{-1} c_n, \gamma_n)] \otimes m$$

donde  $\gamma_i = (b_n^{-1} b_{n-1}, b_n^{-1} \alpha_n) \circ \dots \circ (b_{i+1}^{-1} b_i, b_{i+1}^{-1} \alpha_{i+1})$  para  $0 \leq i < n$ ,  $\gamma_n = (e, 1_{b_n^{-1} c_n})$  y  $f_i = (b_i^{-1} b_{i-1}, b_i^{-1} \alpha_i)$  para  $1 \leq i \leq n$ .

La  $n$ -cadena

$$(b_0^{-1} c_0, \gamma_0) \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_j} (b_j^{-1} c_j, \gamma_j) \xrightarrow{f_{j+1}} \dots \xrightarrow{f_n} (b_n^{-1} c_n, \gamma_n)$$

está en  $\beta_\bullet(b_n^{-1} c_n, b_n)$ . Para llegar a  $\lim_C B_*^{G \rtimes C} \iota$  aplicamos el morfismo  $B_*^{G \rtimes C}(b_n, 1_{c_n})$ :

$$\begin{aligned} &[B_*^{G \rtimes C}(b_n, 1_{c_n})((b_0^{-1} c_0, \gamma_0) \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_j} (b_j^{-1} c_j, \gamma_j) \xrightarrow{f_{j+1}} \dots \xrightarrow{f_n} (b_n^{-1} c_n, \gamma_n))] \otimes m \\ &= [(b_0^{-1} c_0, (b_n, 1_{c_n}) \gamma_0) \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_j} (b_j^{-1} c_j, (b_n, 1_{c_n}) \gamma_j) \xrightarrow{f_{j+1}} \dots \xrightarrow{f_n} (b_n^{-1} c_n, (b_n, 1_{c_n}) \gamma_n)] \otimes m \end{aligned}$$

cuyo representante de la clase está en  $B_*^{G \rtimes C} \iota(c_n)$ . De aquí podemos llevarlo a  $\text{LK}_\pi(B_*^{G \rtimes C} \widehat{\otimes} k_M)$  quedando de la forma

$$[(b_0^{-1} c_0, (b_n, 1_{c_n}) \gamma_0) \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_j} (b_j^{-1} c_j, (b_n, 1_{c_n}) \gamma_j) \xrightarrow{f_{j+1}} \dots \xrightarrow{f_n} (b_n^{-1} c_n, (b_n, 1_{c_n}) \gamma_n) \otimes m]$$

y aplicando  $\text{Res}_\pi(\alpha)\Pi_M$  al representante de esta clase obtenemos

$$[\alpha(b_n b_n^{-1} \cdots b_0 \xrightarrow{b_1^{-1} b_0} \cdots \xrightarrow{b_n^{-1} b_{n-1}} b_n \otimes m)] = [\alpha(b_0 \rightarrow \cdots \rightarrow b_n \otimes m)],$$

el cual pertenece a  $\text{LK}_\pi k_N$ , con su representante en  $\beta_\bullet(c_n, e)$ . Lo que hace  $\Lambda_N$  en este caso, es aplicar el morfismo  $N(e)$  al representante, esto la identidad en  $N$ , por tanto, al final nos quedamos con

$$\alpha(b_0 \rightarrow \cdots \rightarrow b_n \otimes m^0).$$

Ahora, veremos qué pasa cuando aplicamos el morfismo  $AW$  de Alexander-Whitney. Cuando  $i \neq n$ , las  $n$ -cadenas que surgen al aplicar  $AW$  al elemento  $b^i \otimes c^{n-i} \otimes m$  tienen al menos una identidad en las primeras coordenadas, es decir,  $b^n$  en  $(b^n, c^n) \otimes m$  tiene la forma  $b_0 \rightarrow \cdots \rightarrow b_r \rightarrow b_r \rightarrow \cdots \rightarrow b_i$ , y por tanto

$$\Lambda_N \circ \text{LK}_\pi((\text{Res}_\pi \alpha)\Pi_M)\phi\psi((b^n, c^n) \otimes m) = \alpha(b_0 \rightarrow \cdots \rightarrow b_r \rightarrow b_r \rightarrow \cdots \rightarrow b_i) = 0$$

pues  $(b_0 \rightarrow \cdots \rightarrow b_r \rightarrow b_r \rightarrow \cdots \rightarrow b_i) = 0$  en  $B_n^G(\bullet)$ . Esto no pasa cuando  $i = n$ , pues si desde el principio  $b_0 \rightarrow \cdots \rightarrow b_n \neq 0$ , entonces

$$\Lambda_N \circ \text{LK}_\pi((\text{Res}_\pi \alpha)\Pi_M)\phi\psi((b^n, c^n) \otimes m) = \alpha(b_0 \rightarrow \cdots \rightarrow b_n \otimes m) \neq 0.$$

Lo anterior significa que  $\text{res}_C^{M,N}$  es lo mismo que el inducido por el homomorfismo  $(1_{B_*^G} \otimes 1_M \otimes \epsilon)^*(\alpha)$ , donde  $\epsilon: \mathbb{C}_*(C) \rightarrow k$  es la aumentación.  $\square$

Ahora podemos construir un morfismo de transfer. Continuamos desde el complejo  $\text{Hom}_{kG}(B_*^G \otimes M \otimes \mathbb{C}_*(C, k), N)$ . Consideremos

$$(DW^F)^*: \text{Hom}_{kG}(B_*^G \otimes M \otimes \mathbb{C}_*(C), N) \rightarrow \text{Hom}_{kG}(B_*^G \otimes M, N).$$

donde  $(DW^F)^*$  es el inducido por el morfismo de cadenas  $DW^F: k \rightarrow \mathbb{C}_*(C)$  de Dwyer-Wilkerson visto en la [Sección 3.1](#). Al morfismo inducido en cohomología por la composición

$$\text{Hom}_{k(G \rtimes C)}(B_*^{G \rtimes C} \widehat{\otimes} k_M, k_N) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{kG}(B_*^G \otimes M \otimes \mathbb{C}_*(C), N) \xrightarrow{(DW^F)^*} \text{Hom}_{kG}(B_*^G \otimes M, N)$$

es al que llamaremos *transfer*.

Como podemos notar, el morfismo de transfer que acabamos de construir está inducido por el morfismo  $DW^F$ . Antes de verificar qué nos da la composición  $\text{tr}_C^{M,N} \circ \text{res}_C^{M,N}$  necesitamos la siguiente definición

**Definición 3.2.12.** Sea  $F: C \rightarrow C$  un funtor. Y sea  $F_*: \mathbb{C}_*(C) \rightarrow \mathbb{C}_*(C)$  el morfismo de complejos inducido por  $F$ . El número de Lefschetz de  $F$  se define como

$$\Lambda(F) = \sum_i (-1)^i \text{traza}(F_i: \mathbb{C}_i(C) \rightarrow \mathbb{C}_i(C)).$$

El siguiente teorema nos relaciona la restricción y el transfer.

**Teorema 3.2.13.** Sea  $F: C \rightarrow C$  un  $G$ -funtor. Entonces la composición

$$\text{Ext}_{kG}^*(M, N) \xrightarrow{\text{res}_C^{M,N}} \text{Ext}_{k(G \rtimes C)}^*(k_M, k_N) \xrightarrow{\text{tr}_C^{M,N}} \text{Ext}_{kG}^*(M, N)$$

es multiplicación por  $\Lambda(F)$ .

**Demostración.** La composición  $\text{tr}_C^{M,N} \circ \text{res}_C^{M,N}$  se calcula a partir de la homología de

$$\text{Hom}_{kG}(B_*^G \otimes M, N) \longrightarrow \text{Hom}_{k(G \rtimes C)}(B_*^{G \rtimes C} \widehat{\otimes} k_M, k_N) \longrightarrow \text{Hom}_{kG}(B_*^G \otimes M, N).$$

Sin embargo, el complejo  $\text{Hom}_{k(G \ltimes C)}(B_*^{G \ltimes C} \widehat{\otimes} k_M, k_N)$  es casi isomorfo al complejo  $\text{Hom}_{kG}(B_*^G \otimes M \otimes \mathbb{C}_*(C), N)$ , por lo tanto  $\text{tr}_C^{M,N} \circ \text{res}_C^{M,N}$  se puede obtener con

$$\text{Hom}_{kG}(B_*^G \otimes M, N) \xrightarrow{(\epsilon)^*} \text{Hom}_{kG}(B_*^G \otimes M \otimes \mathbb{C}_*(C, k)) \xrightarrow{(DW^F)^*} \text{Hom}_{kG}(B_*^G \otimes M, N).$$

Ya que esta composición esta inducida por

$$k \xrightarrow{DW^F} \mathbb{C}_*(C) \xrightarrow{\epsilon} k$$

basta con calcular esta última. Entonces se demostrará que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{\mu} & \text{Hom}(\mathbb{C}_*(C), \mathbb{C}_*(C)) \\ & & \downarrow \Gamma \\ & & \mathbb{C}_*(C)^* \otimes \mathbb{C}_*(C) \\ & & \downarrow 1 \otimes \Delta \\ & & \mathbb{C}_*(C)^* \otimes \mathbb{C}_*(C) \otimes \mathbb{C}_*(C) \\ & & \downarrow \text{ev} \otimes 1 \\ k & \xleftarrow{\epsilon} & \mathbb{C}_*(C) \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot \Lambda(F) \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array}$$

Sea  $\{c_k^i\}_{k=1}^{d_i}$  la base natural de  $\mathbb{C}_i(C, k)$ , y cuya dimensión es  $d_i$ . Ya hemos calculado qué hace el morfismo  $DW^F$ , entonces

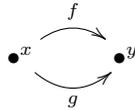
$$\begin{aligned} \epsilon DW^F(1) &= \epsilon \left( \sum_{i=0}^d (-1)^i \left( \sum_{j=1}^{d_i} [(c_j^i)^*(F_i(c_j^i))] \cdot z^i(F_i(c_j^i)) \right) \right) \\ &= \sum_{i=0}^d (-1)^i \text{traza}(F_i: \mathbb{C}_i(C) \rightarrow \mathbb{C}_i(C)) \end{aligned}$$

que precisamente es  $\Lambda(F)$ . Como todo  $a \in k$  es igual a  $a \cdot 1$  y todos los morfismos utilizados en el transfer y restricción son, en particular, de  $k$ -módulos, entonces la composición es multiplicación por  $\Lambda(F)$ .  $\square$

Con este teorema, al tomar  $F: C \rightarrow C$  como el funtor identidad en  $C$ , el morfismo  $\text{tr}_C^{M,N} \circ \text{res}_C^{M,N}$  es la característica de Euler de la categoría  $C$ . Esto es inmediato del cálculo anterior.

En el siguiente ejemplo calcularemos el transfer de una forma más explícita.

**Ejemplo 3.2.14.** Sea  $\mathbb{Z}_2 = \{1, \sigma\}$  y  $C$  la  $\mathbb{Z}_2$ -categoría



con la acción de  $\mathbb{Z}_2$  definida por  $\sigma x = x, \sigma y = y, \sigma f = g$  y  $\sigma g = f$ . Tomemos  $k = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$  y  $M, N = \mathbb{F}_2$ . El  $\mathbb{Z}_2$ -functor que consideraremos para el morfismo  $DW^F$  será la identidad de  $C$ .

Para calcular  $B_*^{\mathbb{Z}_2}$  notemos que los objetos de  $1_{\beta \mathbb{Z}_2} / \bullet$  son los pares  $(\bullet, 1)$  y  $(\bullet, \sigma)$ . Entonces  $B_0^{\mathbb{Z}_2} = \mathbb{F}_2\{(\bullet, 1), (\bullet, \sigma)\}$ . Para  $n > 0$  queremos  $n$ -cadenas de morfismos que se puedan componer y que no contengan morfismos identidad. Ya que el complejo  $B_*^{\mathbb{Z}_2}$  lo tomamos normalizado, entonces las únicas  $n$ -cadenas que no contienen identidades son  $(\bullet, 1) \xrightarrow{\sigma} (\bullet, \sigma) \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} a$  y  $(\bullet, \sigma) \xrightarrow{\sigma} (\bullet, 1) \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} b$ ,

donde  $a$  y  $b$  pueden ser  $(\bullet, 1)$  o  $(\bullet, \sigma)$  dependiendo de la paridad de  $n$ . Notemos que podemos identificar ambas  $n$ -cadenas con el objeto por el que empiezan. De esta manera para toda  $n \geq 0$  identificamos a  $B_n^{\mathbb{Z}_2}$  como el  $\mathbb{F}_2$ -módulo generado por los elementos  $(\bullet, 1)$  y  $(\bullet, \sigma)$ .

Por otro lado,  $\mathbb{C}_0(C) = \mathbb{F}_2\{x\} \oplus \mathbb{F}_2\{y\}$ ,  $\mathbb{C}_1(C) = \mathbb{F}_2\{f\} \oplus \mathbb{F}_2\{g\}$  y  $\mathbb{C}_n(C) = 0$  para  $n \geq 2$ . Entonces  $(B_*^{\mathbb{Z}_2} \otimes \mathbb{C}_*(C))_0 = B_0^{\mathbb{Z}_2} \otimes \mathbb{C}_0(C)$  y  $(B_*^{\mathbb{Z}_2} \otimes \mathbb{C}_*(C))_n = (B_{n-1}^{\mathbb{Z}_2} \otimes \mathbb{C}_1(C)) \oplus (B_n^{\mathbb{Z}_2} \otimes \mathbb{C}_0(C))$  para toda  $n \geq 1$ . Queremos saber cuáles son las transformaciones naturales de  $(B_*^{\mathbb{Z}_2} \otimes \mathbb{C}_*(C))_n$  a  $\mathbb{F}_2$ , es decir, debemos encontrar los morfismos de  $kG$ -módulos que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (B_*^{\mathbb{Z}_2} \otimes \mathbb{C}_*(C))_n(\bullet) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{F}_2 \\ (B_*^{\mathbb{Z}_2} \otimes \mathbb{C}_*(C))_n(\sigma) \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbb{F}_2} \\ (B_*^{\mathbb{Z}_2} \otimes \mathbb{C}_*(C))_n(\bullet) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{F}_2 \end{array}$$

Pero  $(B_*^{\mathbb{Z}_2} \otimes \mathbb{C}_*(C))_n(\sigma)$  lleva a la  $n$ -cadena  $(\bullet, \sigma) \otimes f$  a  $(\bullet, 1) \otimes g$  y viceversa. De igual forma lleva  $(\bullet, \sigma) \otimes g$  a  $(\bullet, 1) \otimes f$ . Al elemento  $(\bullet, \sigma) \otimes x$  lo lleva a  $(\bullet, 1) \otimes x$  y  $(\bullet, \sigma) \otimes y$  a  $(\bullet, 1) \otimes y$ . De aquí, tenemos que para que  $\varphi$  sea un morfismo de  $kG$ -módulos se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \varphi((\bullet, \sigma) \otimes f) &= \varphi((\bullet, 1) \otimes g), \\ \varphi((\bullet, \sigma) \otimes g) &= \varphi((\bullet, 1) \otimes f), \\ \varphi((\bullet, \sigma) \otimes x) &= \varphi((\bullet, 1) \otimes x), \text{ y} \\ \varphi((\bullet, \sigma) \otimes y) &= \varphi((\bullet, 1) \otimes y). \end{aligned}$$

Entonces podemos definir  $\varphi$  en los elementos  $(\bullet, 1) \otimes g$ ,  $(\bullet, 1) \otimes f$ ,  $(\bullet, 1) \otimes x$  y  $(\bullet, 1) \otimes y$  haciendo cumplir las identidades anteriores para que sea un homomorfismo de  $kG$ -módulos. Esto nos da un total de  $2^4$  posibilidades para asignar esos cuatro elementos de la base. Denotaremos  $\varphi_i^n$  para  $i = 0, \dots, 15$  al  $kG$ -homomorfismo que envía la base (ordenada)  $\{(\bullet, 1) \otimes g, (\bullet, 1) \otimes f, (\bullet, 1) \otimes x, (\bullet, 1) \otimes y\}$  de acuerdo a la expresión de  $i$  en base binaria, por ejemplo si  $i = 3$ , su expresión binaria es 0011 y por tanto  $\varphi_3^n((\bullet, 1) \otimes y) = 1$ ,  $\varphi_3^n((\bullet, 1) \otimes x) = 1$  y 0 en los demás elementos de la base.

Ahora vamos a calcular la homología en  $n > 0$  del complejo  $\text{Hom}_{\mathbb{F}_2[\mathbb{Z}_2]}(B_*^{\mathbb{Z}_2} \otimes \mathbb{C}_*(C) \otimes \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ . Para eso debemos calcular el núcleo de

$$D_{n+1}^* : \text{Hom}_{\mathbb{F}_2[\mathbb{Z}_2]}((B_*^{\mathbb{Z}_2} \otimes \mathbb{C}_*(C) \otimes \mathbb{F}_2)_n, \mathbb{F}_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}_2[\mathbb{Z}_2]}((B_*^{\mathbb{Z}_2} \otimes \mathbb{C}_*(C) \otimes \mathbb{F}_2)_{n+1}, \mathbb{F}_2).$$

Sea  $\varphi_i^n \in \text{Hom}_{\mathbb{F}_2[\mathbb{Z}_2]}((B_*^{\mathbb{Z}_2} \otimes \mathbb{C}_*(C) \otimes \mathbb{F}_2)_n, \mathbb{F}_2)$ , entonces  $D_{n+1}^*(\varphi_i^n) = \varphi_i^n D_{n+1}$ . Se tiene que

$$D_{n+1}((\bullet, 1) \otimes x) = (\partial(\bullet, 1) \otimes x) + ((\bullet, 1) \otimes \partial'(x)) = \partial(\bullet, 1) \otimes x,$$

donde  $\partial$  es la diferencial de  $B_*^{\mathbb{Z}_2}$  y  $\partial'$  es la diferencial de  $\mathbb{C}_*(C)$ . Recordemos que  $(\bullet, 1)$  representa la  $n+1$ -cadena que empieza en  $(\bullet, 1)$ . Ya que  $\partial = \sum_{i=0}^{n+1} d_i$  y cuando  $i \neq 0, n+1$ ,  $d_i(\bullet, 1) = 0$  pues al componer dos morfismos en  $1_{\beta\mathbb{Z}_2}/\bullet$  nos da la identidad, obtenemos que

$$\partial((\bullet, 1) \otimes x) = (\bullet, \sigma) \otimes x + (\bullet, 1) \otimes x$$

y por lo tanto

$$\varphi_i^n D_{n+1}((\bullet, 1) \otimes x) = \varphi_i^n((\bullet, \sigma) \otimes x + (\bullet, 1) \otimes x) = \varphi_i^n((\bullet, \sigma) \otimes x) + \varphi_i^n((\bullet, 1) \otimes x) = 0.$$

Similarmente para  $(\bullet, 1) \otimes y$ . Para  $(\bullet, 1) \otimes g$  nos da

$$\begin{aligned} \varphi_i^n D_{n+1}((\bullet, 1) \otimes g) &= \varphi_i^n((\bullet, \sigma) \otimes g + (\bullet, 1) \otimes g + (\bullet, 1) \otimes y + (\bullet, 1) \otimes x) \\ &= \varphi_i^n((\bullet, 1) \otimes f) + \varphi_i^n((\bullet, 1) \otimes g) + \varphi_i^n((\bullet, 1) \otimes y) + \varphi_i^n((\bullet, 1) \otimes x) \end{aligned}$$

Lo mismo ocurre con  $(\bullet, 1) \otimes f$ . Para que  $D_{n+1}^* \varphi_i^n = 0$ , se debe cumplir  $\varphi_i^n((\bullet, 1) \otimes f) + F_i^n((\bullet, 1) \otimes g) + \varphi_i^n((\bullet, 1) \otimes x) = \varphi_i^n((\bullet, 1) \otimes y)$ . Estos homomorfismos son:  $\varphi_0^n, \varphi_3^n, \varphi_5^n, \varphi_6^n, \varphi_9^n, \varphi_{10}^n, \varphi_{12}^n$  y  $\varphi_{15}^n$ . El mismo cálculo nos sirve para ver cuál es la imagen de  $D_n^*$ . La condición para las  $\varphi_i^n$  es que deben ser iguales en  $(\bullet, 1) \otimes g$  y  $(\bullet, 1) \otimes f$  y 0 en  $(\bullet, 1) \otimes x$  y  $(\bullet, 1) \otimes y$  lo cual nos deja con  $\varphi_0^n$  y  $\varphi_{12}^n$ . Pero tenemos que  $\varphi_3^n + \varphi_{12}^n = \varphi_{15}^n, \varphi_5^n + \varphi_{12}^n = \varphi_9^n, \varphi_6^n + \varphi_{12}^n = \varphi_{10}^n$  y  $\varphi_3 + \varphi_5 = \varphi_6$ . Así

$$\text{Ker}(D_{n+1}^*)/\text{Im}(D_n^*) \cong \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$$

con generadores  $[\varphi_3^n]$  y  $[\varphi_5^n]$ .

Ahora, para  $n = 0$  la homología es  $\text{Ker}(D_1^*)$ . El morfismo  $D_1^*$  va de  $\text{Hom}_{kG}(B_0^{\mathbb{Z}_2} \otimes C_0(C), \mathbb{F}_2)$  a  $\text{Hom}_{kG}((B_*^{\mathbb{Z}_2} \otimes C_*(C))_1, \mathbb{F}_2)$ . Como en los cálculos anteriores podemos definir un homomorfismo  $\varphi$  de  $kG$ -módulos en los elementos  $(\bullet, 1) \otimes x$  y en  $(\bullet, 1) \otimes y$  y haciendo que  $\varphi((\bullet, 1) \otimes x) = \varphi((\bullet, \sigma) \otimes x)$  y  $\varphi((\bullet, 1) \otimes y) = \varphi((\bullet, \sigma) \otimes y)$ . Para que  $\varphi \in \text{Ker}(D_1^*)$  se debe cumplir que  $\varphi D_1 = 0$ , entonces  $\varphi D_1((\bullet, 1) \otimes f) = 0$ , esto es,  $\varphi((\bullet, 1) \otimes y) + \varphi((\bullet, 1) \otimes x) = 0$  y en consecuencia  $\varphi((\bullet, 1) \otimes y) = \varphi((\bullet, 1) \otimes x)$ , lo cual nos deja con el morfismo cero y el que envía a los dos elementos de la base al 1.

Lo siguiente es aplicar el morfismo inducido en cohomología por

$$(1_{B_*^{\mathbb{Z}_2}} \otimes DW)^* : \text{Hom}_{kG}(B_*^{\mathbb{Z}_2} \otimes C_*(C), \mathbb{F}_2) \rightarrow \text{Hom}_{kG}(B_*^{\mathbb{Z}_2} \otimes \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2).$$

La cohomología de  $\text{Hom}_{kG}(B_*^{\mathbb{Z}_2}, \mathbb{F}_2)$  se obtiene fácilmente. Ya sabemos que las únicas  $n$ -cadenas están identificadas por el elemento por el que comienza dicha  $n$ -cadena. También, que para que un morfismo  $h$  sea de  $kG$ -módulos, debe cumplir que  $h(\bullet, 1) = h(\bullet, \sigma)$ . Al calcular el  $n$ -ésimo grupo de cohomología de  $\text{Hom}_{kG}(B_*^{\mathbb{Z}_2}, \mathbb{F}_2)$  vemos que  $\partial_{n+1}^* h = 0$  pues

$$h \partial_{n+1}(\bullet, 1) = h((\bullet, \sigma) - (\bullet, 1)) = 0.$$

Lo mismo ocurre con  $\partial_n^*$ , así que para toda  $n$ ,  $H_n(\text{Hom}_{kG}(B_*^{\mathbb{Z}_2} \otimes \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)) \cong \mathbb{F}_2$  con generador  $h$  que envía  $(\bullet, 1)$  y  $(\bullet, \sigma)$  a 1.

Calculemos la imagen de  $(1_{B_*^{\mathbb{Z}_2}} \otimes DW)^*$  en dimensión  $n > 0$ :

$$\begin{aligned} (1_{B_*^{\mathbb{Z}_2}} \otimes DW)^*(\varphi_3^n)((\bullet, 1) \otimes 1) &= \varphi_3^n(1_{B_*^{\mathbb{Z}_2}} \otimes DW)((\bullet, 1) \otimes 1) \\ &= \varphi_3^n((\bullet, 1) \otimes (x + y - (y + y))) \\ &= \varphi_3^n((\bullet, 1) \otimes x - y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Similarmemente,

$$(1_{B_*^{\mathbb{Z}_2}} \otimes DW)^*(\varphi_5^n)((\bullet, 1) \otimes 1) = \varphi_5^n((\bullet, 1) \otimes x - y) = 1.$$

Para  $n = 0$ , el morfismo  $\varphi$  es el que envía los dos elementos de la base al 1, y así

$$(1_{B_*^{\mathbb{Z}_2}} \otimes DW)^*(\varphi)((\bullet, 1) \otimes 1) = F((\bullet, 1) \otimes x - y) = 0.$$

A través de los isomorfismos correspondientes, el transfer

$$tr_{C}^{\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2} : \text{Ext}_{\mathbb{F}_2(\mathbb{Z}_2 \rtimes C)}^n(\text{Res}_\pi(\mathbb{F}_2), \text{Res}_\pi(\mathbb{F}_2)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{F}_2[\mathbb{Z}_2]}^n(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$$

viene dado por:

$$\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2 \longrightarrow \mathbb{F}_2$$

$$(1, 0) \longmapsto 0$$

$$(0, 1) \longmapsto 1,$$

para  $n > 0$ . Para  $n = 0$ , el transfer es el homomorfismo cero.

La construcción de este morfismo de transfer nos permite calcularlo en ejemplos sencillos como el anterior. Lo siguiente es compararlo con otras construcciones para morfismos de transfer.

**Ejemplo 3.2.15.** Un transfer muy explícito es el de espacios cubrientes descrito por Hatcher en [8]. Tomemos un grupo finito  $G$  y un subgrupo  $H$  de  $G$ . El conjunto de clases laterales  $G/H$  forman una  $G$ -categoría discreta, es decir, los únicos morfismos de esta categoría son las identidades. De esta forma, construimos la categoría transportadora  $G \ltimes G/H$  y por medio del funtor  $\pi: G \ltimes G/H \rightarrow \beta G$  podemos obtener un espacio cubriente  $|\pi|: |G \ltimes G/H| \rightarrow |\beta G|$  de  $[G : H]$  hojas a través de la realización geométrica  $|\cdot|$ . Así, el transfer de espacios cubrientes está inducido por  $tr: \mathbb{C}_*(|G \ltimes \bullet|) \rightarrow \mathbb{C}_*(|G \ltimes G/H|)$ , donde si tomamos un triángulo  $\sigma$  en  $|G \ltimes \bullet|$ , entonces  $tr(\sigma)$  es la suma de los  $[G : H]$  levantamientos de  $\sigma$ . Para poder comparar veremos que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{Hom}_k(\mathbb{C}_*(|G \ltimes G/H|), k) & \xrightarrow{tr^*} & \mathrm{Hom}_k(\mathbb{C}_*(|G \ltimes \bullet|), k) \\
 \downarrow i^* & & \downarrow i^* \\
 \mathrm{Hom}_k(\mathbb{C}_*(G \ltimes G/H), k) & & \mathrm{Hom}_k(\mathbb{C}_*(G \ltimes \bullet), k) \\
 \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\
 \mathrm{Hom}_k(\mathbb{C}_*((1_{\beta G}/\bullet \times G/H)/G), k) & & \mathrm{Hom}_k(\mathbb{C}_*((1_{\beta G}/\bullet \times \bullet)/G), k) \\
 \downarrow \Theta^* & & \downarrow \Theta^* \\
 \mathrm{Hom}_k(\mathbb{C}_*(1_{\beta G}/\bullet \times G/H)/G, k) & & \mathrm{Hom}_k(\mathbb{C}_*(1_{\beta G}/\bullet \times \bullet)/G, k) \\
 \downarrow P^* & & \downarrow P^* \\
 \mathrm{Hom}_{kG}(\mathbb{C}_*(1_{\beta G}/\bullet \times G/H), k) & & \mathrm{Hom}_{kG}(\mathbb{C}_*(1_{\beta G}/\bullet \times \bullet), k) \\
 \downarrow EZ^* & & \downarrow EZ^* \\
 \mathrm{Hom}_{kG}(B_*^G \otimes \mathbb{C}_*(G/H), k) & \xrightarrow{(1_{B_*^G} \otimes DW)^*} & \mathrm{Hom}_{kG}(B_*^G, k)
 \end{array}$$

Se hace el abuso de notación con los morfismos del diagrama porque son análogos. Específicamente,  $i^*$  es inducido por el morfismo  $i: \mathbb{C}_*(G \ltimes G/H) \rightarrow \mathbb{C}_*(|G \ltimes G/H|)$  mediante el funtor realización geométrica. Para ver cuál es el morfismo  $\Phi^*$  debemos describir la categoría  $(1_{\beta G}/\bullet \times G/H)/G$ . Esta categoría tiene por objetos clases de pares  $((\bullet, g_1), g'_1 H)$  donde  $g_1 \in G$  y  $g'_1 H$  es una clase lateral y  $((\bullet, g_1), g'_1 H) \sim ((\bullet, gg_2), gg'_2 H)$  para toda  $g \in G$ . Existe un morfismo  $[(\bullet, g_1), g'_1 H] \rightarrow [(\bullet, g_2), g'_2 H]$  si existe  $a \in G$  tal que  $ag'_1 H = g'_2 H$ , en este caso el morfismo es la clase del morfismo  $[g_2^{-1} a g_1, 1_{g'_2 H}]$  bajo la acción de  $G$ . Si tenemos morfismos

$$[(\bullet, g_1), g'_1 H] \xrightarrow{[g_2^{-1} a g_1, 1_{g'_2 H}]} [(\bullet, g_2), g'_2 H] \xrightarrow{[g_3^{-1} b g_2, 1_{g'_3 H}]} [(\bullet, g_3), g'_3 H]$$

definimos  $[g_3^{-1} b g_2, 1_{g'_3 H}] \circ [g_2^{-1} a g_1, 1_{g'_2 H}] = [g_3^{-1} b a g_1, 1_{g'_3 H}]$ .

Podemos demostrar que existe un isomorfismo de categorías  $\Phi: (1_{\beta G}/\bullet \times G/H)/G \cong G \ltimes G/H$ . Este funtor está definido de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi: (1_{\beta G}/\bullet \times G/H)/G & \longrightarrow & G \ltimes G/H \\
 [(\bullet, g_1), g'_1 H] & \longmapsto & g_1^{-1} g'_1 H \\
 [(\bullet, g_1), g'_1 H] & & g_1^{-1} g'_1 H \\
 \downarrow [g_2^{-1} a g_1, 1_{g'_2 H}] & \longmapsto & \downarrow (g_2^{-1} a g_1, 1_{g_2^{-1} g'_2 H}) \\
 [(\bullet, g_2), g'_2 H] & & g_2^{-1} g'_2 H
 \end{array}$$

$\Phi$  está bien definido en objetos y es fácil ver que envía identidades a identidades. De igual forma respeta composiciones.

Ya que el funtor  $\theta$  definido como

$$\begin{array}{ccc} \theta: 1_{\beta_G}/\bullet \times G/H & \longrightarrow & (1_{\beta_G}/\bullet \times G/H)/G \\ & & \\ & & ((\bullet, g_1), g'_1 H) \longmapsto [(\bullet, g_1), g'_1 H] \\ & & \\ & & \begin{array}{ccc} ((\bullet, g_1), g'_1 H) & & [(\bullet, g_1), g'_1 H] \\ (g_2^{-1} g_1, 1_{g'_1 H}) \downarrow \longmapsto & & \downarrow [g_2^{-1} g_1, 1_{g'_1 H}] \\ ((\bullet, g_2), g'_1 H) & & [(\bullet, g_2), g'_1 H] \end{array} \end{array}$$

induce un homomorfismo  $\theta^*: \mathbb{C}_*(1_{\beta_G}/\bullet \times G/H) \rightarrow \mathbb{C}_*((1_{\beta_G}/\bullet \times G/H)/G)$ , tal que  $\theta^*(gz) = \theta^*(z)$  para cualquier  $g \in G$ , entonces existe un isomorfismo  $\Theta: \mathbb{C}_*(1_{\beta_G}/\bullet \times G/H)/G \rightarrow \mathbb{C}_*((1_{\beta_G}/\bullet \times G/H)/G)$  tal que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_*(1_{\beta_G}/\bullet \times G/H) & \xrightarrow{\theta^*} & \mathbb{C}_*((1_{\beta_G}/\bullet \times G/H)/G) \\ \downarrow & \nearrow \Theta & \\ \mathbb{C}_*(1_{\beta_G}/\bullet \times G/H)/G & & \end{array}$$

La proyección canónica  $P: \mathbb{C}_*(1_{\beta_G}/\bullet \times G/H) \rightarrow \mathbb{C}_*(1_{\beta_G}/\bullet \times G/H)/G$  induce el morfismo  $P^*$ . Por último, el morfismo  $EZ^*$  es inducido por el morfismo  $EZ$  de Eilenberg-Zilber.

Entonces debemos demostrar en realidad que

$$i \circ \Phi \circ \Theta \circ P \circ EZ \circ (1_{B^G} \otimes DW) = tr \circ i \circ \Phi \circ \Theta \circ P \circ EZ.$$

Fijemos representantes de clases laterales  $\{g'_1 H, \dots, g'_m H\}$  donde  $m = [G : H]$  y  $g'_l H \neq g'_j H$  si  $l \neq j$ . Para un elemento  $u = (\bullet, g_1) \rightarrow \dots \rightarrow (\bullet, g_n)$  en  $B_n^G$  tenemos las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned} u &\xrightarrow{1_{B^G} \otimes DW} (\bullet, g_1) \rightarrow \dots \rightarrow (\bullet, g_n) \otimes \sum_{l=1}^m g'_l H \\ &\xrightarrow{EZ} \sum_{l=1}^m ((\bullet, g_1), g'_l H) \rightarrow \dots \rightarrow ((\bullet, g_n), g'_l H), \quad \text{con } (g_{j+1}^{-1} g_j, 1_{g'_l H}): ((\bullet, g_j), g'_l H) \rightarrow ((\bullet, g_{j+1}), g'_l H) \\ &\xrightarrow{\Theta P} \sum_{l=1}^m [(\bullet, g_1), g'_l H] \rightarrow \dots \rightarrow [(\bullet, g_n), g'_l H], \quad \text{con } [g_{j+1}^{-1} g_j, 1_{g'_l H}]: [(\bullet, g_j), g'_l H] \rightarrow [(\bullet, g_{j+1}), g'_l H] \\ &\xrightarrow{\Phi} \sum_{l=1}^m g_0^{-1} g'_l H \rightarrow \dots \rightarrow g_n^{-1} g'_l H, \quad \text{con } (g_{j+1}^{-1} g_j, 1_{g_{j+1}^{-1} g'_l H}): g_j^{-1} g'_l H \rightarrow g_{j+1}^{-1} g'_l H. \end{aligned}$$

Este último elemento es enviado a la suma de los triángulos etiquetados con esas  $n$ -cadenas. De forma similar, con los morfismos correspondientes tenemos que

$$\begin{aligned} &(\bullet, g_1) \rightarrow \dots \rightarrow (\bullet, g_n) \mapsto ((\bullet, g_1), \bullet) \rightarrow \dots \rightarrow ((\bullet, g_n), \bullet) \\ &\mapsto [((\bullet, g_1), \bullet) \rightarrow \dots \rightarrow ((\bullet, g_n), \bullet)] \\ &\mapsto [(\bullet, g_1), \bullet] \rightarrow \dots \rightarrow [(\bullet, g_n), \bullet] \\ &\mapsto \bullet \xrightarrow{g_1^{-1} g_0} \dots \longrightarrow \bullet \xrightarrow{g_{j+1}^{-1} g_j} \bullet \longrightarrow \dots \xrightarrow{g_n^{-1} g_{n-1}} \bullet \end{aligned}$$

Después tenemos el triángulo con etiqueta  $\bullet \xrightarrow{g_1^{-1}g_0} \dots \longrightarrow \bullet \xrightarrow{g_{j+1}^{-1}g_j} \bullet \longrightarrow \dots \xrightarrow{g_n^{-1}g_{n-1}} \bullet$ . Por último, aplicamos el morfismo  $tr$ . Como el transfer  $tr$  surge por el espacio cubriente  $|\pi|: |G \ltimes G/H| \rightarrow |\beta G|$ , el cual es inducido por  $\pi: G \ltimes G/H \rightarrow \beta G \cong G \ltimes \bullet$ , aplicándolo en las etiquetas, podemos afirmar que

la suma de los  $m$ -levantamientos de  $\bullet \xrightarrow{g_1^{-1}g_0} \dots \longrightarrow \bullet \xrightarrow{g_{j+1}^{-1}g_j} \bullet \longrightarrow \dots \xrightarrow{g_n^{-1}g_{n-1}} \bullet$  es, precisamente, donde fue enviado  $\sum_{i=1}^m g_0^{-1}g'_i H \rightarrow \dots \rightarrow g_n^{-1}g'_i H$ . Así que el diagrama conmuta y en el caso cuando la categoría es  $G/H$  los morfismos de transfer coinciden.

## Capítulo 4

# Transfer en cohomología de Hochschild

En este capítulo veremos las condiciones para poder asegurar que existe un morfismo de transfer y lo que pasa al tratar de construir un morfismo restricción en cohomología de Hochschild para categorías transportadoras. Debido a la falta de funtorialidad de la cohomología de Hochschild se necesita construir el morfismo restricción, pues no siempre existe. Las herramientas que utilizamos son otra vez los morfismos aumentación y el de Dwyer-Wilkerson.

### 4.1. La categoría de factorización

**Definición 4.1.1.** Si tenemos una categoría pequeña  $C$ , podemos construir la categoría de factorización  $F(C)$ , cuyos objetos son los morfismos en  $C$ , los cuales denotamos como  $[\alpha]$  para evitar confusión y saber que estamos viendo a un morfismo en  $C$  como un objeto de  $F(C)$ . Un morfismo  $[\alpha] \rightarrow [\beta]$  es un par  $(\gamma, \delta)$  de morfismos en  $C$  tal que  $\beta = \gamma\alpha\delta$ , es decir, que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} z & \xrightarrow{\beta} & w \\ \delta \downarrow & & \uparrow \gamma \\ x & \xrightarrow{\alpha} & y \end{array}$$

conmute. De esta forma la identidad de un objeto  $[\alpha]$  tendría que ser de la forma  $(1_y, 1_x)$  si  $\alpha$  va de  $x$  a  $y$ . La regla de composición la definimos de la manera obvia. Cuando tenemos los siguientes morfismos que se pueden componer en  $F(C)$

$$[\alpha] \xrightarrow{(\gamma, \delta)} [\beta] \xrightarrow{(\epsilon, \iota)} [\kappa],$$

con  $\alpha: x \rightarrow y$  y  $\beta: z \rightarrow w$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  quedarán determinados para hacer el diagrama

$$\begin{array}{ccc} z & \xrightarrow{\beta} & w \\ \delta \downarrow & & \uparrow \gamma \\ x & \xrightarrow{\alpha} & y \end{array}$$

conmutar. Similarmente para  $\epsilon$  y  $\iota$ , cuando  $\kappa: u \rightarrow v$  tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{\kappa} & v \\ \iota \downarrow & & \uparrow \epsilon \\ z & \xrightarrow{\beta} & w \end{array}$$

De esta manera para poder definir la composición  $(\epsilon, \iota) \circ (\gamma, \delta): [\alpha] \rightarrow [\kappa]$  pegamos los diagramas de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc}
 u & \xrightarrow{\kappa} & v \\
 \downarrow \iota & & \uparrow \epsilon \\
 z & \xrightarrow{\beta} & w \\
 \downarrow \delta & & \uparrow \gamma \\
 x & \xrightarrow{\alpha} & y
 \end{array}$$

y tomamos

$$(\epsilon, \iota) \circ (\gamma, \delta) = (\epsilon\gamma, \delta\iota),$$

pues tenemos que

$$\begin{aligned}
 (\epsilon\gamma)\alpha(\delta\iota) &= \epsilon(\gamma\alpha\delta)\iota \\
 &= \epsilon\beta\iota \\
 &= \kappa.
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 4.1.2.** Para un grupo  $G$  se tiene que  $F(\beta G)$  es un grupoide. Esto se debe a que cualquier morfismo  $(l_1, l_2): [g] \rightarrow [g']$  en  $F(\beta G)$  tiene como inverso el morfismo  $(l_1^{-1}, l_2^{-1}): [g'] \rightarrow [g]$ . Ya que  $g' = l_1 g l_2$  entonces  $g = l_1^{-1} g' l_2^{-1}$ , esto comprueba que  $(l_1^{-1}, l_2^{-1})$  sí es un morfismo de  $[g']$  a  $[g]$ . Además, tenemos que  $(l_1^{-1}, l_2^{-1}) \circ (l_1, l_2) = (e, e) = 1_{[g]}$  y  $(l_1, l_2) \circ (l_1^{-1}, l_2^{-1}) = 1_{[g']}$ .

Otra de las propiedades de la categoría de factorización  $F(\beta G)$  es que existe una equivalencia  $F(\beta G) \simeq \beta G$ . Para que podamos comprobar esto, primero notemos, que ya que  $F(\beta G)$  es un grupoide, el esqueleto de  $F(\beta G)$  consta de solo un objeto, para fines prácticos escogeremos como representante de las clases de isomorfismo al objeto  $[e]$ , donde  $e$  es el elemento neutro de  $G$ . Un morfismo de  $[e]$  a  $[e]$  en la categoría de factorización de  $\beta G$  es un par  $(l_1, l_2)$  de elementos de  $G$  que cumplen que  $e = l_1 e l_2$ , es decir,  $l_2 = l_1^{-1}$ . Existe un isomorfismo de categorías  $[F(\beta G)] \cong \beta G$ , enviando cualquier par  $(l_1, l_1^{-1})$  a  $l_1$ . Por último, la [Proposición 1.1.21](#) nos dice que  $F(\beta G) \simeq [F(\beta G)] \cong \beta G$ .

El siguiente resultado relaciona los  $kF(\beta G)$ -módulos con los  $kG$ -módulos.

**Proposición 4.1.3.** Si  $M$  es un  $kF(\beta G)$ -módulo, entonces  $M([e])$  es un  $kG$ -módulo. Además, existe una equivalencia  $kF(\beta G)\text{-mód} \simeq kG\text{-mód}$ .

**Demostración.**  $M$  como un funtor de  $\beta G$  a  $k$ -mód es

$$\begin{array}{ccc}
 M: \beta G & \longrightarrow & k\text{-mód} \\
 \bullet & \longmapsto & M([e]) \\
 \bullet & & M([e]) \\
 \downarrow g & \longmapsto & \downarrow M(g, g^{-1}) \\
 \bullet & & M([e])
 \end{array}$$

Ya que  $F(\beta G) \simeq \beta G$ , se tiene que  $kF(\beta G)\text{-mód} \simeq kG\text{-mód}$  a través de la restricciones de los funtores que hacen la equivalencia  $F(\beta G) \simeq \beta G$ .  $\square$

**Nota 4.1.4.** Si tomamos el funtor  $\text{Res}_{\nabla} kG$ , entonces por la proposición anterior,  $\text{Res}_{\nabla} kG([e])$  es un  $kG$ -módulo y lo denotaremos por  $kG^{ad}$ , que es  $kG$  con la acción por conjugación.

Esta construcción a partir de categorías tiene sus ventajas, ya que se obtienen funtores entre categorías de factorización inducidos por funtores entre las categorías originales. Cuando tenemos  $\tau: C \rightarrow D$  un functor covariante existe un functor covariante  $F(\tau)$  de la categoría de factorización  $F(C)$  a  $F(D)$ . Recordemos que los objetos de  $F(C)$  son morfismos denotados por  $[\alpha: x \rightarrow y]$ . Entonces  $F(\tau)([\alpha]) = [\tau(\alpha)]$ . Para un morfismo  $(\gamma, \delta): [\alpha] \rightarrow [\beta]$  con  $\beta: z \rightarrow w$ ,  $F(\tau)(\gamma, \delta) = (\tau(\gamma), \tau(\delta))$ . El functor  $F(\tau)$  está bien definido, cuando tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} z & \xrightarrow{\beta} & w \\ \delta \downarrow & & \uparrow \gamma \\ x & \xrightarrow{\alpha} & y \end{array}$$

al aplicarle  $\tau$  también nos da un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \tau(z) & \xrightarrow{\tau(\beta)} & \tau(w) \\ \tau(\delta) \downarrow & & \uparrow \tau(\gamma) \\ \tau(x) & \xrightarrow{\tau(\alpha)} & \tau(y) \end{array}$$

Entonces al aplicar  $F(\tau)$  a la identidad de  $[\alpha]$  representado como  $(1_y, 1_x)$  nos queda  $(\tau(1_y), \tau(1_x)) = (1_{\tau(y)}, 1_{\tau(x)})$  el cual es la identidad del objeto  $[\tau(\alpha)]$ . Además si

$$\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{\kappa} & v \\ \iota \downarrow & & \uparrow \epsilon \\ z & \xrightarrow{\beta} & w \\ \delta \downarrow & & \uparrow \gamma \\ x & \xrightarrow{\alpha} & y \end{array}$$

representa la composición de dos morfismos, también lo hará

$$\begin{array}{ccc} \tau(u) & \xrightarrow{\tau(\kappa)} & \tau(v) \\ \tau(\iota) \downarrow & & \uparrow \tau(\epsilon) \\ \tau(z) & \xrightarrow{\tau(\beta)} & \tau(w) \\ \tau(\delta) \downarrow & & \uparrow \tau(\gamma) \\ \tau(x) & \xrightarrow{\tau(\alpha)} & \tau(y) \end{array}$$

Por último si  $C$  es una  $G$ -categoría,  $G$  actúa también sobre  $F(C)$ . Sea  $g \in G$ , y  $[\alpha]$  es un objeto de  $F(C)$ , entonces  $g \cdot [\alpha] = [g\alpha]$ . Para un morfismo  $(\gamma, \delta): [\alpha] \rightarrow [\beta]$  tenemos  $g(\gamma, \delta) = (g\gamma, g\delta)$  pues si  $\beta = \gamma\alpha\delta$ , entonces  $g\beta = g\gamma g\alpha g\delta$  y por tanto  $(g\gamma, g\delta)$  va de  $[g\alpha]$  a  $[g\beta]$ .

### La sobrecategoría $F(\pi)/[g]$

En esta parte se hablará de la sobrecategoría  $F(\pi)/[g]$  ya que es muy importante para la construcción del transfer para la cohomología de Hochschild.

Recordemos que  $F(\pi)$  es un functor de  $F(G \times C)$  a  $F(\beta G)$ . Por definición de sobrecategoría, los objetos de  $F(\pi)/[g]$  serían pares  $([h, \alpha], (h_1, h_2))$ , donde el primero sería un objeto de  $F(G \times C)$ , y el segundo es un morfismo en  $F(\beta G)$  de  $F(\pi)([h, \alpha]) = [h]$  a  $[g]$ , donde

$$g = h_1 h h_2.$$

Por otro lado, un morfismo

$$([(h, \alpha)], (h_1, h_2)) \rightarrow([(h', \alpha')], (h'_1, h'_2))$$

es un morfismo

$$[(h, \alpha)] \rightarrow [(h', \alpha')]$$

en  $F(G \times C)$ , así que es un par de morfismos en  $G \times C$ ,  $((v_1, f), (v_2, f'))$ , tal que

$$(h', \alpha') = (v_1, f)(h, \alpha)(v_2, f')$$

y hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} [h] & & [g] \\ \downarrow (v_1, v_2) & \searrow (h_1, h_2) & \\ & & [g] \\ & \nearrow (h'_1, h'_2) & \\ [h'] & & \end{array}$$

en  $F(G)$ . Para poder construir el transfer en cohomología de Hochschild necesitamos relacionar la categoría de factorizaciones de  $C$  con la categoría  $C \times C^{op} = C^e$ , para ello tenemos los siguientes funtores:

$$\nabla: F(C) \longrightarrow C^e$$

$$[\alpha: x \rightarrow y] \longmapsto (y, x)$$

$$\begin{array}{ccc} [\alpha: x \rightarrow y] & & (y, x) \\ (\gamma, \delta) \downarrow \longmapsto & & \downarrow (\gamma, \delta^{op}) \\ [\beta: w \rightarrow z] & & (z, w) \end{array}$$

El funtor  $\pi^e$  hace referencia al inducido por  $\pi$  en las categorías  $C^e$ , es decir, como  $\pi: G \times C \rightarrow G$ , entonces  $\pi^e: (G \times C)^e \rightarrow G^e$ . Por último, consideraremos el siguiente funtor:

$$t: F(C) \longrightarrow C$$

$$[\alpha: x \rightarrow y] \longmapsto y$$

$$\begin{array}{ccc} [\alpha: x \rightarrow y] & & y \\ (\gamma, \delta) \downarrow \longmapsto & & \downarrow \gamma \\ [\beta: w \rightarrow z] & & z \end{array}$$

Con estos funtores podemos relacionar diferentes categorías. Esto nos da el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & & (G \times C)^e & \xrightarrow{\pi^e} & G^e \\ & & \uparrow \nabla & & \uparrow \nabla \\ F(C) & \xrightarrow{F(t)} & F(G \times C) & \xrightarrow{F(\pi)} & F(G) \\ \downarrow t & & \downarrow t & & \downarrow t \\ C & \xrightarrow{t} & G \times C & \xrightarrow{\pi} & G \end{array}$$

Veamos que el cuadrado superior derecho conmuta:

Sea  $[(g, \alpha): x \rightarrow y] \in \text{Obj}(F(G \times C))$ , entonces

$$\begin{aligned} \nabla F(\pi)([(g, \alpha)]) &= \nabla([g]) \\ &= (\bullet, \bullet) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \pi^e \nabla([(g, \alpha)]) &= \pi^e(y, x) \\ &= (\bullet, \bullet). \end{aligned}$$

Para verlo en morfismos, tomamos  $((h', \gamma), (h'', \delta)): [\alpha: x \rightarrow y] \rightarrow [\beta: w \rightarrow z]$ ,

$$\begin{aligned} \nabla F(\pi)((h', \gamma), (h'', \delta)) &= \nabla(h', h'') \\ &= (h', h'') \end{aligned}$$

y también,

$$\begin{aligned} \pi^e \nabla(((h', \gamma), (h'', \delta))) &= \pi^e((h', \gamma), (h'', \delta)^{op}) \\ &= (h', h'') \end{aligned}$$

Ahora veremos el cuadrado inferior derecho:  $tF(\pi)(g, \alpha) = t([g]) = \bullet$  y  $\pi t(g, \alpha) = \pi(x) = \bullet$ . Para morfismos se cumple  $tF(\pi)((h', \gamma), (h'', \delta)) = t(h', h'') = h'$  y  $\pi t((h', \gamma), (h'', \delta)) = \pi(h', \gamma) = h'$ .

Por último, sean  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  morfismos en  $C$  tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} z & \xrightarrow{\beta} & w \\ \delta \downarrow & & \uparrow \gamma \\ x & \xrightarrow{\alpha} & y \end{array}$$

es conmutativo. Entonces  $tF(\iota)([\alpha]) = t[(e, \alpha)] = y$  y  $\iota t([\alpha]) = \iota(y) = y$ . Para un morfismo  $(\gamma, \delta): [\alpha] \rightarrow [\beta]$  se cumple  $tF(\iota)(\gamma, \delta) = ((e, \gamma), (e, \delta)) = (e, \gamma)$  y también  $\iota t(\gamma, \delta) = \iota(\gamma) = (e, \gamma)$ .

La categoría de factorización es muy importante en esta sección porque la cohomología de Hochschild se puede dar en términos de  $\text{Ext}_{kC^e}^*(kC, kC)$  y en términos de  $\text{Ext}_{kF(C)}^*(k, \text{Res}_{\nabla} kC)$ . Esto es debido a propiedades de las extensiones de Kan y al isomorfismo que veremos a continuación. En este caso  $kC$  representa un funtor de  $C^e$  a  $k\text{-mod}$ . Este funtor está definido mediante  $kC(x, y) = k\text{Hom}_C(y, x)$  donde  $(x, y)$  es un objeto de  $C^e$ . Cuando tenemos un morfismo  $(\alpha, \beta): (x, y) \rightarrow (w, z)$  en  $C^e$  con  $\beta: z \rightarrow y$ , entonces  $kC(\alpha, \beta)$  es el  $k$ -homomorfismo que definido en un morfismo  $f: y \rightarrow x$  lo envía a  $\alpha f \beta$ . Es fácil ver que  $kC$  sí es un  $kC^e$ -módulo.

**Lema 4.1.5.**  $\text{LK}_{\nabla} \underline{k} \cong kC$  como  $kC^e$ -módulos.

**Demostración.** Primero veamos que  $\text{LK}_{\nabla} \underline{k}(x, y) \cong kC(x, y)$ . Para un objeto  $(x, y) \in C^e$ , tenemos que

$$\text{LK}_{\nabla} \underline{k}(x, y) = \varinjlim_{\nabla/(x, y)} \text{Res}_{\beta(x, y)} \underline{k}.$$

Un objeto de  $\nabla/(x, y)$  es de la forma  $([\alpha], (\beta, \gamma))$ , tal que si  $\alpha$  va de  $w$  a  $z$ , entonces los morfismos  $\beta$  y  $\gamma$  deben ser  $\beta: z \rightarrow x$  y  $\gamma: y \rightarrow w$ . Por otro lado,  $kC(x, y) = k\text{Hom}_C(y, x)$ . Definimos  $\iota_{([\alpha], (\beta, \gamma))}: k\{\alpha\} \rightarrow k\text{Hom}_C(y, x)$  en la base, enviando  $\alpha$  a  $\beta \alpha \gamma$ . Si tenemos un morfismo  $([\alpha], (\beta, \gamma)) \xrightarrow{(\epsilon, \delta)} ([\alpha'], (\beta', \gamma'))$ . Entonces el homomorfismo  $k\{\alpha\} \rightarrow k\{\alpha'\}$  se define como  $\alpha \mapsto \alpha'$  y  $\iota_{([\alpha'], (\beta', \gamma'))}(\alpha') = \beta' \alpha' \gamma'$ . Como  $\alpha' = \epsilon \alpha \delta$ , entonces  $\beta' \alpha' \gamma' = \beta' \epsilon \alpha \delta \gamma'$  y por la definición de morfismo en  $\nabla/(x, y)$  esto último es igual a  $\beta \alpha \gamma$ , pues

$(\beta', \gamma')(\epsilon, \delta) = (\beta, \gamma)$ . Si tenemos otro  $k$ -módulo  $M$  junto con homomorfismos  $\iota'_{([\alpha], (\beta, \gamma))} : k\{\alpha\} \rightarrow M$  que hacen conmutar los diagramas correspondientes, podemos definir un homomorfismo  $\theta : k\text{Hom}_C(y, x) \rightarrow M$  como  $\theta(f : y \rightarrow x) = \iota'_{([f], (1_x, 1_y))}(f)$ . Este homomorfismo es único y hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \underline{k}\beta_{(x,y)}([\alpha], (\beta, \gamma)) & & \\ & \searrow^{\iota'_{([\alpha], (\beta, \gamma))}} & \\ & \searrow_{\iota_{([\alpha], (\beta, \gamma))}} & \\ & & k\text{Hom}_C(y, x) \xrightarrow{\theta} M \end{array}$$

Esto se debe a que podemos ver  $\iota_{([\alpha], (\beta, \gamma))} = \underline{k}(\beta, \gamma)$  y

$$\theta(\beta\alpha\gamma)\iota_{([\alpha], (\beta, \gamma))} = \iota_{([\beta\alpha\gamma], (1_x, 1_y))}\underline{k}(\beta, \gamma) = \iota'_{([\alpha], (\beta, \gamma))}.$$

Estos isomorfismos definen una transformación natural. Para verificar la afirmación anterior debemos demostrar que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} kC(x, y) & \xrightarrow{\theta} & \text{LK}_{\nabla}\underline{k}(x, y) \\ kC(\epsilon, \delta) \downarrow & & \downarrow \text{LK}_{\nabla}\underline{k}(\epsilon, \delta) \\ kC(x', y') & \xrightarrow{\theta} & \text{LK}_{\nabla}\underline{k}(x', y') \end{array}$$

donde  $(\epsilon, \delta) : (x, y) \rightarrow (x', y')$  es un morfismo en  $C^e$  y  $\theta$  son los isomorfismos  $kC(x, y) \cong \text{LK}_{\nabla}\underline{k}(x, y)$ .

Por un lado tenemos que si  $f : y \rightarrow x$  es un morfismo en  $C$ , es decir,  $f \in kC(x, y)$ , entonces  $kC(\epsilon, \delta)(f) = \epsilon f \delta \in kC(x', y')$ . Además,  $\theta(\epsilon f \delta) = r_{([\epsilon f \delta], (1_{x'}, 1_{y'}))}(\epsilon f \delta)$ , siendo  $r$  los morfismos estructurales del límite  $\text{LK}_{\nabla}\underline{k}(x', y')$ . Por otra parte,  $\theta(f) = s_{([f], (1_x, 1_y))}(f)$ , donde  $s$  representa los morfismos estructurales del límite  $\text{LK}_{\nabla}\underline{k}(x, y)$ . Por definición de  $\text{LK}_{\nabla}\underline{k}(\epsilon, \delta)$ , el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Res}_{(\epsilon, \delta)_*} \text{Res}_{\beta_{(x,y)}} \underline{k}([f], (1_x, 1_y)) = \underline{k}([f]) & & \\ s_{([f], (1_x, 1_y))} \downarrow & \searrow^{r_{([\epsilon f \delta], (1_{x'}, 1_{y'}))}} & \\ \text{LK}_{\nabla}\underline{k}(x, y) & \xrightarrow{\text{LK}_{\nabla}\underline{k}(\epsilon, \delta)} & \text{LK}_{\nabla}\underline{k}(x', y') \end{array}$$

es conmutativo. Como las  $r$  son morfismos estructurales de  $\text{LK}_{\nabla}\underline{k}(x', y')$  y  $(\epsilon, \delta)$  es un morfismo de  $([f], (1_x, 1_y))$  a  $([\epsilon f \delta], (1_{x'}, 1_{y'}))$  se sigue que  $r_{([\epsilon f \delta], (1_{x'}, 1_{y'}))}\underline{k}\beta_{(\epsilon, \delta)} = r_{([f], (\epsilon, \delta))}$ , por lo tanto,

$$r_{([\epsilon f \delta], (1_{x'}, 1_{y'}))}\underline{k}\beta_{(x', y')}([f], (\epsilon, \delta)) = r_{([\epsilon f \delta], (1_{x'}, 1_{y'}))}(\epsilon f \delta)$$

y de esta forma  $\text{LK}_{\nabla}\underline{k}(\epsilon, \delta)\theta = \theta kC(\epsilon, \delta)$ . Así que  $\text{LK}_{\nabla}\underline{k}$  y  $kC$  son  $kC^e$ -módulos isomorfos.  $\square$

**Corolario 4.1.6.**  $\text{Ext}_{kC^e}^*(kC, kC) \cong \text{Ext}_{kF(C)}^*(k, \text{Res}_{\nabla}kC)$ .

**Demostración.** Sea  $P_*$  una resolución proyectiva del  $kF(C)$ -módulo trivial  $\underline{k}$ , ya que  $\text{LK}_{\nabla}$  preserva proyectivos,  $\text{LK}_{\nabla}P_*$  es una resolución proyectiva de  $\text{LK}_{\nabla}\underline{k}$  ([16, 7]). Por el lema anterior  $\text{LK}_{\nabla}\underline{k} \cong kC$ . Esto significa que  $\text{LK}_{\nabla}P_*$  es una resolución proyectiva de  $kC$  y por adjunción  $\text{Hom}_{kC^e}(\text{LK}_{\nabla}P_*, kC) \cong \text{Hom}_{kF(C)}(P_*, \text{Res}_{\nabla}kC)$ . Al tomar homología, llegamos al resultado.  $\square$

## 4.2. Construcción del transfer

**Lema 4.2.1.** *Sea  $kG \in kG^e\text{-mod}$  y  $k(G \times C) \in k(G \times C)^e\text{-mod}$ . Entonces existen homomorfismos de  $kF(G \times C)$ -módulos*

$$\text{Res}_{F(\pi)} \text{Res}_{\nabla}kG \rightarrow \text{Res}_{\nabla}k(G \times C) \rightarrow \text{Res}_{F(\pi)} \text{Res}_{\nabla}kG$$

**Demostración.** Sea  $(x, y) \in \text{Obj}(G \times C)^e$ . Tenemos que como funtor

$$\begin{aligned} k(G \times C)(x, y) &= k\text{Hom}_{G \times C}(y, x) \\ &= k\{(h, \alpha) | h \in G, \alpha: hy \rightarrow x\} \\ &\rightarrow kG = \text{Res}_{\pi^e} kG(x, y) \end{aligned}$$

Esta última flecha esta determinada por  $(h, \alpha) \mapsto h$ . Para que esto determine un homomorfismo de  $k(G \times C)^e$ -módulos debe inducir una transformación natural entre los funtores  $k(G \times C)$  y  $kG$ . Entonces debemos ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} k(G \times C)(x, y) & \longrightarrow & kG(x, y) \\ \downarrow k(G \times C)((h', \gamma), (h'', \delta)) & & \downarrow kG((h', \gamma), (h'', \delta)) \\ k(G \times C)(w, z) & \longrightarrow & kG(w, z) \end{array}$$

Pero  $k(G \times C)((h', \gamma), (h'', \delta))(g, \alpha) = (h', \gamma)(g, \alpha)(h'', \delta)$  en los elementos de la base de los correspondientes  $k$ -módulos, similarmente,  $kG((h', \gamma), (h'', \delta))(g) = h'gh''$ . Por lo tanto, proyectar cualquier  $(h, t)$  a la primera coordenada, hace conmutar el diagrama anterior.

Componiendo con el funtor  $\text{Res}_{\nabla}$  tenemos que existe una transformación natural

$$\text{Res}_{\nabla} k(G \times C) \rightarrow \text{Res}_{\nabla} \text{Res}_{\pi^e} kG,$$

pero  $\text{Res}_{\nabla} \text{Res}_{\pi^e} = \text{Res}_{F(\pi)} \text{Res}_{\nabla}$  y de allí podemos concluir que existe un homomorfismo de  $kF(G \times C)$ -módulos

$$\text{Res}_{\nabla} k(G \times C) \rightarrow \text{Res}_{F(\pi)} \text{Res}_{\nabla} kG.$$

El morfismo  $\text{Res}_{F(\pi)} \text{Res}_{\nabla} kG \rightarrow \text{Res}_{\nabla} k(G \times C)$  se define de la siguiente manera: Primero notemos que para un objeto  $[h, hx \rightarrow y]$  de  $F(G \times C)$ ,  $\text{Res}_{F(\pi)} \text{Res}_{\nabla} kG([h, hx \rightarrow y]) = kG \nabla F(\pi)([h, hx \rightarrow y]) = kG$  y  $\text{Res}_{\nabla} k(G \times C)([h, hx \rightarrow y]) = k\text{Hom}_{G \times C}(x, y)$ , así el homomorfismo de  $k$ -módulos  $g \xrightarrow{\tau} (h, hx \rightarrow y)$  define una transformación natural. Para morfismos  $(\beta, \gamma): [h, hx \rightarrow y] \rightarrow [r, rw \rightarrow z]$ , y cualquier  $g \in G$ , se cumple que

$$\tau \text{Res}_{F(\pi)} \text{Res}_{\nabla} kG(\beta, \gamma)(g) = (r, rw \rightarrow z)$$

y también

$$\text{Res}_{\nabla} k(G \times C)(\beta, \gamma) \tau(g) = \text{Res}_{\nabla} k(G \times C)(\beta, \gamma)([h, hx \rightarrow y]) = (r, rw \rightarrow z).$$

esto quiere decir que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Res}_{F(\pi)} \text{Res}_{\nabla} kG([h, hx \rightarrow y]) & \xrightarrow{\tau} & \text{Res}_{\nabla} k(G \times C)([h, hx \rightarrow y]) \\ \downarrow \text{Res}_{F(\pi)} \text{Res}_{\nabla} kG(\beta, \gamma) & & \downarrow \text{Res}_{\nabla} k(G \times C)(\beta, \gamma) \\ \text{Res}_{F(\pi)} \text{Res}_{\nabla} kG([r, rw \rightarrow z]) & \xrightarrow{\tau} & \text{Res}_{\nabla} k(G \times C)([r, rw \rightarrow z]) \end{array}$$

lo que comprueba que el homomorfismo  $\tau$  es un morfismo de  $kF(G \times C)$ -módulos.  $\square$

El resultado anterior nos sirve para poder conectar módulos que se utilizan en la construcción del transfer. Similarmente al caso del capítulo anterior, debemos descomponer categorías en producto de otras para poder ver de forma distinta los complejos con los que estamos trabajando.

**Lema 4.2.2.** *Consideremos el funtor  $F(\pi): F(G \times C) \rightarrow F(G)$ . Para cualquier  $[g] \in F(G)$ , existe un isomorfismo  $F(\pi)/[g] \cong F(C) \times 1_{F(G)}/[g]$ . Además,*

$$\mathbb{C}_*(F(\pi)/[e]) \simeq \mathbb{C}_*(F(C)) \otimes B_*^G$$

como complejos de  $kG$ -módulos.

**Demostración.** De la definición de la categoría  $F(\pi)/[g]$ , si tenemos un objeto  $([h, \alpha: hx \rightarrow y], (h_1, h_2))$  podemos obtener un morfismo  $g^{-1}h_1\alpha: h_2^{-1}x \rightarrow g^{-1}h_1y$ , pues  $g = h_1hh_2$ .

Ahora definamos el siguiente funtor

$$\begin{array}{ccc} \phi: F(\pi)/[g] & \longrightarrow & F(C) \times 1_{F(G)}/[g] \\ ([h, \alpha: hx \rightarrow y], (h_1, h_2)) & \longmapsto & ([g^{-1}h_1\alpha: h_2^{-1}x \rightarrow g^{-1}h_1y], ([h], (h_1, h_2))) \\ ([h, \alpha: hx \rightarrow y], (h_1, h_2)) & & ([g^{-1}h_1\alpha: h_2^{-1}x \rightarrow g^{-1}h_1y], ([h], (h_1, h_2))) \\ \downarrow & \longmapsto & \downarrow \\ ((v_1, f: v_1y \rightarrow y'), (v_2, \gamma: v_2x' \rightarrow x)) & & ((g^{-1}h'_1f, h_2^{-1}\gamma), (v_1, v_2)) \\ ([h', \alpha': h'x' \rightarrow y'], (h'_1, h'_2)) & & ([g^{-1}h'_1\alpha': (h'_2)^{-1}x' \rightarrow g^{-1}h'_1y'], ([h'], (h'_1, h'_2))) \end{array}$$

Este funtor está bien definido: Ya que  $(h', \alpha') = (v_1, f)(h, \alpha)(v_2, \gamma)$ , se sigue que  $h' = v_1hv_2$ , de aquí,  $h = v_1^{-1}h'v_2^{-1}$  y  $\alpha' = fv_1(\alpha v_1h\gamma) = (f)(v_1\alpha)(v_1h\gamma)$ . Por lo tanto

$$g^{-1}h'_1\alpha' = (g^{-1}h'_1f)(g^{-1}h'_1v_1\alpha)(g^{-1}h'_1v_1h\gamma),$$

pero

$$g^{-1}h'_1v_1 = g^{-1}h'_1h_1^{-1}h_1 = g^{-1}h_1,$$

y

$$g^{-1}h'_1v_1h = g^{-1}h_1h = h_2^{-1}h^{-1}h_1^{-1}h_1h = h_2^{-1}.$$

Entonces tenemos que  $g^{-1}h'_1\alpha' = (g^{-1}h'_1f)(g^{-1}h_1\alpha)(h_2^{-1}\gamma)$  y por tanto  $(g^{-1}h'_1f, h_2^{-1}\gamma)$  es un morfismo en  $F(C)$ . La inversa está definida como:

$$\begin{array}{ccc} \psi: F(C) \times 1_{F(G)}/[g] & \longrightarrow & F(\pi)/[g] \\ ([\alpha: x \rightarrow y], ([h], (h_1, h_2))) & \longmapsto & ([h, h^{-1}g\alpha: hh_2x \rightarrow h_1gy], (h_1, h_2)) \\ ([\alpha: x \rightarrow y], ([h], (h_1, h_2))) & & ([h, h^{-1}g\alpha: hh_2x \rightarrow h_1gy], (h_1, h_2)) \\ \downarrow & \longmapsto & \downarrow \\ ((\gamma, \delta), (v_1, v_2)) & & ((v_1, h_1^{-1}g\gamma: v_1hh_2y \rightarrow h_1^{-1}gy'), (v_2, h_2\delta: v_2h_2x' \rightarrow h_2x)) \\ ([\alpha': x' \rightarrow y'], ([h'], (h'_1, h'_2))) & & ([h', (h')^{-1}g\alpha': h'h_2'x \rightarrow h'_1gy'], (h'_1, h'_2)) \end{array}$$

Para que esto tenga sentido los morfismos deben estar definidos de la siguiente manera:  $\gamma: y \rightarrow y', \delta: x' \rightarrow x, (v_1, v_2): [h] \rightarrow [h']$  por lo que cumple que  $(h_1, h_2) = (h'_1, h'_2)(v_1, v_2)$  y  $h' = v_1hv_2$ . Como  $\alpha' = \gamma\alpha\delta$ , entonces  $h_1^{-1}g\alpha' = (h_1^{-1}g\gamma)(h_1^{-1}g\alpha)(h_1^{-1}g\delta)$ . Pero  $v_1h_1^{-1}g = h_1'^{-1}h_1h_1^{-1}g = h_1'^{-1}g$  y  $v_1hh_2 = h_1'^{-1}h_1hh_2 = h_1'^{-1}g$ .

Por otro lado,

$$(v_1, h_1'^{-1}g\gamma)(h, h_1^{-1}g\alpha)(v_2, h_2\delta) = (v_1hv_2, (h_1'^{-1}\gamma)(v_1h_1^{-1}g\alpha)(v_1hh_2\delta))$$

Con las identidades demostradas anteriormente tenemos que

$$(h', h_1'^{-1}g\alpha') = (v_1, h_1'^{-1}g\gamma)(h, h_1^{-1}g\alpha)(v_2, h_2\delta)$$

y con esto vemos que el funtor envía morfismos a morfismos. Por último verifiquemos que una es la inversa de la otra. En objetos:

$$\begin{aligned} \phi\psi([\alpha], ([h], (h_1, h_2))) &= \phi([h, h^{-1}g\alpha], (h_1, h_2)) \\ &= ([g^{-1}h_1h^{-1}g\alpha], ([h], (h_1, h_2))) \\ &= ([\alpha], ([h], (h_1, h_2))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi\phi([h, \alpha], (h_1, h_2)) &= \psi([g^{-1}h_1\alpha], ([h], (h_1, h_2))) \\
&= ([h, h^{-1}gg^{-1}h\alpha], (h_1, h_2)) \\
&= ([h, \alpha], (h_1, h_2))
\end{aligned}$$

En morfismos

$$\begin{aligned}
\phi\psi(((\gamma, \delta), (v_1, v_2))) &= \phi((v_1, h_1^{-1}g\gamma), (v_2, h_2\delta)) \\
&= ((g^{-1}h_1h_1^{-1}g\gamma, h_2^{-1}h_2\delta), (v_1, v_2)) \\
&= ((\gamma, \delta), (v_1, v_2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi\phi((v_1, f), (v_2, \gamma)) &= \psi((g^{-1}h_1'f, h_2^{-1}\gamma), (v_1, v_2)) \\
&= ((v_1, h_1'^{-1}gf), (v_2, h_2h_2^{-1}\gamma)) \\
&= ((v_1, f), (v_2, \gamma)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos el isomorfismo  $F(\pi)/[g] \cong F(C) \times 1_{F(G)}/[g]$ , para cada  $[g]$ .

El isomorfismo recién demostrado nos da una forma de obtener una copia de  $F(C)$  para cada  $[g] \in \text{Obj}(F(G))$ , así que podemos denotar esta copia como  $F(C)_{[g]}$ . Como vimos en el [Ejemplo 4.1.2](#), la categoría de factorización  $F(\beta G)$  es un grupoide. Por [la Proposición 1.5.2](#) existen isomorfismos  $F(\pi)/[g] \cong F(\pi)/[g']$  por cada morfismo  $(l_1, l_2): [g] \rightarrow [g']$  en  $F(\beta G)$ . Utilizando este isomorfismo junto con los funtores  $\phi$  y  $\psi$ , los cuales también son isomorfismos de categorías, podemos conseguir un isomorfismo  $\varphi: F(C)_{[g]} \cong F(C)_{[g']}$  que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
F(\pi)/[g] & \xrightarrow{\phi} & F(C)_{[g]} \times 1_{F(G)}/[g] \\
(l_1, l_2)_* \downarrow & & \downarrow (\varphi, (l_1, l_2)_*) \\
F(\pi)/[g'] & \xrightarrow{\phi} & F(C)_{[g']} \times 1_{F(G)}/[g']
\end{array}$$

Esto induce un isomorfismo  $\mathbb{C}_*(F(\pi)/\_) \cong \mathbb{C}_*(F(C)_{\square} \times 1_{F(G)}/\_)$  de  $kF(\beta G)$ -módulos y con [la Proposición 4.1](#) conseguimos que

$$\mathbb{C}_*(F(C) \times 1_{F(G)}/[e]) \simeq \mathbb{C}_*(F(C)) \otimes \mathbb{C}_*(1_{F(G)}/[e])$$

como  $kG$ -módulos. Sin embargo,  $\mathbb{C}_*(1_{F(G)}/[e])$  ahora es proyectivo como  $kG$ -módulo y es exacto por definición, así que  $\mathbb{C}_*(1_{F(G)}/[e])$  es una resolución proyectiva por  $kG$ -módulos para  $k$ . Esto hace que tengamos una equivalencia  $\mathbb{C}_*(1_{F(G)}/[e]) \simeq B_*^G$ .  $\square$

**Teorema 4.2.3.** *Existe un morfismo transfer:*

$$\text{Ext}_{k(G \rtimes C)^e}^*(k(G \rtimes C), k(G \rtimes C)) \xrightarrow{htr_C} \text{Ext}_{kG^e}^*(kG, kG).$$

**Demostración.** El transfer se cosntruye de la siguiente manera:

Por el [Lema 4.2.1](#) existe un morfismo de cadenas

$$\text{Hom}_{kF(G \rtimes C)}(B_*^{F(G \rtimes C)}, \text{Res}_{\nabla} k(G \rtimes C)) \rightarrow \text{Hom}_{kF(G \rtimes C)}(B_*^{F(G \rtimes C)}, \text{Res}_{F(\pi)} \text{Res}_{\nabla} kG)$$

inducido por  $\text{Res}_{\nabla} k(G \rtimes C) \rightarrow \text{Res}_{F(\pi)} \text{Res}_{\nabla} kG$ . Utilizando adjunciones y el [Lema 4.2.2](#) obtenemos los siguientes isomorfismos:

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_{kF(G \rtimes C)}(B_*^{F(G \rtimes C)}, \text{Res}_{F(\pi)} \text{Res}_{\nabla} kG) &\cong \text{Hom}_{kF(\beta G)}(\text{LK}_{F(\pi)} B_*^{F(G \rtimes C)}, \text{Res}_{\nabla} kG) \\
&\cong \text{Hom}_{kF(\beta G)}(\mathbb{C}_*(F(\pi)/\_), \text{Res}_{\nabla} kG) \\
&\cong \text{Hom}_{kG}(\mathbb{C}_*(F(\pi)/[e]), kG^{ad}) \\
&\simeq \text{Hom}_{kG}(\mathbb{C}_*(F(C)) \otimes B_*^{F(\beta G)}([e]), kG^{ad}) \\
&\rightarrow \text{Hom}_{kG}(B_*^{F(\beta G)}([e]), kG^{ad})
\end{aligned}$$

El tercer isomorfismo se debe a que  $F(\beta G) \simeq \beta G$  y por tanto  $kF(\beta G)$ -mód  $\simeq kG$ -mód. El functor  $\text{Res}_i$  donde  $i: [F(\beta G)] \rightarrow F(\beta G)$  es la inclusión del esqueleto de la categoría, induce la equivalencia. Entonces una transformación natural  $\eta: \mathbb{C}_*(F(\pi)/\_) \rightarrow \text{Res}_\nabla kG$  es enviado a  $\text{Res}_i(\eta): \mathbb{C}_*(F(\pi)/[e]) \rightarrow kG$  donde  $\text{Res}_i(\eta)$  es la transformación natural que asigna al único objeto  $\bullet$  de  $\beta G$  el morfismo  $\eta_{[e]}: \mathbb{C}_*(F(\pi)/[e]) \rightarrow kG^{ad}$ . El último morfismo es construido a partir del morfismo de Dwyer-Wilkerson  $k \rightarrow \mathbb{C}_*(F(C))$ . Ya que  $t: F(C) \rightarrow C$  induce una equivalencia homotópica entre espacios  $BF(C) \simeq BC$  ([16]), también existe una equivalencia homotópica  $\mathbb{C}_*(F(C)) \simeq \mathbb{C}_*(C)$ .

Por lo tanto tenemos un morfismo de cadenas

$$\text{Hom}_{kF(G \rtimes C)}(B_*^{F(G \rtimes C)}, \text{Res}_\nabla k(G \rtimes C)) \rightarrow \text{Hom}_{kG}(B_*^{F(G)}([e]), kG^{ad})$$

El complejo  $\text{Hom}_{kG}(B_*^{F(G)}([e]), kG^{ad})$  calcula la cohomología de Hochschild pues, al igual que en el tercer isomorfismo, estamos utilizando el functor  $\text{Res}_i$ . Entonces hay un isomorfismo  $\text{Hom}_{F(\beta G)}(B_*^{F(\beta G)}, \text{Res}_\nabla kG) \cong \text{Hom}_{kG}(B_*^{F(\beta G)}([e]), \text{Res}_\nabla kG([e]))$  que define un isomorfismo de complejos de cadena.

Cuando calculamos la cohomología de estos complejos obtenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{kF(G \rtimes C)}^*(k, \text{Res}_\nabla k(G \rtimes C)) & \xrightarrow{htr_C} & \text{Ext}_{kG}^*(k, kG^{ad}) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \text{Ext}_{k(G \rtimes C)^e}^*(k(G \rtimes C), k(G \rtimes C)) & \xrightarrow{htr_C} & \text{Ext}_{kG^e}^*(kG, kG) \end{array}$$

que nos da el morfismo al cual llamaremos transfer.  $\square$

Como podemos ver, el morfismo  $htr_C$  es una generalización del *transfer* del capítulo anterior, y es esa la razón por la cual lo llamamos transfer. Además, la cohomología de Hochschild  $H^*(kC, kC)$  no es functorial, eso nos dice que en principio no hay un morfismo restricción. Si queremos obtener un morfismo restricción en cohomología de Hochschild aprovechando las herramientas que hemos utilizado en la construcción del morfismo  $htr_C$  debemos proceder de la siguiente manera:

Por medio del morfismo de aumentación  $\epsilon: \mathbb{C}_*(F(C)) \rightarrow k$  tenemos el morfismo

$$\text{Hom}_{kG}(B_*^{F(G)}([e]), kG^{ad}) \rightarrow \text{Hom}_{kG}(\mathbb{C}_*(F(C)) \otimes B_*^{F(G)}([e]), kG^{ad})$$

y mediante los isomorfismos y equivalencias entre complejos utilizados en la construcción del morfismo  $htr_C$ , existe una forma de ir de  $\text{Hom}_{kG}(B_*^{F(G)}([e]), kG)$  a  $\text{Hom}_{kF(G \rtimes C)}(B_*^{F(G \rtimes C)}, \text{Res}_{F(\pi)} \text{Res}_\nabla kG)$ . Con el morfismo  $\text{Res}_{F(\pi)} \text{Res}_\nabla kG \rightarrow \text{Res}_\nabla k(G \rtimes C)$  del [Lema 4.2.1](#) llegamos a  $\text{Hom}_{kF(G \rtimes C)}(B_*^{F(G \rtimes C)}, \text{Res}_\nabla k(G \rtimes C))$ . Esto nos sirve para definir un morfismo  $hr_C$ . Sin embargo, este morfismo no merece ser llamado restricción pues si tomamos  $C$  igual a la categoría con un solo objeto y su morfismo identidad, toda esta composición no es la identidad, es decir, no cumple con algo que esperamos que cumpla la restricción.

A pesar de esto, veremos qué es lo que nos da la composición de estos morfismos  $htr_C$  y  $hr_C$  que hemos definido. Lo verificaremos en los complejos.

Dado un  $kG$ -homomorfismo  $\varphi: B_*^{F(G)}([e]) \rightarrow kG$ , el primer morfismo está dado por la aumentación  $\epsilon: \mathbb{C}_*(F(C)) \otimes B_*^{F(G)}([e])$  por medio de la precomposición, es decir el primer morfismo nos lleva  $\varphi$  a  $\varphi\epsilon$ , después precomponemos con la equivalencia  $B^{-1}: \mathbb{C}_*(F(\pi)/[e]) \rightarrow \mathbb{C}_*(F(C)) \otimes B_*^{F(G)}([e])$  quedándonos el morfismo  $\varphi\epsilon B^{-1}$ . Después, se aplica el isomorfismo

$$T^{-1}: \text{Hom}_{kG}(\mathbb{C}_*(F(\pi)/[e]), kG) \cong \text{Hom}_{kF(\beta G)}(\mathbb{C}_*(F(\pi)/\_), \text{Res}_\nabla kG).$$

Este isomorfismo está dado por la equivalencia  $\Psi: kF(\beta G)$ -mód  $\rightarrow kF(\beta G)$ -mód y su inversa homotópica  $\Phi$ . En seguida, precomponemos con  $R^{-1}: \text{LK}_{F(\pi)} B_*^{F(G \rtimes C)} \rightarrow \mathbb{C}_*(F(\pi)/\_)$ , ya con esto tenemos el

morfismo  $T^{-1}(\varphi \epsilon B^{-1})R^{-1}$ . Aplicamos la adjunción

$$\Omega^{-1}: \text{Hom}_{kF(\beta G)}(\text{LK}_{F(\pi)} B_*^{F(G \times C)}, \text{Res}_{\nabla} kG) \rightarrow \text{Hom}_{kF(G \times C)}(B_*^{F(G \times C)}, \text{Res}_{F(\pi)} \text{Res}_{\nabla} kG).$$

Esta adjunción está dada por

$$\text{Res}_{F(\pi)}(T^{-1}(\varphi \epsilon B^{-1})R^{-1})\Sigma_{B_*^{F(G \times C)}},$$

donde  $\Sigma_{B_*^{F(G \times C)}}$  es la unidad de la adjunción. Ahora componemos con los morfismos

$$\text{Res}_{F(\pi)} \text{Res}_{\nabla} kG \xrightarrow{c} \text{Res}_{\nabla} k(G \times C) \xrightarrow{s} \text{Res}_{F(\pi)} \text{Res}_{\nabla} kG$$

del [Lema 4.2.1](#) dándonos el morfismo

$$sc\text{Res}_{F(\pi)}(T^{-1}(\varphi \epsilon B^{-1})R^{-1})\Sigma_{B_*^{F(G \times C)}}.$$

La adjunción  $\Omega$  nos proporciona el morfismo

$$\Lambda_{\text{Res}_{\nabla} kG} \text{LK}_{F(\pi)}(sc\text{Res}_{F(\pi)}(T^{-1}(\varphi \epsilon B^{-1})R^{-1})\Sigma_{B_*^{F(G \times C)}}).$$

Precomponiendo con el morfismo  $R$ , aplicando el isomorfismo  $T$ , y por ultimo precomponiendo con los morfismos  $B$  y  $DW$  finalmente tenemos

$$T(\Lambda_{\text{Res}_{\nabla} kG} \text{LK}_{F(\pi)}(sc\text{Res}_{F(\pi)}(T^{-1}(\varphi \epsilon B^{-1})R^{-1})\Sigma_{B_*^{F(G \times C)}})R)BDW$$

el cual es un homomorfismo de  $kG$ -módulos de  $B_*^{F(G)}([e])$  a  $kG$ . Tomamos un elemento

$$1 \otimes ([g_0], (l_1^0, l_2^0)) \xrightarrow{(v_1^1, v_2^1)} \dots \rightarrow ([g_{r-1}], (l_1^{r-1}, l_2^{r-1})) \xrightarrow{(v_1^r, v_2^r)} ([g_r], (l_1^r, l_2^r)) \rightarrow \dots \xrightarrow{(v_1^n, v_2^n)} ([g_n], (l_1^n, l_2^n))$$

en  $k \otimes B_n^{F(\beta G)}([e])$ , por medio de  $DW$  obtenemos

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i \sum_{j=1}^{d_i} z^j(c_j^i) \otimes ([g_0], (l_1^0, l_2^0)) \rightarrow \dots \rightarrow ([g_n], (l_1^n, l_2^n)) \in \mathbb{C}_0(F(C)) \otimes B_n^{F(C)}([e]).$$

Para aplicar  $B$  debemos aplicar primero el morfismo de Eilenberg-Zilber, lo que nos hace tener

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i \sum_{j=1}^{d_i} (z^j(c_j^i), ([g_0], (l_1^0, l_2^0))) \rightarrow \dots \rightarrow (z^j(c_j^i), ([g_n], (l_1^n, l_2^n)))$$

con morfismos  $((1, 1), (v_1^r, v_2^r)): (z^j(c_j^i), ([g_{r-1}], (l_1^{r-1}, l_2^{r-1}))) \rightarrow (z^j(c_j^i), ([g_r], (l_1^r, l_2^r)))$  y al aplicar el isomorfismo inducido por  $F(C) \times 1_{F(G)}/[e] \cong F(\pi)/[e]$  nos quedamos con

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i \sum_{j=1}^{d_i} ([g_0, g_0^{-1} z^j(c_j^i)], (l_1^0, l_2^0)) \rightarrow \dots \rightarrow ([g_n, g_n^{-1} z^j(c_j^i)], (l_1^n, l_2^n))$$

con morfismos  $((v_1^r, (l_1^r)^{-1}1), (v_2^r, l_2^{r-1}1)): ([g_{r-1}, g_{r-1}^{-1} z^j(c_j^i)], (l_1^{r-1}, l_2^{r-1})) \rightarrow ([g_r, g_r^{-1} z^j(c_j^i)], (l_1^r, l_2^r))$ . Esta  $n$ -cadena está en  $\mathbb{C}_n(F(\pi)/[e])$ .

El morfismo  $T(\Lambda_{\text{Res}_{\nabla} kG} \text{LK}_{F(\pi)}(sc\text{Res}_{F(\pi)}(T^{-1}(\varphi \epsilon B^{-1})R^{-1})\Sigma_{B_*^{F(G \times C)}})R)$  está dado por la restricción de la inclusión  $\beta G \rightarrow F(\beta G)$  viendo a  $\beta G$  como la subcategoría completa de  $F(\beta G)$  que consta del objeto  $[e]$ . Esto quiere decir que debemos aplicar los morfismos

$$(\Lambda_{\text{Res}_{\nabla} kG} \text{LK}_{F(\pi)}(sc\text{Res}_{F(\pi)}(T^{-1}(\varphi \epsilon B^{-1})R^{-1})\Sigma_{B_*^{F(G \times C)}})R)_{[e]}$$

Para hacer el cálculo menos pesado consideraremos a partir de ahora solo una  $n$ -cadena de la suma anterior.

Primero aplicamos  $R_{[e]}$  con lo que obtenemos la clase de :

$$([g_0, g_0^{-1} z^j(c_j^i)], ((v_1^n, (l_1^n)^{-1} 1), (v_2^n 1)) \circ \dots \circ ((v_1^1, (l_1^1)^{-1} 1), (v_2^1, l_2^1 1))) \rightarrow \dots \rightarrow ([g_n, g_n^{-1} z^j(c_j^i)], (1, 1))$$

en  $\mathbb{C}_n(1_{F(G \times C)}/\_) \beta_{[e]}([g_n, g_n^{-1} z^j(c_j^i)], (l_1^n, l_2^n))$ . Los morfismos se ven idénticos al paso anterior.

Ahora debemos aplicar

$$(\mathrm{LK}_{F(\pi)}(\mathrm{scRes}_{F(\pi)}(T^{-1}(\varphi \epsilon B^{-1}) R^{-1}) \Sigma_{B_*^{F(G \times C)}}))_{[e]}$$

para eso utilizaremos la definición de ese morfismo, lo cual es aplicar primero

$$\mathrm{scRes}_{F(\pi)}(T^{-1}(\varphi \epsilon B^{-1}) R^{-1}) \Sigma_{B_*^{F(G \times C)}}$$

al representante de la clase. El morfismo a aplicar es  $(\Sigma_{B_*^{F(G \times C)}})_{[g_n, g_n^{-1} z_j(c_j^i)]}$ , el cual está dado por un morfismo estructural en el límite quedando la misma  $n$ -cadena pero vista en

$$\mathbb{C}_n(1_{F(G \times C)}/\_) \beta_{[g_n]}([g_n, g_n^{-1} z_j(c_j^i)], (e, e)).$$

Así  $R^{-1}$  envía esta  $n$ -cadena a

$$([g_0, g_0^{-1} z^j(c_j^i)], (v_1^n, v_2^n) \circ \dots \circ (v_1^0, v_2^0)) \rightarrow \dots \rightarrow ([g_n, g_n^{-1} z^j(c_j^i)], (e, e))$$

en  $\mathbb{C}_n(F(\pi)/\_) F(\pi)([g_n, g_n^{-1} z_j(c_j^i)])$ . Por otro lado

$$T^{-1}(\varphi \epsilon B^{-1}) = \mathrm{Res}_{\nabla} kG(e, g_n) \varphi \epsilon B^{-1} \mathbb{C}_n(F(\pi)/\_)(g_n^{-1}, e).$$

Entonces nos queda en el primer paso

$$([g_0, g_0^{-1} z^j(c_j^i)], (g_n^{-1}, e)(v_1^n, v_2^n) \circ \dots \circ (v_1^0, v_2^0)) \rightarrow \dots \rightarrow ([g_n, g_n^{-1} z^j(c_j^i)], (g_n^{-1}, e))$$

después aplicamos  $\epsilon B^{-1}$ :  $1 \otimes ([g_0], (g_n^{-1}, e)(v_1^n, v_2^n) \circ \dots \circ (v_1^0, v_2^0)) \rightarrow \dots ([g_n], (g_n^{-1}, e))$ . Con  $\varphi$  llegamos a

$$\varphi(1 \otimes ([g_0], (g_n^{-1}, e)(v_1^n, v_2^n) \circ \dots \circ (v_1^0, v_2^0)) \rightarrow \dots ([g_n], (g_n^{-1}, e))) = \sum a_s g_s.$$

Cuando calculamos  $\mathrm{Res}_{\nabla} kG(e, g)(\sum a_s g_s) = \sum a_s g_s g$ , el resultado nos queda en

$$\mathrm{Res}_{F(\pi)} \mathrm{Res}_{\nabla} kG([g_n, g_n^{-1} z^j(c_j^i)]).$$

Aplicando  $c$  conseguimos  $\sum a_s [g_n, g_n^{-1} z^j(c_j^i)]$  luego aplicamos  $s$  y tenemos  $\sum a_s g_n$  en

$$\mathrm{Res}_{F(\pi)} \mathrm{Res}_{\nabla} kG \beta_{[e]}([g_n, g_n^{-1} z^j(c_j^i)], (l_1^n, l_2^n)).$$

La counidad de la adjunción  $\Lambda$ , nos indica que aplicamos el morfismo  $\mathrm{Res}_{\nabla} kG(l_1^n, l_2^n)$ . Pero  $(l_1^n, l_2^n)$  es un morfismo de  $[g_n]$  a  $[e]$ , por lo tanto, al final nos queda  $\sum a_s e$ . Recuperando los otros elementos que no tomamos en cuenta, el resultado final es

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i \sum_{j=1}^{d_i} \sum_s a_s e.$$

Sin embargo esto no es claro que sea multiplicación por la característica de Euler.

Sería conveniente obtener los morfismos para el caso  $HH^*(k(G \times C), k(G \times C)^*)$  para poder utilizarlo en la construcción de los morfismos de transfer y restricción en cohomología cíclica. Esto se debe a que la cohomología cíclica se define como la cohomología del complejo total de un bicomplejo cuyas columnas son el complejo que se utiliza para calcular la cohomología de Hochschild de  $k(G \times C)$  con coeficientes en el  $k$ -dual  $k(G \times C)^*$ . Pero una de las primeras dificultades que surge radica en que es difícil establecer el [Lema 4.2.1](#) para el caso de  $k(G \times C)^*$ . Estos morfismos son de gran importancia pues son los que nos permiten llegar al complejo que calcula la cohomología de Hochschild.

# Bibliografía

- [1] J. C. Becker and D. H. Gottlieb. The transfer map and fiber bundles. *Topology*, 14:1–12, 1975.
- [2] J. C. Becker and D. H. Gottlieb. Transfer maps for fibrations and duality. *Compositio Mathematica*, 33(2):107–133, 1976.
- [3] J. C. Becker and D. H. Gottlieb. A history of duality in algebraic topology. In *History of topology*, pages 725–745. North-Holland, Amsterdam, 1999.
- [4] D.J. Benson. *Representations and Cohomology: Volume 2, Cohomology of Groups and Modules*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1998.
- [5] W. G. Dwyer and C. W. Wilkerson. Homotopy fixed-point methods for lie groups and finite loop spaces. *Annals of Mathematics*, 139(2):395–442, 1994.
- [6] B. Eckmann. Cohomology of groups and transfer. *Ann. of Math. (2)*, 58:481–493, 1953.
- [7] X. Fei. Hochschild and ordinary cohomology rings of small categories. *Advances in Mathematics*, 219(6):1872 – 1893, 2008.
- [8] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [9] J. Klein and C. Malkiewich. The Transfer is Functorial. *arXiv:1603.01872*, 2016.
- [10] S. M. Lane. *Homology*. Classics In Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1st. edition, 1995.
- [11] S.M. Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1998.
- [12] J.L. Loday. *Cyclic Homology*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Springer, 1998.
- [13] B. Mitchell. *Rings with several objects*. Dalhousie University, 1970.
- [14] J. Neisendorfer. *Algebraic Methods in Unstable Homotopy Theory*. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, 2010.
- [15] M.S. Osborne. *Basic Homological Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2000.
- [16] D. Quillen. Higher algebraic k-theory. i. In *Algebraic K-theory, I: Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, volume 341, pages 85–147. Springer, 1973.
- [17] I. Schur. Neuer Beweis eines Satzes ber endliche Gruppen . *J Berl. Ber*, pages 1013–1014, 1902.
- [18] G. Tabuada. Transfer maps and projection formulas. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 140(8):2589–2597, 2012.
- [19] R. W. Thomason. Homotopy colimits in the category of small categories. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 85, pages 91–109. Cambridge University Press, 1979.

- [20] F. Xu. Becker-Gottlieb Transfer for Hochschild Cohomology. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 142(8):2593–2608, 2014.
- [21] F. Zaldívar. *Introducción a la teoría de grupos*. Aportaciones matemáticas: Textos nivel medio. Sociedad Matemática Mexicana, 2006.