



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

INVARIANTES DE ESPACIOS
DE CONFIGURACIONES DE TUPLAS
QUE CONMUTAN

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ÁNGEL ROLANDO JIMÉNEZ CRUZ

DIRECTORES DE TESIS:

Dr. José María Cantarero López

Dr. José Matías Navarro Soza



MÉRIDA, YUCATÁN,
16 AGOSTO 2019

A mi madre.

Agradecimientos

Quiero tomar este espacio para agradecer sobre todo a mi madre Rosa Cruz Ruiz, a quien debo no sólo este logro en mi vida, sino todos, es mi base y ejemplo de vida. Agradezco su apoyo incondicional y todo el cariño con los que siempre cuento.

Agradezco a mi asesor de tesis, José Cantarero, primeramente por haber aceptado trabajar conmigo para este proyecto. Le agradezco mucho el haberme brindado la formación matemática que he logrado y el haberme apoyado en todos los aspectos que fueran necesarios. El desarrollo y el resultado de este trabajo se los debo en gran parte a él.

A mi asesor interno, Matías Navarro, quien también me apoyó en la realización de este trabajo y estuvo pendiente de mis avances.

A Omar Antolín, quien me recibió durante mi estancia en el Instituto de Matemáticas de la UNAM. Parte de los resultados mostrados aquí fueron también gracias a su apoyo.

A los miembros suplentes del sínodo; por el asesoramiento y el tiempo otorgado para este trabajo.

A mi institución, la Universidad Autónoma de Yucatán, por dejarme ser parte de ella y así tener la oportunidad de seguir creciendo en todos los buenos aspectos. Le agradezco también el apoyo que recibí para los diferentes eventos a los que asistí.

Al organismo CONACYT por la beca que recibí durante el programa de maestría con la que pude llevar a cabo mis estudios. Le agradezco también la beca de movilidad otorgada para mi estancia en el Instituto de Matemáticas de la UNAM.

Al Proyecto de Ciencia Básica SEP - CONACYT 242186 por el apoyo otorgado.

Por último, a todos los profesores que tuve a lo largo del programa, a quienes también admiro y respeto. ¡Muchas gracias por la excelente formación que me brindaron!

Invariantes de espacios de configuraciones de tuplas que conmutan

Ángel Rolando Jiménez Cruz

Resumen

Consideremos el espacio $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ de k -tuplas de elementos distintos que conmutan en un grupo topológico G . En este trabajo tomamos $G = U(n)$, $SU(n)$ ó $Sp(n)$ y determinamos invariantes homotópicos de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$. Obtenemos una descripción de la cohomología racional de este espacio en términos de un toro maximal de G y la acción del grupo de Weyl. Se muestran cálculos completos de la cohomología racional para $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2))$ y para $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(U(2))$ cuando $k = 2, 3$. Probamos que la inclusión $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G) \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$ induce isomorfismos en homología racional hasta cierta dimensión dependiendo del rango de G . Probamos que las sucesiones de espacios $r \mapsto \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_r)$ satisfacen estabilidad homológica racional, y que las sucesiones de S_r -representaciones $r \mapsto H^n(\text{Conf}_r^{\text{ab}}(G); \mathbb{Q})$ satisfacen estabilidad uniforme por representaciones.

Invariants of configuration spaces of commuting elements

Ángel Rolando Jiménez Cruz

Abstract

Consider the space $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ of k -tuples of distinct commuting elements in a topological group. In this work we take $G = U(n)$, $SU(n)$ or $Sp(n)$ and we determine homotopical invariants of $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$. We obtain a description of the rational cohomology of this space in terms of a maximal torus in G and the action of the Weyl group. The rational cohomology groups are computed for $SU(2)$ and $U(2)$ for $k = 2, 3$. We show that the inclusion $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$ induces isomorphisms in rational homology up to a certain dimension depending on the rank of G . We prove that the sequences of spaces $r \mapsto \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_r)$ satisfy rational homological stability, and that the sequences of S_r -representations $r \mapsto H^n(\text{Conf}_r^{\text{ab}}(G); \mathbb{Q})$ are uniformly representation stable.

Introducción

Sea X un espacio topológico. El espacio de configuraciones ordenadas de k puntos de X es el conjunto

$$\text{Conf}_k(X) = \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k \mid x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}$$

con la topología subespacio de X^k . El grupo simétrico S_k actúa libremente sobre $\text{Conf}_k(X)$ permutando las coordenadas de una tupla. Esta acción da lugar al espacio de configuraciones desordenadas de k puntos de X :

$$B_k(X) = \text{Conf}_k(X)/S^k$$

Los espacios de configuraciones fueron introducidos por primera vez por los matemáticos Fadell y Neuwirth [13] en el año 1962. En su trabajo, probaron, entre otras cosas, la existencia de la fibrición

$$\begin{aligned} \text{Conf}_{k-1}(X - \{x_1\}) &\longrightarrow \text{Conf}_k(X) \longrightarrow X \\ (x_1, \dots, x_k) &\longmapsto x_1 \end{aligned}$$

cuando X es una variedad topológica. Esta fibrición fue importante para calcular grupos de homotopía de los espacios de configuraciones. Más adelante, en 1969, Birman se interesó en el grupo fundamental de estos espacios [4]. Mostró que $\pi_1(\text{Conf}_k(X))$ es isomorfo a $\prod_k \pi_1(X)$ para variedades de dimensión mayor que 2, y entre otras cosas, dio una presentación explícita del grupo fundamental para superficies orientables, como el toro. En su trabajo se estudió principalmente el grupo fundamental de los espacios $B_k(X)$, el cual es conocido como el grupo de trenzas. Los grupos de trenzas han sido importantes en diferentes áreas de las matemáticas, como la topología, geometría o en los sistemas dinámicos.

El estudio de los espacios de configuraciones continuó con matemáticos como Cohen, Totaro, Napolitano, entre otros, quienes estudiaron sus propiedades geométricas y homológicas. En 1995, Cohen [10] se enfocó en los

espacios Euclidianos y calculó algunos grupos de cohomología del espacio $\text{Conf}_3(\mathbb{R}^n)$. Además mostró relaciones entre la homología de $\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n)$ y las álgebras de Lie graduadas o las representaciones de grupos simétricos. Por su parte, Totaro [26] en 1996, determinó el anillo de cohomología racional de $\text{Conf}_k(X)$ cuando X es una variedad proyectiva, compleja y suave, concluyendo que tal anillo depende únicamente del anillo de cohomología de X . En el 2003, Napolitano [23] se concentró en el estudio del anillo de cohomología de $B_k(X)$, cuando X es una superficie arbitraria.

Más recientemente, debido a la dificultad que muestran los invariantes en las dimensiones bajas, se ha estudiado la estabilidad homológica de $\text{Conf}_k(X)$, esto es, los grupos de homología en dimensiones altas. En el año 2011, Church [7] demostró que si M es una variedad conexa orientable entonces los grupos de homología $\{H_i(\text{Conf}_k(M); \mathbb{Q})\}$ satisfacen estabilidad por representaciones en el sentido de Church - Farb [9].

Por otro lado, si G es un grupo de Lie, el espacio de homomorfismos de \mathbb{Z}^k a G es el conjunto

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G) = \{(g_1, \dots, g_k) \in G^k \mid g_i g_j = g_j g_i\}$$

con la topología subespacio de G^k . Este espacio es conocido como el espacio de k -tuplas que conmutan y fueron introducidos por primera vez por el físico Witten [28] en 1982. Sin embargo, fue Goldman [16] en 1998 quien estudió el tema desde un punto de vista matemático, en su trabajo estudió las propiedades globales de $\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$ y calculó el número de componentes conexas de $\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$ para algunos grupos semisimples. Por su parte, Adem y Cohen [1] en el año 2007, estudiaron el espacio de k -tuplas que conmutan de manera mas exhaustiva desde un punto de vista topológico; estudiaron la arco-conexidad y describieron la geometría y cohomología de los espacios. Incluso calcularon los grupos de cohomología de $\text{Hom}(\mathbb{Z}^2, SU(2))$ y $\text{Hom}(\mathbb{Z}^3, SU(2))$. En su trabajo también determinaron el tipo de homotopía estable para algunos casos, entre los que se incluyen los propios $\text{Hom}(\mathbb{Z}^2, SU(2))$ y $\text{Hom}(\mathbb{Z}^3, SU(2))$.

Un poco más adelante, en el 2007, Baird [3] demostró una fórmula para la cohomología singular y equivariante de $\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$, en términos del álgebra de Lie de un toro maximal T en G y la acción del grupo de Weyl W_G de G . Esta fórmula era de hecho una aplicación de un teorema más general para G -espacios en los que cada elemento está fijo bajo un toro

maximal. Entre sus resultados obtuvo el siguiente isomorfismo:

$$H^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, G); F) \cong H^*(G/T \times T^k; F)^{W_G}$$

cuando F es un campo cuya característica no divide el orden de W_G .

Otros topólogos se interesaron en el grupo fundamental de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$, como Torres-Giese y Sjerve [25] en el 2008, quienes calcularon los grupos fundamentales de los espacios de k -tuplas que conmutan en $SU(2)$, $U(2)$ y $SO(3)$. Más tarde, en el 2012, Gómez, Pettet y Souto [17] probaron que de hecho si G es un grupo de Lie entonces para $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)_1$, la componente conexa del elemento $(1, \dots, 1)$, se tiene que $\pi_1(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)_1)$ es isomorfo a $\pi_1(G)^k$.

En el 2012, Adem y Gómez [2] consideraron los grupos $U(n)$, $SU(n)$ y $Sp(n)$ y se enfocaron en los invariantes equivariantes de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$, como su K -teoría equivariante.

Si bien los espacios de k -tuplas que conmutan resultaron ser interesantes, también resultaron ser un poco complicados, como lo muestran los invariantes en dimensiones bajas de estos espacios. Esto llevó a que algunos matemáticos se interesaran en las dimensiones altas de los invariantes. Así que, de manera más reciente, Ramras y Stafa [24] en el 2018, estudiaron la estabilidad homológica de los espacios $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$. Algunas de sus conclusiones fueron que los grupos de homología $\{H_n(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, G_r); \mathbb{Q})\}_{r \geq 1}$ satisfacen estabilidad homológica racional y $\{H_n(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^k, G_r); \mathbb{Q})\}_{k \geq 1}$ satisfacen estabilidad por representaciones siempre que $\{G_r\}_{r \geq 1}$ sea de las familias de grupos compactos de Lie clásicos, como $\{SU(r)\}$, $\{U(r)\}$ o $\{Sp(r)\}$.

En este trabajo, consideraremos los grupos de Lie compactos y conexos $U(n)$, $SU(n)$ y $Sp(n)$ y estaremos interesados en un híbrido de los dos conceptos anteriormente mencionados. A este espacio lo llamaremos el espacio de configuraciones de tuplas que conmutan y lo denotaremos por:

$$\mathrm{Conf}_k^{\mathrm{fab}}(G) = \{(g_1, \dots, g_k) \in G^k \mid g_i g_j = g_j g_i, g_i \neq g_j \text{ si } i \neq j\}$$

Este espacio también estará dotado de la topología que induce la topología de G^k . Comenzaremos estudiando las propiedades básicas como la

arco-conexidad de estos espacios. Como resultado del estudio de la conexidad obtuvimos que en la mayoría de los casos $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ es arco-conexo, salvo para $SU(2)$ con $k > 3$ y para $U(1) \cong S^1$, que ya era conocido pues $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(S^1) = \text{Conf}_k(S^1)$. También determinamos el número de componentes en estos casos:

Teorema: *Si $k \geq 3$ el número de componentes conexas de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2))$ es $\frac{(k-1)!}{2}$.*

En el capítulo 2 desarrollamos algunos de los conceptos y resultados en el artículo publicado por Baird [3]. El concepto principalmente utilizado es el de haz principal cohomológico, el cual es una herramienta con el que se obtienen resultados para la cohomología de aquellos espacios que admiten acciones de G en los cuales cada punto queda fijo por un toro maximal.

Más adelante, en el capítulo 3, mostramos que si $G = U(n), SU(n)$ ó $Sp(n)$ entonces la función

$$\begin{aligned} \Phi : G \times \text{Conf}_k(T) &\longrightarrow \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G) \\ (g, (t_1, \dots, t_k)) &\mapsto (gt_1g^{-1}, \dots, gt_kg^{-1}) \end{aligned}$$

es continua, suprayectiva y cerrada. Esta función, que relaciona los espacios de configuraciones con los espacios de configuraciones de tuplas que conmutan, es importante en el capítulo 3, en el que calculamos las componentes conexas de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$. Además, la función Φ también es utilizada para fabricar un haz principal cohomológico, con la intención de aplicar la teoría de Baird:

Teorema: *El par $(\Phi, N_G(T))$ es un haz principal cohomológico, donde $N_G(T)$ actúa por la derecha sobre $G \times \text{Conf}_k(T)$ mediante:*

$$(g, (t_1, \dots, t_k)) \cdot n = (gn, (n^{-1}t_1n, \dots, n^{-1}t_kn))$$

Con este teorema se obtiene la siguiente descripción del anillo de cohomología racional de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$:

$$H^*(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G); \mathbb{Q}) \cong H^*(G/T \times \text{Conf}_k(T); \mathbb{Q})^{W_G}$$

En el capítulo 4, aplicamos los teoremas probados en los capítulos anteriores para dar una descripción explícita de la cohomología racional de

$\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2))$ y $\text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(2))$, obteniendo los siguientes grupos:

$$H^n(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2)); \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } n = 0, 3 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$H^n(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2)); \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}^{(k-1)!/2} & \text{si } n \leq 3 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$H^n(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(2)); \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Q}^2 & \text{si } n = 1, 2 \\ \mathbb{Q}^3 & \text{si } n = 3, 4 \\ \mathbb{Q} & \text{si } n = 5 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Motivados por el cálculo de los grupos de cohomología, también obtuvimos las siguientes equivalencias homotópicas:

$$\text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2)) \simeq SU(2) \simeq S^3$$

$$\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2)) \simeq \bigsqcup_{(k-1)!/2} S^2 \times S^1 \quad \text{si } k \geq 3$$

Adicionalmente, también mostramos que los grupos de cohomología racional en dimensión 1 de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ son cero si el rango de G es mayor igual que 3.

Finalmente, hacemos uso de herramientas como la fibración de Fadell y Neuwirth, la presentación del grupo fundamental de Birman, entre otras para obtener la cohomología como \mathbb{Z}_2 -módulo de $\text{Conf}_3(S^1 \times S^1)$ y con ello también calculamos los siguientes grupos de cohomología:

$$H^n(\text{Conf}_3^{\text{ab}}(U(2)); \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Q}^3 & \text{si } n = 1, 6 \\ \mathbb{Q}^7 & \text{si } n = 2, 5 \\ \mathbb{Q}^{10} & \text{si } n = 3 \\ \mathbb{Q}^9 & \text{si } n = 4 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En el capítulo final, introducimos a la categoría **FI** y a los **FI**-módulos. Estos conceptos son herramientas que ayudan a determinar la estabilidad por representaciones en sucesiones de S_r -representaciones y la estabilidad homológica en sucesiones de espacios. En nuestro caso, estudiamos particularmente los **FI**-módulos

$$r \mapsto H_n(G_r/T_r) \qquad r \mapsto H_n(\text{Conf}_k(T_r)),$$

con la intención de usar el isomorfismo

$$H_n(\text{Conf}^{\text{ab}}(G_r)) \cong H_n(G_r/T_r \times \text{Conf}_k(T_r))^{W_r}$$

Nos enfocamos también en la inclusión $\text{Conf}_k(T_r) \longrightarrow (T_r)^k$, con la que obtuvimos el siguiente resultado:

Proposición: *Sea X una variedad topológica conexas y sin borde de dimensión $n \geq 2$. Entonces la inclusión $i_k : \text{Conf}_k(X) \longrightarrow X^k$ induce un isomorfismo en homología en dimensiones menores a $n - 1$.*

Esta proposición nos ayudó a obtener un resultado análogo con la inclusión $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G) \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$:

Teorema: *Si el rango de G es $n \geq 2$, entonces la inclusión*

$$\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G) \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$$

induce isomorfismos en homología racional hasta dimensión $n - 2$.

Con todo lo obtenido determinamos la estabilidad homológica racional para las sucesiones de la forma $r \mapsto \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_r)$.

Por último, utilizando el resultado de Church [7] sobre la estabilidad uniforme por representaciones de $r \mapsto H^n(\text{Conf}_r(T); \mathbb{Q})$, logramos obtener que la sucesión de S_r -representaciones $r \mapsto H^n(\text{Conf}_r^{\text{ab}}(G); \mathbb{Q})$ es uniformemente estable por representaciones.

Cabe mencionar que aunque este trabajo se comenzó a escribir antes de la publicación del preprint de Ramras y Stafa [24], este artículo sirvió de motivación adicional. En él se sugiere el estudio de estos espacios y se plantea la pregunta sobre si satisfacen estabilidad homológica racional, la cual se resuelve en esta tesis.

Índice general

1. Preliminares	9
1.1. Toros maximales	9
1.2. El grupo $SU(2)$	11
1.3. El grupo $U(2)$	15
1.4. Sobre CW -complejos.	17
1.5. Espacios de configuraciones	24
1.6. Grupo fundamental de $\text{Conf}_3(T)$	28
1.7. Espacios de tuplas que conmutan	31
1.8. Sobre representaciones	33
2. Cohomología	39
2.1. Haces principales cohomológicos	39
2.2. Estabilizadores con un toro maximal	41
2.3. El W -módulo $H^*(G/T)$	48
3. Configuraciones que conmutan	53
3.1. Definición y propiedades básicas	53
3.2. Componentes conexas de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$	57
3.3. Componentes conexas de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(S^1)$	58
3.4. Componentes conexas de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2))$	60
4. Cohomología de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$	63
4.1. El espacio $\text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2))$	63
4.2. El espacio $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2))$	69
4.3. Cohomología de $\text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(2))$	70
4.4. Cohomología de $\text{Conf}_3^{\text{ab}}(U(2))$	75
4.5. Cohomología en dimensión 1	87

5. Estabilidad homológica	91
5.1. Definición y propiedades básicas	91
5.2. FI -módulos a partir de $U(r)$	95
5.3. Estabilidad para $r \mapsto H_n(\text{Conf}_2^{\text{fab}}(U(r)); \mathbb{Q})$	102
5.4. Estabilidad para $r \mapsto H_n(\text{Conf}_k^{\text{fab}}(G_r); \mathbb{Q})$	106
5.5. Estabilidad con respecto al número de puntos	112

Capítulo 1

Preliminares

Daremos inicio a este trabajo con este capítulo que nos será útil para fijar la notación y recordar propiedades de temas ya conocidos. Debido a esto, muchas de las propiedades únicamente serán referenciadas. Como ya hemos comentado, estamos interesados en los siguientes grupos:

- $U(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid AA^* = I_n\}$
- $SU(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid AA^* = I_n, \det(A) = 1\}$
- $Sp(n) = \{A \in M(n, \mathbb{H}) \mid AA^* = I_n, \det(A) = 1\}$

Estos son grupos de Lie y por tanto son variedades diferenciables y localmente arco-conexas. Además son espacios compactos y arco-conexos. El lector interesado en mayor detalle puede consultar [22].

1.1. Toros maximales

Los toros maximales son de gran importancia para nosotros en secciones posteriores. Así que hemos introducido esta sección para definir los toros maximales y enunciar propiedades importantes de éstos.

Definición 1.1.1. *Dado G un grupo compacto de Lie y S un subconjunto de G , definimos el centralizador de S como el siguiente conjunto:*

$$C_G(S) = \{g \in G \mid ga = ag \text{ para toda } a \in S\}$$

Mientras que el normalizador de S es el siguiente conjunto:

$$N_G(S) = \{g \in G \mid gSg^{-1} = S\}$$

Si el contexto es claro, únicamente usaremos $C(S)$ y $N(S)$ para denotar al centralizador y al normalizador de S respectivamente.

Definición 1.1.2. *Dada una acción de un grupo G sobre X , denotamos por X^G el conjunto de puntos que son invariantes bajo la acción de G . Más generalmente, si $A \subset G$ denotamos por X^A los puntos fijos bajo la acción restringida a A .*

Definición 1.1.3. *Un grupo topológico isomorfo al producto directo de n copias de $U(1)$ es llamado un toro de dimensión n . Esto es:*

$$T = T^n \cong U(1) \times \dots \times U(1)$$

Claramente un toro es un grupo de Lie compacto, conexo y abeliano.

Definición 1.1.4. *Decimos que T es un toro maximal de G si T es un toro de G y para cualquier toro T' de G que contiene a T se tiene $T = T'$. De manera equivalente, no existe ningún toro T' que contenga a T aparte de él mismo.*

Si $G = U(n)$, $SU(n)$ ó $Sp(n)$ entonces los siguientes subgrupos son toros maximales:

$$\begin{aligned} \text{Para } U(n) \quad T^n &= \{\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n \mid \lambda_i \in U(1)\} \\ \text{Para } SU(n+1) \quad T^n &= \{\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_{n+1} \mid \lambda_i \in U(1), \lambda_1 \dots \lambda_{n+1} = 1\} \\ \text{Para } Sp(n) \quad T^n &= \{\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n \mid \lambda_i \in q(U(1))\} \end{aligned}$$

donde $q(U(1)) = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \mid c = d = 0\}$ y $\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n$ denota la matriz diagonal con entradas $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. A estos los llamaremos el toro estándar de G .

Proposición 1.1.5 (Lema 3.12 de [22]). *Si T es un toro maximal y $N_G(T)_0$ es la componente conexa de la identidad en $N_G(T)$ entonces $N_G(T)_0 = T$.*

Proposición 1.1.6 (Teorema 3.15 de [22]). *Si T es un toro maximal de un grupo compacto de Lie G , entonces para cada elemento $x \in G$, existe $g \in G$ tal que $g^{-1}xg \in T$, esto es:*

$$G = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}$$

Proposición 1.1.7 (Corolario 3.16 de [22]). *Si T es un toro maximal de un grupo compacto de Lie G , entonces T' es un toro maximal de G si y sólo si existe $x \in G$ tal que $T' = xTx^{-1}$.*

Proposición 1.1.8 (Lema 3.19 de [22]). *Si S es un subgrupo abeliano y conexo de un grupo de Lie G compacto, entonces existe un toro maximal que contiene a S .*

De hecho, es posible mostrar que los grupos de Lie compactos, abelianos y conexos son precisamente los toros (ver pág. 562 de [21]). Si en la proposición anterior S no es conexo, entonces el resultado no necesariamente es cierto, como mostramos en el siguiente caso; consideremos a $G = SO(3)$ y a las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Con esto se tiene que el subgrupo $\langle A, B \rangle = \{1, A, B, AB\}$ es abeliano. Además, los únicos elementos de $SO(3)$ que conmutan con A y B son precisamente 1, A , B y AB , así que ningún toro en $SO(3)$ contiene a $\langle A, B \rangle$.

Proposición 1.1.9 (Corolario 3.20 de [22]). *Si T es un toro maximal de un grupo de Lie G compacto y conexo entonces $C_G(T) = T$.*

La razón por la que nos concentraremos en los grupos $U(n)$, $SU(n)$ y $Sp(n)$ es porque haremos uso de la siguiente proposición.

Proposición 1.1.10 (Corolario 2.4 de [1]). *Si G es uno de los grupos $U(n)$, $SU(n)$ ó $Sp(n)$, entonces cada subgrupo abeliano está contenido en un toro maximal.*

1.2. El grupo $SU(2)$

Uno de los grupos sobre los que hemos tomado mayor énfasis es el grupo $SU(2)$. El objetivo de esta sección es familiarizarnos con este grupo y así hacer más fácil la lectura más adelante.

El grupo de Lie $SU(2)$ puede ser expresado de la siguiente manera:

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 = 1 \right\}$$

Recordemos que el toro maximal estándar de $SU(2)$ es isomorfo a S^1 .

$$T(SU(2)) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{C}, \|\alpha\| = 1 \right\}$$

Y un isomorfismo explícito viene dado por:

$$\begin{aligned} T &\longrightarrow S^1 \\ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} &\mapsto \alpha \end{aligned}$$

Con este homeomorfismo consideraremos a cada matriz $t \in T$ como $t \in SU(2)$ ó $t \in S^1$, según nos sea conveniente.

Proposición 1.2.1. *El normalizador del toro estándar de $SU(2)$ es la unión disjunta de T y σT , donde $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.*

Demostración: Observemos primero que

$$\sigma T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta^{-1} & 0 \end{pmatrix} \middle| \beta \in \mathbb{C}, \|\beta\| = 1 \right\}$$

Consideremos ahora $g \in N_{SU(2)}(T)$. Mostraremos que $g \in T \sqcup \sigma T$. Sea $t \in T$ tal que $t \neq \pm 1$. Los elementos g , t y g^{-1} tienen la siguiente forma:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad t = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix} \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix}$$

Observemos de aquí que, ya que $\gamma \in \mathbb{C}$ y $\|\gamma\| = 1$, entonces $\gamma = a + ib$ y $\gamma^{-1} = a - ib$ y puesto que $\gamma \neq \pm 1$, entonces $\gamma \neq \gamma^{-1}$. Luego se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} gtg^{-1} &= \begin{pmatrix} \alpha\gamma & \beta\gamma^{-1} \\ -\bar{\beta}\gamma & \bar{\alpha}\gamma^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |\alpha|\gamma + |\beta|\gamma^{-1} & -\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma^{-1} \\ -\bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma + \bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma^{-1} & |\beta|\gamma + |\alpha|\gamma^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ya que $gtg^{-1} \in T$, entonces $-\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma^{-1} = 0$, con lo cual $\alpha\beta(\gamma^{-1} - \gamma) = 0$. Ya que $\gamma \neq \gamma^{-1}$, necesariamente $\alpha\beta = 0$ y por lo tanto $\beta = 0$, lo cual implica $g \in T$, ó $\alpha = 0$, lo cual implica $g \in \sigma T$.

La otra contención es más clara, ya que si $g \in T$ entonces $g \in N_{SU(2)}(T)$ (por ser T abeliano) y si $g \in \sigma T$ entonces g y g^{-1} son de la forma:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

y de aquí, si $t \in T$ entonces

$$gtg^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \beta\gamma^{-1} \\ -\beta^{-1}\gamma & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Y así $gtg^{-1} \in T$, esto es, $g \in N_{SU(2)}(T)$. Lo cual muestra lo deseado. ■

Observemos que de la demostración podemos sacar las siguientes conclusiones:

- Si $t \in T$, $t \neq \{\pm 1\}$ y $x \in SU(2)$ son tales que $xtx^{-1} \in T$ entonces $x \in N(T)$.
- Si $x \in \sigma T$ entonces $xtx^{-1} = t^{-1}$ para toda $t \in T$.

Además también podemos concluir lo siguiente:

Proposición 1.2.2. *El grupo de Weyl de $SU(2)$ está dado por:*

$$W = N(T)/T = \{T, \sigma T\} \cong \mathbb{Z}_2$$

Proposición 1.2.3. *Sea T el toro maximal estándar de $SU(2)$. Entonces $SU(2)/T \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.*

Demostración: Consideremos las siguientes funciones:

$$f : SU(2)/T \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} T \mapsto \begin{cases} \alpha/\bar{\beta} & \text{si } \beta \neq 0 \\ \infty & \text{si } \beta = 0 \end{cases}$$

$$g : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow SU(2)/T$$

$$z \mapsto \begin{cases} \left(\begin{pmatrix} \frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} & \frac{\bar{z}}{\sqrt{1+|z|^2}} \end{pmatrix} T \right) & \text{si } z \neq \infty \\ T & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

Veamos que f está bien definida; si $AT = BT$, donde A y B son de la forma

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

entonces $B^{-1}A \in T$;

$$\begin{aligned} B^{-1}A &= \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{\alpha}x + \beta\bar{y} & \bar{\alpha}y - \beta\bar{x} \\ \bar{\beta}x - \alpha\bar{y} & \bar{\beta}y + \alpha\bar{x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y así $\bar{\beta}x - \alpha\bar{y} = 0$. Ahora bien, si $\beta = 0$ (lo cual implica $\alpha \neq 0$) entonces $\bar{\alpha}y = 0$ y así $y = 0$. Por lo tanto, $f(AT) = \infty = f(BT)$. Si $\beta \neq 0$ entonces $x = \frac{\alpha\bar{y}}{\beta}$, con lo cual necesariamente $y \neq 0$ y así $\alpha/\bar{\beta} = x/\bar{y}$. Por lo tanto, f está bien definida. Además es claro que f es continua y g también lo es, ya que si $z_n \rightarrow \infty$ entonces $\frac{1}{\sqrt{1+\|z_n\|^2}} \rightarrow 0$ y así $g(z_n)$ tiende a una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$$

que pertenece a T . Por último, es claro que f y g son inversas una de la otra. ■

Recordemos que existe un homeomorfismo $f : S^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dado por la proyección estereográfica desde el polo norte en los puntos $S^2 - \{(0, 0, 1)\}$ y $f(0, 0, 1) = \infty$. Por lo tanto, $SU(2)/T \cong S^2$. Cabe mencionar que el cociente $SU(2) \rightarrow SU(2)/T$ es la fibración de Hopf.

Lema 1.2.4. *Consideremos la acción de $\mathbb{Z}_2 = \{1, \sigma\}$ sobre $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dada por $\sigma \cdot z = 1/\bar{z}$ y $\sigma \cdot \infty = 0$. Entonces la acción*

$$\sigma \cdot (x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2, -x_3)$$

en S^2 es tal que el homeomorfismo $f : S^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es equivariante.

Demostración: Para que la acción sobre S^2 sea tal que f es equivariante debe cumplirse que $f(\sigma \cdot z) = \sigma \cdot f(z)$ y por tanto $\sigma \cdot z = f^{-1}(\sigma \cdot f(z))$.

Con lo cual, basta ver el resultado de $f^{-1}(\sigma \cdot f(z))$. Supongamos que $(z_1, z_2, z_3) \neq (0, 0, 1)$, entonces:

$$f(z_1, z_2, z_3) = \left(\frac{z_1}{1-z_3}, \frac{z_2}{1-z_3} \right)$$

$$\sigma \cdot f(z_1, z_2, z_3) = \left(\frac{-z_1(1-z_3)}{z_1^2+z_2^2}, \frac{-z_2(1-z_3)}{z_1^2+z_2^2} \right)$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\sigma \cdot f(z_1, z_2, z_3)) &= \left(\frac{-2z_1(1-z_3)}{(1-z_3)^2+z_1^2+z_2^2}, \frac{-2z_2(1-z_3)}{(1-z_3)^2+z_1^2+z_2^2}, \frac{(1-z_3)^2-z_1^2-z_2^2}{(1-z_3)^2+z_1^2+z_2^2} \right) \\ &= \left(\frac{-2z_1(1-z_3)}{2-2z_3}, \frac{-2z_2(1-z_3)}{2-2z_3}, \frac{2z_3^2-2z_3}{2-2z_3} \right) \\ &= (-z_1, -z_2, -z_3) \end{aligned}$$

Para $(0, 0, 1)$ se tiene que $f(0, 0, 1) = \infty$ y $\sigma \cdot f(0, 0, 1) = 0$, con lo cual, $f^{-1}(\sigma \cdot f(0, 0, 1)) = f^{-1}(0) = (0, 0, -1)$. ■

1.3. El grupo $U(2)$

Otro grupo de Lie en el que estaremos interesados es $U(2)$, el cual es el grupo que consta de las siguientes matrices:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid \alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta} = 0, \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 = \|\gamma\|^2 + \|\delta\|^2 = 1 \right\}$$

El toro maximal estándar de $U(2)$ es el siguiente subgrupo:

$$T(U(2)) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \|\alpha\| = \|\beta\| = 1 \right\}$$

Y es homeomorfo a $S^1 \times S^1$ mediante:

$$\begin{aligned} T &\longrightarrow S^1 \times S^1 \\ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} &\mapsto (\alpha, \beta) \end{aligned}$$

Con este homeomorfismo consideraremos a cada matriz $A \in T$ como $A \in SU(2)$ ó $A \in S^1 \times S^1$, según nos sea conveniente.

Proposición 1.3.1. *Si S^1 y T son los toros maximales estándares de $SU(2)$ y $U(2)$ respectivamente, entonces $U(2)/T \cong SU(2)/S^1$.*

Demostración: Consideremos la siguiente función:

$$i : SU(2)/S^1 \longrightarrow U(2)/T \\ AS^1 \mapsto AT$$

Veamos que está bien definida; si $AS^1 = BS^1$ entonces $B^{-1}A \in S^1 \subset T$, por lo tanto, $AT = BT$. La función también es inyectiva, ya que si $AS^1, BS^1 \in SU(2)/S^1$ son tales que $AT = BT$ entonces $B^{-1}A \in T$ y ya que $T \cap SU(2) = S^1$ entonces $AS^1 = BS^1$. Para ver que es suprayectiva consideremos la matriz $A \in U(2)$. Ya que $\det(A) \neq 0$ podemos considerar a una de las raíces cuadradas de $\det(A)$, digamos ω . Sea C la siguiente matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 1/\omega & 0 \\ 0 & 1/\omega \end{pmatrix}$$

Ya que $\|\det(A)\| = 1$ entonces $\|1/\omega\| = 1$ y por lo tanto $C \in T$, con lo cual además $ACT = AT$. Luego observemos que

$$\det(AC) = \det(A) \det(C) = \det(A) \frac{1}{\det(A)} = 1$$

Así que $AC \in SU(2)$, con lo cual, $i(ACS^1) = ACT = AT$. Finalmente, es claro que i es continua y ya que los espacios son de Hausdorff y $SU(2)/S^1 \cong S^2$ es compacto, se sigue que es un homeomorfismo. ■

Proposición 1.3.2. *El normalizador del toro estándar de $U(2)$ es la unión disjunta de T y σT , donde $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

Demostración: Se tiene que:

$$\sigma T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \mid \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \|\beta\| = \|\gamma\| = 1 \right\}$$

Sea $g \in N(T)$. Mostraremos que $g \in T \cup \sigma T$. Consideremos $A = (1, -1) \in T$. Los elementos g , A y g^{-1} tienen la siguiente forma:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix}$$

Luego entonces, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} gAg^{-1} &= \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 - |\beta|^2 & \alpha\bar{\gamma} - \beta\bar{\delta} \\ \bar{\alpha}\gamma - \bar{\beta}\delta & |\gamma|^2 - |\delta|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ya que $gAg^{-1} \in T$, entonces $|\alpha|^2 - |\beta|^2 \neq 0$, $|\gamma|^2 - |\delta|^2 \neq 0$ y $\alpha\bar{\gamma} - \beta\bar{\delta} = 0$, con lo cual $\alpha\bar{\gamma} = \beta\bar{\delta}$. Observemos que del hecho de que $gg^{-1} = I$ también se tiene que $\alpha\bar{\gamma} = -\beta\bar{\delta}$. Por lo tanto, necesariamente se tiene uno de los siguientes cuatro casos; $\alpha = 0$ ó $\gamma = 0$ con alguno de $\beta = 0$ ó $\delta = 0$. Notemos que $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ no puede darse, pues $|\alpha|^2 - |\beta|^2 \neq 0$, por lo tanto, si $\alpha = 0$ entonces $\delta = 0$, lo cual implica $g \in \sigma T$. De manera similar se concluye que si $\beta = 0$ entonces $\gamma = 0$, lo cual implica $g \in T$. En cualquier caso se tiene que $g \in T \cup \sigma T$.

La otra contención es más clara, ya que si $g \in T$ entonces $g \in N(T)$ (por ser T abeliano) y si $g \in \sigma T$ entonces g y g^{-1} son de la forma:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

y de aquí, si $A \in T$ entonces

$$gtg^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \beta y \\ \gamma x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\beta|^2 y & 0 \\ 0 & |\gamma|^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

Y así $gAg^{-1} \in T$, esto es, $g \in N(T)$. Lo cual muestra lo deseado. ■

Con el argumento de la demostración en la proposición anterior podemos concluir que si $g \in \sigma T$ y $A = (x, y)$ entonces $g(x, y)g^{-1} = (y, x)$. Además, también podemos concluir lo siguiente:

Proposición 1.3.3. *El grupo de Weyl de $U(2)$ está dado por:*

$$W = N(T)/T = \{T, \sigma T\} \cong \mathbb{Z}_2$$

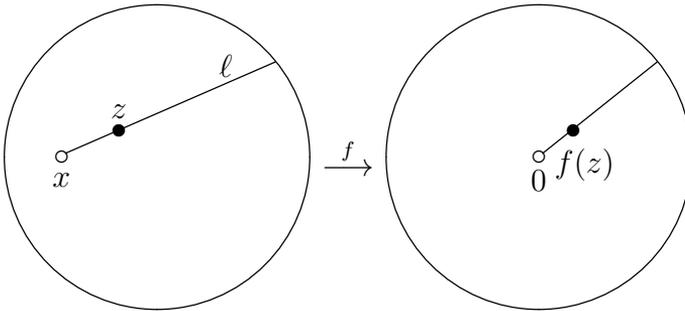
1.4. Sobre CW -complejos.

En esta sección veremos algunas propiedades de CW -complejos, con los que estableceremos equivalencias homotópicas que nos serán de utilidad en el Capítulo 5.

Comenzaremos con algunas propiedades de D^n , el disco de dimensión n . Por convención para esta sección, si $\epsilon > 0$ y $x \in D^n$, denotaremos por $B_\epsilon(x)$ a la bola cerrada centrada en x y por $B_\epsilon^o(x)$ al interior de tal bola.

Proposición 1.4.1. *Si x y y están en el interior de D^n , entonces existe un homeomorfismo $D^n - \{x\} \rightarrow D^n - \{y\}$ que fija ∂D^n .*

Demostración: Sea $z \in D^n - \{x\}$. El elemento z se encuentra en una única línea, digamos ℓ , que va de x a ∂D^n . Esta línea se encuentra parametrizada por $(0, 1]$, así que z se encuentra en cierta posición t en esta parametrización. Definimos $f : D^n - \{x\} \rightarrow D^n - \{0\}$ tal que $f(z)$ es el elemento que se encuentra en la posición t en la parametrización de la línea que va de 0 hacia el punto de intersección de ℓ con ∂D^n :



Esta construcción cumple que f es un homeomorfismo y claramente fija ∂D^n . Tomando el homeomorfismo similar $g : D^n - \{y\} \rightarrow D^n - \{0\}$, se tiene el homeomorfismo deseado mediante $g^{-1} \circ f$. ■

Proposición 1.4.2. *Sean x, y puntos en el interior de D^n y $\epsilon, \delta > 0$ tales que $B_\epsilon(x), B_\delta(y)$ están contenidos en el interior de D^n y además $B_\epsilon^o(x) \cap B_\delta^o(y) \neq \emptyset$. Entonces existe un homeomorfismo*

$$D^n - \{x\} \rightarrow D^n - \{y\}$$

que deja fijo $D^n - (B_\epsilon(x) \cup B_\delta(y))$.

Demostración: Sea $z \in B_\epsilon^o(x) \cap B_\delta^o(y)$. Ya que $B_\epsilon(x) \cong D^n$ y los puntos x, z están en el interior de $B_\epsilon(x)$, entonces por la proposición anterior existe un homeomorfismo $f : B_\epsilon(x) - \{x\} \rightarrow B_\epsilon(x) - \{z\}$ que deja fijo $\partial B_\epsilon(x)$. Este homeomorfismo local extiende al siguiente:

$$\begin{aligned} \tilde{f} : D^n - \{x\} &\rightarrow D^n - \{z\} \\ t &\mapsto \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in B_\epsilon(x) - \{x\} \\ t & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

Claramente \tilde{f} es homeomorfismo y se encuentra bien definido ya que f deja fijo $\partial B_\epsilon(x)$. Además \tilde{f} deja fijo $D^n - B_\epsilon(x)$. De manera similar, puede construirse un homeomorfismo $\tilde{g} : D^n - \{y\} \longrightarrow D^n - \{z\}$ que deje fijo $D^n - B_\delta(y)$. Con esto se tiene el homeomorfismo deseado, a saber, $\tilde{g}^{-1} \circ \tilde{f}$. ■

Proposición 1.4.3. Sean $n \geq 2$ y consideremos $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r$ puntos en el interior de D^n . Entonces existe un homeomorfismo

$$D^n - \{x_1, \dots, x_r\} \longrightarrow D^n - \{y_1, \dots, y_r\}$$

que fija ∂D^n .

Demostración: Procederemos por inducción; el caso $r = 1$ es justo la Proposición 1.4.1. Supongamos entonces que el enunciado es cierto para $r - 1$. A continuación mostraremos que es válido para r . Consideremos $f : D^n - \{x_1, \dots, x_{r-1}\} \longrightarrow D^n - \{y_1, \dots, y_{r-1}\}$ el homeomorfismo que existe por hipótesis de inducción, el cual deja fijo ∂D^n . Si $f(x_r) = y_r$ entonces ya habríamos terminado, pues f restringido a $D^n - \{x_1, \dots, x_r\}$ sería el homeomorfismo deseado. Supongamos entonces que $f(x_r) \neq y_r$, con esto se tiene un homeomorfismo de la siguiente manera:

$$\tilde{f} : D^n - \{x_1, \dots, x_{r-1}, x_r\} \longrightarrow D^n - \{y_1, \dots, y_{r-1}, f(x_r)\}$$

que también deja fijo ∂D^n . Ya que $n \geq 2$ entonces $D^n - \{y_1, \dots, y_{r-1}\}$ es arco-conexo y por lo tanto existe $\alpha : [0, 1] \longrightarrow D^n - \{y_1, \dots, y_{r-1}\}$ tal que $\alpha(0) = f(x_r)$ y $\alpha(1) = y_r$. Para cada $t \in [0, 1]$ sea $\epsilon_t > 0$ tal que $B_{\epsilon_t}(\alpha(t))$ esté contenido en el interior de D^n y $B_{\epsilon_t}(\alpha(t)) \cap \{y_1, \dots, y_{r-1}\} = \emptyset$. Definamos $U_t = B_{\epsilon_t}^o(\alpha(t))$. Ya que $\text{Im}(\alpha)$ es compacto en D^n , se tiene que existe un número finito de U_t , digamos n , tales que $\text{Im}(\alpha) \subset \bigcup_{i=1}^n U_{t_i}$. Podemos suponer además que esta cubierta es tal que $0 = t_1 < \dots < t_n = 1$ y $U_{t_i} \cap U_{t_{i+1}} \neq \emptyset$. Con esto $\alpha(t_i), \alpha(t_{i+1})$ están en el interior de D^n , los subconjuntos $B_{\epsilon_{t_i}}(\alpha(t_i)), B_{\epsilon_{t_{i+1}}}(\alpha(t_{i+1}))$ están contenidos en el interior de D^n y además $B_{\epsilon_{t_i}}(\alpha(t_i)) \cap B_{\epsilon_{t_{i+1}}}(\alpha(t_{i+1})) \neq \emptyset$. Así que por la Proposición 1.4.2, existe un homeomorfismo $g_i : D^n - \{\alpha(t_i)\} \longrightarrow D^n - \{\alpha(t_{i+1})\}$ que deja fijo $D^n - (B_{\epsilon_{t_i}}(\alpha(t_i)) \cup B_{\epsilon_{t_{i+1}}}(\alpha(t_{i+1})))$. En particular, cada g_i deja fijo a los elementos y_1, \dots, y_{r-1} y así, obtenemos un homeomorfismo mediante la restricción

$$\tilde{g}_i = g_i| : D^n - \{y_1, \dots, y_{r-1}, \alpha(t_i)\} \longrightarrow D^n - \{y_1, \dots, y_r, \alpha(t_{i+1})\}$$

Finalmente, podemos tomar el homeomorfismo dado por:

$$\tilde{g}_{n-1} \circ \dots \circ \tilde{g}_1 \circ \tilde{f} : D^n - \{x_1, \dots, x_r\} \longrightarrow D^n - \{y_1, \dots, y_r\}$$

el cual claramente deja fijo ∂D^n pues cada uno de las funciones en la composición lo hacen. ■

Proposición 1.4.4. *Sea X un CW-complejo de dimensión n con una única n -celda. Entonces $X - \{x\} \simeq X^{(n-1)}$ para cada x en el interior de la celda.*

Demostración: Sea $(\Phi, \tilde{\Phi}) : (D^n, \partial D^n) \longrightarrow (X, X^{(n-1)})$ la función característica de la única celda y consideremos $i : \partial D^n \longrightarrow D^n - \{0\}$ y $p : D^n - \{0\} \longrightarrow \partial D^n$ como la inclusión y la proyección radial, respectivamente. Entonces $p \circ i = 1$ e $i \circ p \simeq 1$ rel ∂D^n mediante una homotopía $H : (D^n - \{0\}) \times I \longrightarrow D^n - \{0\}$. Por lo tanto $D^n - \{0\} \simeq \partial D^n$. Recordemos que $X = X^{(n-1)} \cup_{\tilde{\Phi}} D^n$ y consideremos $0 \in D^n$. Con esto, $X - \{[0]\} = X \cup_{\tilde{\Phi}} (D^n - \{0\})$ donde $[0] \in X$ está en el interior de la celda. Consideremos también a la siguiente función:

$$f : X - \{[0]\} \longrightarrow X^{(n-1)}$$

$$[x] \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in X^{(n-1)} \\ \Phi(p(x)) & \text{si } x \in D^n - \{0\} \end{cases}$$

Esta función claramente es continua y se encuentra bien definida ya que $\Phi(p(D^n - \{0\})) \subset X^{(n-1)}$ y si $[x] = [\Phi(y)]$, entonces $y \in \partial D^n$ y así $[\Phi(p(y))] = [\Phi(y)] = [x]$. Consideremos ahora $\tilde{i} : X^{(n-1)} \longrightarrow X - \{[0]\}$ como la inclusión, que es tal que $f \circ \tilde{i} = 1$ y consideremos también

$$\tilde{H} : (X - \{[0]\}) \times I \longrightarrow X^{(n-1)}$$

$$([x], t) \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in X^{(n-1)} \\ \Phi(H(x, t)) & \text{si } x \in D^n - \{0\} \end{cases}$$

la cual es homotopía bien definida pues $i \circ p \simeq 1$ rel ∂D^n y además es tal que $\tilde{i} \circ f \simeq 1$. Por último, por la Proposición 1.4.1 se tiene que $D^n - \{x\} \cong D^n - \{0\}$ rel ∂D^n para cualquier punto x en el interior de D^n , con lo cual,

$$X^{(n-1)} \simeq X - \{[0]\} = X \cup_{\tilde{\Phi}} (D^n - \{0\})$$

$$\cong X \cup_{\tilde{\Phi}} (D^n - \{x\}) = X - \{[x]\} \quad \blacksquare$$

Como consecuencia tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.4.5. Sean X un CW-complejo de dimensión n con una única n -celda y x un punto en el interior de la celda. Entonces la inclusión $i : X^{(n-1)} \longrightarrow X - \{x\}$ es una equivalencia homotópica y por tanto induce isomorfismos en homología.

La siguiente proposición tiene el objetivo de generalizar la Proposición 1.4.4.

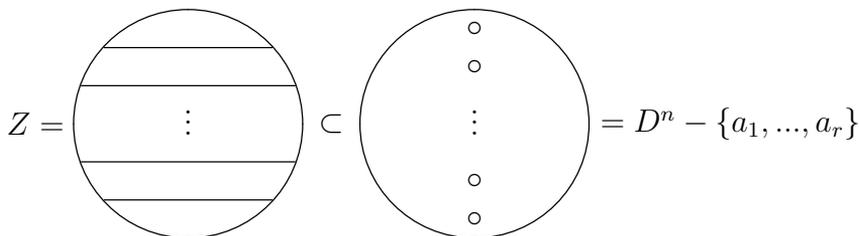
Proposición 1.4.6. Si $n \geq 2$ y x_1, \dots, x_r son puntos en el interior de D^n entonces

$$D^n - \{x_1, \dots, x_r\} \simeq \partial D^n \vee \bigvee_{i=1}^{r-1} S^{n-1} \text{ rel } \partial D^n$$

Demostración: Para cada $1 \leq i \leq r$ sea $a_i = (0, \dots, 0, -1 + \frac{1+2(i-1)}{r})$ y para cada $1 \leq i \leq r-1$ sea $f_i : \partial D^{n-1} \longrightarrow \partial D^n$ la inclusión de ∂D^{n-1} como la esfera formada por la intersección de ∂D^n con un hiperplano perpendicular al último eje con altura $-1 + \frac{2i}{r}$. Estas condiciones son de tal manera que el conjunto

$$Z = \partial D^n \cup_{\sqcup f_i} \left(\bigsqcup_{i=1}^{r-1} D^{n-1} \right) \subset D^n - \{a_1, \dots, a_r\}$$

se ve de la siguiente forma;



Sea $p : D^n - \{a_1, \dots, a_r\} \longrightarrow Z$ la proyección radial sobre cada a_i hacia Z . Es claro que si $i : Z \longrightarrow D^n - \{a_1, \dots, a_r\}$ es la inclusión, entonces $p \circ i = 1$ e $i \circ p \simeq 1$ rel ∂D^n mediante la homotopía

$$H : (D^n - \{a_1, \dots, a_r\}) \times I \longrightarrow D^n - \{a_1, \dots, a_r\}$$

$$(x, t) \mapsto tx + (1-t)p(x)$$

con lo cual, $D^n - \{a_1, \dots, a_r\} \simeq Z$ rel ∂D^n . Ya que $\sqcup f_i : \sqcup \partial D^{n-1} \longrightarrow \partial D^n$

es nulhomótopa, entonces

$$\begin{aligned} Z &\simeq \partial D^n \cup_c \left(\bigsqcup_{i=1}^{r-1} D^{n-1} \right) \text{ rel } \partial D^n \\ &= \partial D^n \vee \bigvee_{i=1}^{r-1} S^{n-1} \end{aligned}$$

donde $c : \sqcup \partial D^{n-1} \longrightarrow \partial D^n$ es la función constante $(-1, 0, \dots, 0)$. Por último, si x_1, \dots, x_r son puntos en el interior, de la Proposición 1.4.3 se tiene que $D^n - \{x_1, \dots, x_r\} \simeq D^n - \{a_1, \dots, a_r\} \text{ rel } \partial D^n$. Así que

$$\begin{aligned} D^n - \{x_1, \dots, x_r\} &\simeq D^n - \{a_1, \dots, a_r\} \text{ rel } \partial D^n \\ &\simeq \partial D^n \vee \bigvee_{i=1}^{r-1} S^{n-1} \text{ rel } \partial D^n \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Proposición 1.4.7. *Sea X un CW-complejo de dimensión n con una única n -celda. Entonces $X - \{x_1, \dots, x_r\} \simeq X^{(n-1)} \vee \bigvee_{i=1}^{r-1} S^{n-1}$ para cualesquiera x_1, \dots, x_r en el interior de la celda.*

Demostración: Sea $(\Phi, \tilde{\Phi}) : (D^n, \partial D^n) \longrightarrow (X, X^{(n-1)})$ la función característica de la única n -celda y consideremos $a_i \in D^n$ para cada $1 \leq i \leq r$ y $f_i : \partial D^{n-1} \longrightarrow \partial D^n$ para cada $1 \leq i \leq r-1$ como en la demostración de la Proposición 1.4.6. Con esto se tiene que $X = X^{(n-1)} \cup_{\tilde{\Phi}} D^n$ y que cada $z_i = \Phi(a_i)$ está en el interior de la celda, por lo tanto

$$X - \{z_1, \dots, z_r\} = X^{(n-1)} \cup_{\tilde{\Phi}} (D^n - \{a_1, \dots, a_r\})$$

Ya que $D^n - \{a_1, \dots, a_r\} \simeq \partial D^n \cup_{\sqcup f_i} \left(\bigsqcup_{i=1}^{r-1} D^{n-1} \right) \text{ rel } \partial D^n$ entonces

$$X^{(n-1)} \cup_{\tilde{\Phi}} (D^n - \{a_1, \dots, a_r\}) \simeq X^{(n-1)} \cup_{\tilde{\Phi}} \left(\partial D^n \cup_{\sqcup f_i} \left(\bigsqcup_{i=1}^{r-1} D^{n-1} \right) \right)$$

Como $\tilde{\Phi}(\partial D^n) \subset X^{(n-1)}$ entonces

$$X^{(n-1)} \cup_{\tilde{\Phi}} \left(\partial D^n \cup_{\sqcup f_i} \left(\bigsqcup_{i=1}^{r-1} D^{n-1} \right) \right) \simeq X^{(n-1)} \cup_{\sqcup f_i \circ \tilde{\Phi}} \left(\bigsqcup_{i=1}^{r-1} D^{n-1} \right)$$

Por último, como $\sqcup f_i$ es nulhomótopa así también lo es $\sqcup f_i \circ \tilde{\Phi}$ y por lo

tanto

$$\begin{aligned} X^{(n-1)} \cup_{\sqcup_{f_i \circ \tilde{\Phi}}} \left(\bigsqcup_{i=1}^{r-1} D^{n-1} \right) &\simeq X^{(n-1)} \cup_c \left(\bigsqcup_{i=1}^{r-1} D^{n-1} \right) \\ &= X^{(n-1)} \vee \bigvee_{i=1}^{r-1} S^{n-1} \end{aligned}$$

donde c es la constante $\Phi(-1, \dots, 0)$. Siguiendo la cadena de equivalencias establecidas, concluimos que

$$X - \{z_1, \dots, z_r\} \simeq X^{(n-1)} \vee \bigvee_{i=1}^{r-1} S^{n-1}$$

Finalmente, si x_1, \dots, x_r son arbitrarios en el interior de la celda, entonces existen y_1, \dots, y_r en el interior de D^n tales que $\Phi(y_i) = x_i$ y por la Proposición 1.4.2 una equivalencia homotópica tal que

$$D^n - \{y_1, \dots, y_r\} \simeq D^n - \{a_1, \dots, a_r\} \text{ rel } \partial D^n$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} X - \{x_1, \dots, x_r\} &= X \cup_{\tilde{\Phi}} (D^n - \{y_1, \dots, y_r\}) \\ &\simeq X \cup_{\tilde{\Phi}} (D^n - \{a_1, \dots, a_r\}) \\ &= X - \{z_1, \dots, z_r\} \simeq X^{(n-1)} \vee S^{n-1} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En particular, si X un CW-complejo de dimensión n con una única n -celda, entonces $X - \{x, y\} \simeq X^{(n-1)} \vee S^{n-1}$ para cualesquiera x, y en el interior de la celda.

Consideremos ahora a $S^1 \cong \{1\} \cup_f D^1$, donde $f : \{-1, 1\} \rightarrow \{1\}$. Esto da a S^1 una estructura de CW-complejo con sólo una 0-celda y una 1-celda, cuyas imágenes en S^1 (de las funciones características) son los conjuntos $pt = \{1\}$ y $a = \{x \mid x \in S^1\}$. A partir de esta estructura, podemos otorgar de manera inductiva una estructura CW para $T_r = (S^1)^r$, de tal manera que el k -ésimo esqueleto de T_r , donde $k \leq r$, tiene celdas de dimensión k cuyas imágenes en T_r son de la forma $b_1 \times \dots \times b_r$, donde a aparece en el producto k -veces y los $r - k$ términos restantes son pt . De aquí en adelante, consideraremos siempre a T_r como un CW-complejo con esta estructura.

Por último, recordemos lo siguiente; si X, Y son CW -complejos y $f : X \rightarrow Y$ es tal que para toda celda $\Phi(e_\alpha^n)$ de X existe una celda $\tilde{\Phi}(\tilde{e}_\beta^n)$ de Y con el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} e_\alpha^n & \xrightarrow{1} & \tilde{e}_\beta^n \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \tilde{\Phi} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

donde Φ y $\tilde{\Phi}$ son las respectivas funciones características y $e_\alpha^n \cong \tilde{e}_\beta^n \cong D^n$, entonces f induce un homomorfismo de complejos dado por:

$$\begin{aligned} f_\# : C_n^{CW}(X) &\rightarrow C_n^{CW}(Y) \\ e_\alpha^n &\mapsto \tilde{e}_\beta^n \end{aligned}$$

El homomorfismo $f_\#$ está bien definido pues si existiesen dos celdas tales que

$$\tilde{\Phi}(\tilde{e}_\beta^n) = f(\Phi(e_\alpha^n)) = \tilde{\Phi}(\tilde{e}_{\beta'}^n)$$

entonces tales celdas coincidirían en el interior, lo cual no puede ser, pues Y es un CW -complejo. Este homomorfismo induce a su vez un homomorfismo en homología celular dado por:

$$\begin{aligned} f_* : H_n^{CW}(X) &\rightarrow H_n^{CW}(Y) \\ [e_\alpha^n] &\mapsto [f_\#(e_\alpha^n)] \end{aligned}$$

Este homomorfismo además coincide con el inducido en homología singular en el sentido en el que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} H_n^{CW}(X) & \xrightarrow{f_*} & H_n^{CW}(Y) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_n(X) & \xrightarrow{f_*} & H_n(Y) \end{array}$$

1.5. Espacios de configuraciones

Los espacios de configuraciones toman relevancia en este trabajo ya que las configuraciones de tuplas que conmutan vienen a partir de com-

binar los espacios de configuraciones con los espacios de tuplas que conmutan. Aquí mostraremos algunas de sus propiedades.

Definición 1.5.1. Sea X un espacio topológico, definimos el espacio de configuraciones de k puntos de X como el siguiente conjunto:

$$\text{Conf}_k(X) = \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k \mid x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}$$

dotado de la topología subespacio de X^k .

Proposición 1.5.2. Si X es un espacio de Hausdorff entonces $\text{Conf}_k(X)$ es un subconjunto abierto de X^k .

Demostración: Sea $(x_1, \dots, x_k) \in \text{Conf}_k(X)$. Ya que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ entonces existen abiertos U_1, \dots, U_k tales que $x_i \in U_i$ y $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Consideremos entonces el abierto $U = U_1 \times \dots \times U_k$, el cual es tal que $(x_1, \dots, x_k) \in U$. Si $(y_1, \dots, y_k) \in U$, entonces $y_i \in U_i$, y ya que $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$ entonces $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$. Por lo tanto, $U \subset \text{Conf}_k(X)$ y así $\text{Conf}_k(X)$ es abierto. ■

Proposición 1.5.3. Si X es un espacio topológico infinito tal que $X \setminus A$ es arco-conexo para cada subconjunto finito A de X entonces $\text{Conf}_n(X)$ es también arco-conexo para cualquier n .

Demostración: Para demostrar el enunciado consideremos

$$(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \text{Conf}_n(X)$$

Mostraremos que existe un camino $\gamma : [0, 1] \rightarrow \text{Conf}_n(X)$ tal que

$$\gamma(0) = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{y} \quad \gamma(1) = (y_1, \dots, y_n)$$

Consideremos primero $s_2 \in X \setminus \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ (esto es posible ya que $X \setminus \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ sigue siendo infinito). Ya que por hipótesis $X \setminus \{x_1, x_3, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ es arco-conexo y $x_2, s_2 \in X \setminus \{x_1, x_3, \dots, x_n\}$, entonces existe

$$\alpha_2 : [0, 1] \rightarrow X \setminus \{x_1, x_3, \dots, x_n\}$$

tal que $\alpha_2(0) = x_2$, $\alpha_2(1) = s_2$. Consideremos ahora el siguiente camino:

$$\tilde{\alpha}_2(t) = (x_1, \alpha_2(t), x_3, \dots, x_n)$$

Ya que $\alpha_2(t) \neq x_i$ para todo t , se sigue que $\tilde{\alpha}_2(t)$ es un camino en $\text{Conf}_n(X)$ que comienza en (x_1, \dots, x_n) y termina en $(x_1, s_2, x_3, \dots, x_n)$. Sea ahora $s_3 \in X \setminus \{x_1, s_2, x_3, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$, se tiene en particular que

$$x_3 \in X \setminus \{x_1, s_2, x_4, \dots, x_n\}$$

Ya que $X \setminus \{x_1, s_2, x_4, \dots, x_n\}$ es arco-conexo, entonces existe un camino $\alpha_3 : [0, 1] \rightarrow X \setminus \{x_1, s_2, x_4, \dots, x_n\}$ tal que $\alpha_3(0) = x_3$, $\alpha_3(1) = s_3$. Consideremos ahora el siguiente camino:

$$\tilde{\alpha}_3(t) = (x_1, s_2, \alpha_3(t), \dots, x_n)$$

Ya que $\alpha_3(t) \neq x_i$ y $\alpha_3(t) \neq s_2$ para todo t , se sigue que $\tilde{\alpha}_3(t)$ es un camino en $\text{Conf}_n(X)$ tal que

$$\tilde{\alpha}_3(0) = (x_1, s_2, x_3, x_4, \dots, x_n) \quad \tilde{\alpha}_3(1) = (x_1, s_2, s_3, x_4, \dots, x_n)$$

Podemos seguir este proceso de manera inductiva y construir un camino $\tilde{\alpha}_n(t)$ en $\text{Conf}_n(X)$ que comience en $(x_1, s_2, \dots, s_{n-1}, x_n)$ y termine en $(x_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$, donde además cada s_j es distinto de cada y_i y de x_1 y $s_i \neq s_j$ si $i \neq j$. Con esto, hemos construido un camino en $\text{Conf}_n(X)$ que comienza en (x_1, \dots, x_n) y termina en (x_1, s_2, \dots, s_n) , a saber, $\beta = \tilde{\alpha}_1 * \dots * \tilde{\alpha}_n$.

Ahora bien, como $X \setminus \{s_2, \dots, s_n\}$ es también arco-conexo, y además $x_1, y_1 \in X \setminus \{s_2, \dots, s_n\}$, se sigue que existe $\beta_1 : [0, 1] \rightarrow X \setminus \{s_2, \dots, s_n\}$ tal que $\beta_1(0) = x_1$ y $\beta_1(1) = y_1$. Ya que cada $\beta_1(t) \neq s_i$, entonces el camino $\tilde{\beta}_1(t) = (\beta_1(t), s_2, \dots, s_n)$ está contenido en $\text{Conf}_n(X)$. Además $\tilde{\beta}_1$ comienza en (x_1, s_2, \dots, s_n) y termina en (y_1, s_2, \dots, s_n) .

Luego, como $X \setminus \{y_1, s_3, \dots, s_n\}$ es arco-conexo y

$$y_2, s_2 \in X \setminus \{y_1, s_3, \dots, s_n\}$$

entonces existe β_2 que comienza en s_2 y termina en y_2 . De manera similar, el camino $\tilde{\beta}_2(t) = (y_1, \beta_2(t), s_3, \dots, s_n)$ está contenido en $\text{Conf}_n(X)$, comienza en $(y_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$ y termina en $(y_1, y_2, s_3, \dots, s_n)$. Podemos continuar este proceso de manera inductiva y construir un camino $\tilde{\beta}_n$ en $\text{Conf}_n(X)$ que comience en $(y_1, \dots, y_{n-1}, s_n)$ y termine en (y_1, \dots, y_n) . Por tanto, hemos construido ahora un camino en $\text{Conf}_n(X)$ de (x_1, s_2, \dots, s_n) a (y_1, \dots, y_n) , a saber, $\tilde{\gamma} = \tilde{\beta}_1 * \dots * \tilde{\beta}_n$. Finalmente, también hemos construido un camino en $\text{Conf}_n(X)$ de (x_1, \dots, x_n) a (y_1, \dots, y_n) , dado por $\gamma = \beta * \tilde{\gamma}$.

Esto muestra el resultado deseado. ■

Corolario 1.5.4. *Si X es una variedad topológica arco-conexa de dimensión mayor que 1, entonces $\text{Conf}_k(X)$ es arco-conexo para todo $k \geq 1$.*

Proposición 1.5.5. *Si X es un espacio de Hausdorff localmente arco-conexo entonces $\text{Conf}_k(X)$ también es localmente arco-conexo.*

Demostración: Sea $x = (x_1, \dots, x_k) \in \text{Conf}_k(X)$ y U abierto de $\text{Conf}_k(X)$ tal que $x \in U$. Ya que el espacio $\text{Conf}_k(X)$ es abierto en X^k , se sigue que U también es abierto en X^k . Sean U_1, \dots, U_n abiertos de X tales que $U_1 \times \dots \times U_n \subset U$ y $x_i \in U_i$. Podemos suponer además que estos abiertos son tales que $U_i \cap U_j = \emptyset$ usando un argumento como en la proposición 1.5.2. Ya que X es localmente arco-conexo, existen V_1, \dots, V_n abiertos en X y arco-conexos tales que $V_i \subset U_i$ y $x_i \in V_i$. Finalmente, considerando al abierto $V = V_1 \times \dots \times V_k$ se tiene que V es arco-conexo y $x \in V \subset U$, así que $\text{Conf}_k(X)$ es localmente arco-conexo. ■

Ya que los grupos $U(n)$, $SU(n)$ ó $Sp(n)$ son espacios de Hausdorff localmente arco-conexos entonces $\text{Conf}_k(U(n))$, $\text{Conf}_k(SU(n))$ y $\text{Conf}_k(Sp(n))$ son localmente arco-conexos.

Proposición 1.5.6. *Si G es un grupo topológico, entonces para $k \geq 2$ se tiene que $\text{Conf}_k(G) \cong G \times \text{Conf}_{k-1}(G - \{e\})$.*

Demostración: Consideremos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \phi : \text{Conf}_k(G) &\longrightarrow G \times \text{Conf}_{k-1}(G - \{e\}) \\ (g_1, \dots, g_k) &\mapsto (g_1, (g_2g_1^{-1}, \dots, g_kg_1^{-1})) \\ \varphi : G \times \text{Conf}_{k-1}(G - \{e\}) &\longrightarrow \text{Conf}_k(G) \\ (x, (x_1, \dots, x_{k-1})) &\mapsto (x, x_1x, \dots, x_{k-1}x) \end{aligned}$$

Es claro que estas funciones son continuas y se encuentran bien definidas. Además, son tales que $\phi \circ \varphi = 1$ y $\varphi \circ \phi = 1$. ■

Proposición 1.5.7. *Si $X \cong Y$, entonces $\text{Conf}_k(X) \cong \text{Conf}_k(Y)$ para $k \geq 2$.*

Demostración: Ya que $X \cong Y$ entonces existen $f : X \rightarrow Y$ y $f^{-1} : Y \rightarrow X$ que son continuas y una inversa de la otra. Consideremos entonces las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}\tilde{f} : \text{Conf}_k(X) &\longrightarrow \text{Conf}_k(Y) \\ (x_1, \dots, x_k) &\mapsto (f(x_1), \dots, f(x_k)) \\ \tilde{f}^{-1} : \text{Conf}_k(Y) &\longrightarrow \text{Conf}_k(X) \\ (y_1, \dots, y_k) &\mapsto (f^{-1}(y_1), \dots, f^{-1}(y_k))\end{aligned}$$

La función \tilde{f} está bien definida, ya que si $x_i \neq x_j$ entonces $f(x_i) \neq f(x_j)$. De manera similar, \tilde{f}^{-1} también está bien definida. Finalmente, es claro que las funciones \tilde{f} y \tilde{f}^{-1} son continuas y una inversa de la otra. ■

El espacio $\text{Conf}_k(X)$ no es un invariante homotópico, ya que si consideramos el conjunto que contiene a un punto \bullet , se tiene que $\mathbb{R} \simeq \bullet$, sin embargo $\text{Conf}_2(\bullet) = \emptyset$ y

$$\text{Conf}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, a) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R}\} \simeq \bullet \sqcup \bullet$$

Como hemos comentado en la introducción, Fadell y Neuwirth [13] probaron la existencia de la fibración

$$\begin{aligned}\text{Conf}_{k-1}(X - \{x_1\}) &\longrightarrow \text{Conf}_k(X) \longrightarrow X \\ (x_1, \dots, x_k) &\mapsto x_1\end{aligned}$$

cuando X es una variedad topológica. Sin embargo, se ha probado de manera más general que las proyecciones

$$\begin{aligned}\text{Conf}_{k-r}(X - \{a_1, \dots, a_r\}) &\longrightarrow \text{Conf}_k(X) \longrightarrow \text{Conf}_r(X) \\ (x_1, \dots, x_k) &\mapsto (x_1, \dots, x_r)\end{aligned}$$

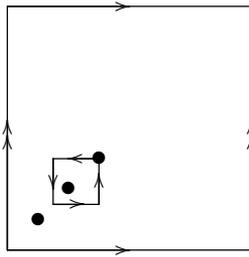
donde $r < k$ y $(a_1, \dots, a_r) \in \text{Conf}_r(X)$, también son fibraciones cuando X es una variedad topológica (ver Teorema 1.1 de [12]), todas conocidas como fibraciones de Fadell y Neuwirth.

1.6. Grupo fundamental de $\text{Conf}_3(T)$

Aquí mostramos la presentación del grupo fundamental de $\text{Conf}_3(T)$ dada por Birman [4]. Esta sección nos será de utilidad en el capítulo 4, donde estaremos calculando las cohomologías de las configuraciones de

tuplas que conmutan de algunos grupos.

Consideraremos al toro como $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y denotaremos un punto de T por sus coordenadas (u, v) , donde $u, v \in [0, 1]$. Sean $x_1 = (1/8, 1/8)$, $x_2 = (2/8, 2/8)$, $x_3 = (3/8, 3/8)$ y γ la curva ilustrada en la siguiente figura:



Consideremos los siguientes lazos en $\text{Conf}_3(T)$:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= (x_1 - (t, 0), x_2 - (t, 0), x_3 - (t, 0)) \\ a_2(t) &= (x_1, x_2 - (t, 0), x_3 - (t, 0)) \\ a_3(t) &= (x_1, x_2, x_3 - (t, 0)) \\ b_1(t) &= (x_1 - (0, t), x_2 - (0, t), x_3 - (0, t)) \\ b_2(t) &= (x_1, x_2 - (0, t), x_3 - (0, t)) \\ b_3(t) &= (x_1, x_2, x_3 - (0, t)) \\ B_{23}(t) &= (x_1, x_2, \gamma(t)) \end{aligned}$$

Teorema 1.6.1 (Teorema 5 de [4]). *El grupo $\pi_1(\text{Conf}_3(T), (x_1, x_2, x_3))$ admite una presentación con generadores $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, B_{23}$ y las siguientes relaciones:*

$$\begin{aligned} [a_i, a_j] &= [b_i, b_j] = 1 \\ [a_i, B_{23}] &= [b_i, B_{23}] = 1 & i = 1, 2 \\ [b_3, a_3 a_2^{-1}] &= [b_3 b_2^{-1}, a_3] = B_{23} \\ [a_1, b_i] &= [b_1, a_i] = 1 \end{aligned}$$

Ahora bien, el homeomorfismo

$$\begin{aligned} f : \text{Conf}_3(T) &\longrightarrow T \times \text{Conf}_2(T - \{1\}) \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1, (x_2 x_1^{-1}, x_3 x_1^{-1})) \end{aligned}$$

induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(\text{Conf}_3(T)) &\longrightarrow \pi_1(T \times \text{Conf}_2(T - \{1\})) \\ [\alpha] &\mapsto [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

Este isomorfismo manda los generadores a_i, b_i, B_{23} a los siguientes generadores en $\pi_1(T \times \text{Conf}_2(T - \{1\}))$:

$$\begin{aligned} f_*([a_1(t)]) &= [(x_1 - (t, 0), (x_2 - x_1, x_3 - x_1))] \\ f_*([a_2(t)]) &= [(x_1, (x_2 - x_1 - (t, 0), x_3 - x_1 - (t, 0)))] \\ f_*([a_3(t)]) &= [(x_1, (x_2 - x_1, x_3 - x_1 - (t, 0)))] \\ f_*([b_1(t)]) &= [(x_1 - (0, t), (x_2 - x_1, x_3 - x_1))] \\ f_*([b_2(t)]) &= [(x_1, (x_2 - x_1 - (0, t), x_3 - x_1 - (0, t)))] \\ f_*([b_3(t)]) &= [(x_1, (x_2 - x_1, x_3 - x_1 - (0, t)))] \\ f_*([B_{23}(t)]) &= [(x_1, (x_2 - x_1, \gamma(t) - x_1))] \end{aligned}$$

donde estos generadores también satisfacen las condiciones respectivas del Teorema 1.6.1. Así que también se tiene una presentación del grupo fundamental de $\text{Conf}_2(T - \{1\})$, como lo mostramos en el siguiente teorema.

Teorema 1.6.2. *El grupo $\pi_1(\text{Conf}_2(T - \{1\}))$ admite una presentación con generadores $\tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$ y las siguientes relaciones:*

$$\begin{aligned} [\tilde{a}_2, \tilde{a}_3] &= [\tilde{b}_2, \tilde{b}_3] = 1 \\ [\tilde{a}_2, \tilde{B}_{23}] &= [\tilde{b}_2, \tilde{B}_{23}] = 1 \\ [\tilde{b}_3, \tilde{a}_3 \tilde{a}_2^{-1}] &= [\tilde{b}_3 \tilde{b}_2^{-1}, \tilde{a}_3] = \tilde{B}_{23} \end{aligned}$$

Demostración: Se tiene el siguiente isomorfismo:

$$\begin{aligned} \pi_1(T \times \text{Conf}_2(T - \{1\})) &\longrightarrow \pi_1(T) \times \pi_1(\text{Conf}_2(T - \{1\})) \\ [\alpha] &\mapsto ([\alpha_1], [\alpha_2]) \end{aligned}$$

donde $\alpha : I \longrightarrow T \times \text{Conf}_2(T - \{1\})$ con $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$. Este isomorfismo manda los generadores de $f_*(a_i), f_*(b_i)$ a los generadores en $\pi_1(T)$ mediante la proyección a la primera coordenada, y a los $f_*(a_i), f_*(b_i), f_*(B_{23})$ restantes mediante la proyección a la segunda coordenada a los generadores $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i, \tilde{B}_{23}$ deseados en $\pi_1(\text{Conf}_2(T - \{1\}))$. ■

Observemos que los generadores de $\pi_1(\text{Conf}_2(T - \{1\}))$ tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_2(t) &= (y_1 - (t, 0), y_2 - (t, 0)) \\ a_3(t) &= (y_1, y_2 - (t, 0)) \\ b_2(t) &= (y_1 - (0, t), y_2 - (0, t)) \\ b_3(t) &= (y_1, y_2 - (0, t)) \\ B_{23}(t) &= (y_1, \tilde{\gamma}(t)) \end{aligned}$$

donde $y_1 = (1/8, 1/8)$, $y_2 = (2/8, 2/8)$ y $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) - (1/8, 1/8)$.

1.7. Espacios de tuplas que conmutan

Los espacios de tuplas que conmutan son el otro espacio con el que se obtienen las configuraciones de tuplas que conmutan, así que aquí introducimos esta sección para familiarizarnos con ellos.

Definición 1.7.1. *Sea G un grupo de Lie. Definimos el espacio de k -tuplas que conmutan como el siguiente conjunto:*

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G) = \{f : \mathbb{Z}^k \longrightarrow G \mid f \text{ es homomorfismo}\}$$

Este espacio es un espacio topológico con la siguiente topología: dado un homomorfismo $f \in \text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$, podemos asociar a este homomorfismo un elemento de $G^k = G \times \dots \times G$, de la siguiente manera:

$$f \mapsto (f(e_1), \dots, f(e_k))$$

Esta k -tupla satisface además para cada i, j :

$$f(e_i) \cdot f(e_j) = f(e_i + e_j) = f(e_j + e_i) = f(e_j) \cdot f(e_i)$$

Esto es, las coordenadas de la k -tupla conmutan entre sí. Recíprocamente, si se tiene una k -tupla (g_1, \dots, g_k) tal que $g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i$, entonces podemos considerar el homomorfismo $f : \mathbb{Z}^k \longrightarrow G$ que se obtiene al extender por linealidad la condición $f(e_i) = g_i$. Explícitamente:

$$\begin{aligned} f(z_1, \dots, z_k) &= f(z_1 \cdot e_1 + \dots + z_k \cdot e_k) \\ &= f(z_1 \cdot e_1) \cdot \dots \cdot f(z_k \cdot e_k) \\ &= f(e_1)^{z_1} \cdot \dots \cdot f(e_k)^{z_k} \\ &= g_1^{z_1} \cdot \dots \cdot g_k^{z_k} \end{aligned}$$

La igualdad $g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i$ permite que f sea un homomorfismo, pues de $e_i + e_j = e_j + e_i$ se tiene:

$$\begin{aligned} g_i \cdot g_j &= f(e_i) \cdot f(e_j) = f(e_i + e_j) \\ &= f(e_j + e_i) = f(e_j) \cdot f(e_i) = g_j \cdot g_i \end{aligned}$$

Con esto, podemos identificar al conjunto $\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$ con el siguiente subconjunto de G^k :

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G) = \{(g_1, \dots, g_k) \in G^k \mid g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i\}$$

Ahora bien, ya que G es un grupo de Lie, en particular es un espacio topológico y así G^k también es un espacio topológico con la topología producto. Con esto, dotamos al espacio $\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$ de la topología subespacio de G^k .

Proposición 1.7.2. *El espacio $\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$ es cerrado en G^k .*

Demostración: Consideremos la siguiente función:

$$\begin{aligned} f_{i,j} : G^k &\longrightarrow G \\ (g_1, \dots, g_k) &\mapsto g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1} \end{aligned}$$

Se tiene que $f_{i,j}$ es continua, pues al ser G un grupo de Lie, el producto y la inversa son funciones continuas. Por lo tanto, $A_{i,j} = f_{i,j}^{-1}(e)$ es cerrado, donde e es la identidad de G . Por último, se tiene la siguiente igualdad:

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G) = \bigcap_{i,j} A_{i,j}$$

Y ya que cada $A_{i,j}$ es cerrado entonces también lo es $\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$. ■

Si G es un grupo de Lie, entonces G es de Hausdorff, se sigue entonces que G^k es también un espacio de Hausdorff. Finalmente, como los espacios $\text{Conf}_k(G)$ y $\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$ son subespacios de G^k , se sigue que estos espacios también son de Hausdorff.

Proposición 1.7.3. *Si $G = U(n)$, $SU(n)$ ó $Sp(n)$ entonces el espacio $\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$ consta de justamente aquellas tuplas (g_1, \dots, g_k) tales que los elementos g_i pertenecen a un mismo toro maximal.*

Demostración: Si $(g_1, \dots, g_k) \in \text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$ entonces $g_i g_j = g_j g_i$ y por lo tanto el subgrupo $\langle g_1, \dots, g_k \rangle$ es abeliano, con lo cual, la Proposición 1.1.10 indica que existe T tal que $\langle g_1, \dots, g_k \rangle \subset T$, por lo tanto,

$g_i \in T$. La otra inclusión es clara. ■

Sea G un grupo compacto de Lie y T un toro maximal de G . Consideremos la siguiente función:

$$\begin{aligned} \varphi : G \times T^k &\longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G) \\ (g, (t_1, \dots, t_k)) &\mapsto (gt_1g^{-1}, \dots, gt_kg^{-1}) \end{aligned}$$

Veamos a continuación que esta función se encuentra bien definida: dados $g \in G$ y $(t_1, \dots, t_k) \in T^k$ se tiene debido a la conmutatividad en T que

$$\begin{aligned} (gt_i g^{-1}) \cdot (gt_j g^{-1}) &= gt_i t_j g^{-1} \\ &= gt_j t_i g^{-1} = (gt_j g^{-1}) \cdot (gt_i g^{-1}) \end{aligned}$$

Esto es, las coordenadas conmutan entre sí, por lo tanto,

$$(gt_1 g^{-1}, \dots, gt_k g^{-1}) \in \text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$$

y así φ está bien definida. Claramente la función φ también es una función continua, pues el producto y la inversa en G son continuas.

1.8. Sobre representaciones

En esta sección hablaremos un poco de representaciones, que son herramientas que usamos en los capítulos 4 y 5.

Definición 1.8.1. *Una representación de un grupo finito G sobre un espacio vectorial V de dimensión finita, es un homomorfismo de grupos $\rho : G \longrightarrow GL(V)$.*

Una representación otorga a V una estructura de G -módulo de la siguiente manera: $gv = (\rho(g))(v)$.

Definición 1.8.2. *Sean V y W representaciones de G . Un morfismo entre tales representaciones es una transformación lineal $\phi : V \longrightarrow W$ que es equivariante. Si existe un morfismo ϕ^{-1} que es inverso de ϕ , entonces decimos que V y W son equivalentes.*

Definición 1.8.3. *Una subrepresentación de una representación V es un subespacio vectorial W de V que es invariante bajo G . Si no existe ningún subespacio invariante no trivial y propio de V , decimos que V es irreducible.*

Si V y W son representaciones, entonces también lo son $V \oplus W$ y $V \otimes W$ mediante:

$$g(v \oplus w) = gv \oplus gw \qquad g(v \otimes w) = gv \otimes gw$$

Proposición 1.8.4. *Si W es una subrepresentación de V , entonces existe un subespacio invariante \tilde{W} tal que $V = W \oplus \tilde{W}$.*

Demostración: Sea U un subespacio complementario a W , esto es, tal que $V = W \oplus U$. Consideremos $\pi_0 : V \rightarrow W$ la proyección sobre W en la suma directa. Consideremos π como

$$\begin{aligned} \pi : V &\longrightarrow W \\ v &\longmapsto \sum_{g \in G} g\pi_0(g^{-1}v) \end{aligned}$$

Es fácil verificar que es una transformación lineal. Además, si $h \in G$ entonces

$$\begin{aligned} \pi(hv) &= \sum_{g \in G} g\pi_0(g^{-1}hv) \\ &= \sum_{g \in G} hg\pi_0(g^{-1}v) = h\pi(v) \end{aligned}$$

Esto es, π es G -equivariante. En particular, $\ker(\pi)$ es un subespacio invariante bajo G . Por otro lado, si $w \in W$, teniendo en cuenta que W es invariante bajo G , se tiene que

$$\pi(w) = \sum_{g \in G} g\pi_0(g^{-1}w) = \sum_{g \in G} w = |G|w$$

En particular, $\pi(w) \neq 0$ si $w \neq 0$. Así que $W \cap \ker(\pi) = 0$. Finalmente, ya que $\dim(\text{Im}(\pi)) = \dim(W)$ entonces

$$\dim(V) = \dim(\ker(\pi)) + \dim(W)$$

con lo cual, $V = W \oplus \ker(\pi)$. Siendo $\ker(\pi)$ el subespacio deseado. ■

Para el grupo $G = \mathbb{Z}_2 = \{1, \sigma\}$ se tienen las representaciones trivial y alternante que están respectivamente determinadas mediante:

$$\sigma \cdot x = x \qquad \sigma \cdot x = -x$$

Denotaremos por 1 y σ respectivamente a estas representaciones. En la siguiente proposición mostramos que todas las representaciones racionales de \mathbb{Z}_2 se descomponen en estas representaciones.

Proposición 1.8.5. *Cualquier representación racional V de dimensión finita de \mathbb{Z}_2 , es equivalente a una suma directa de las representaciones 1 y σ .*

Demostración: Pongamos $\mathbb{Z}_2 = \{1, \tau\}$. Si $\dim(V) = 1$ entonces de $\tau(\tau x) = x$ se sigue que $V = 1$ ó $V = \sigma$. Supongamos ahora que $\dim(V) = 2$ y pongamos $\tau(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. Con esto se tiene que

$$\begin{aligned} \tau(ax + by, cx + dy) &= ((a^2 + bc)x + (ab + bd)y, \\ &\quad (ac + cd)x + (bc + d^2)y) \end{aligned}$$

Ya que necesariamente $\tau(\tau(x, y)) = (x, y)$, entonces

$$\begin{aligned} a^2 + bc &= 1 & c(a + d) &= 0 \\ b(a + d) &= 0 & bc + d^2 &= 1 \end{aligned}$$

Podemos analizar cada uno de los casos posibles; si $b = 0$ entonces

$$a = d = \pm 1 \text{ y } c = 0 \quad \text{ó} \quad a = -d = \pm 1 \text{ y } c \in \mathbb{Q}$$

En el primer caso se tiene que $\tau(x, y) = (x, y)$ ó $\tau(x, y) = (-x, -y)$, con lo cual $V \cong 2$ ó $V \cong 2\sigma$. En el segundo caso se tiene $\tau(x, y) = (x, cx - y)$. Si $c = 0$ entonces claramente $V \cong 1 \oplus \sigma$. Mientras que si $c \neq 0$, entonces V tiene por puntos fijos a los de la forma $(2y/c, y)$, así que $V \cong \mathbb{Q}(2/c, 1) \oplus \mathbb{Q}(0, 1) \cong 1 \oplus \sigma$. En cada uno de los casos restantes puede realizarse el mismo análisis y encontrarse subespacios W_1 y W_2 invariantes bajo \mathbb{Z}_2 y equivalentes al trivial o al alternante tales que $V \cong W_1 \oplus W_2$. Así que el enunciado también es válido en este caso.

Si $\dim(V) \geq 3$, entonces podemos considerar al subespacio de los puntos fijos $V^{\mathbb{Z}_2}$. Por la Proposición 1.8.4, existe un subespacio W invariante bajo \mathbb{Z}_2 tal que $V \cong \dim(V^{\mathbb{Z}_2})1 \oplus W$. En particular

$$\dim(W) = \dim(V) - \dim(V^{\mathbb{Z}_2})$$

Ahora bien, consideremos $w \in W$. Se tienen los siguientes dos casos;

$$\tau w = rw \text{ con } r \in \mathbb{Q} \quad \text{ó} \quad w \text{ y } \tau w \text{ son linealmente independientes,}$$

donde $\tau w \in W$. Si $\tau w = rw$ entonces necesariamente $\langle w \rangle \cong \sigma$, pues de lo contrario, w sería un punto fijo. Si w y τw son linealmente independientes entonces $\dim(\langle w, \tau w \rangle) = 2$, así que por el caso previo, necesariamente $\langle w, \tau w \rangle \cong 2\sigma$, pues W no tiene puntos fijos. Si $\dim(W) \leq 2$ entonces ya habríamos terminado. En el caso contrario, tomamos $\tilde{w} \in W$ tal que $\tilde{w} \notin \langle w, \tau w \rangle$ y repetimos el argumento previo. Ya que $\dim(W)$ es un natural, este procedimiento acaba. ■

Del argumento en la demostración anterior podemos obtener el siguiente corolario.

Corolario 1.8.6. *Cualquier representación racional V de dimensión finita de \mathbb{Z}_2 es tal que*

$$V \cong \dim(V^{\mathbb{Z}_2})1 \oplus (\dim(V) - \dim(V^{\mathbb{Z}_2}))\sigma$$

Lema 1.8.7. *Si 1 y σ son las representaciones trivial y alternante respectivamente, entonces*

$$1 \otimes 1 \cong 1 \qquad 1 \otimes \sigma \cong \sigma \qquad \sigma \otimes \sigma \cong 1$$

Además, si $[m1 \oplus n\sigma]^{\mathbb{Z}_2}$ denota al subespacio de los puntos fijos en la representación de \mathbb{Z}_2 sobre $m1 \oplus n\sigma$, entonces $[m1 + n\sigma]^{\mathbb{Z}_2} \cong \mathbb{Q}^m$.

Demostración: Se tiene que el isomorfismo $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$ viene dado por $x \otimes y \mapsto xy$. Así que cada representación resultante de los productos tensoriales corresponde a la multiplicación de los signos. Por último, la acción de \mathbb{Z}_2 sobre $m1 \oplus n\sigma$ es tal que

$$\sigma(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m, -x_{m+1}, \dots, -x_n)$$

Así que los puntos fijos bajo esta acción corresponden a los de la forma $(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$, con lo cual, se tiene el resultado deseado. ■

Finalizamos esta sección con la siguiente proposición que nos será de utilidad en los cálculos del capítulo 4.

Proposición 1.8.8. *Las representaciones de \mathbb{Z}_2 sobre \mathbb{Q}^2 que están dadas por*

$$\sigma(x, y) = (y, x) \qquad \sigma(x, y) = (-y, -x)$$

son isomorfas a la representación $1 \oplus \sigma$.

Demostración: Basta notar que los puntos fijos de estas representaciones son de la forma (a, a) y $(a, -a)$ respectivamente y usar el Corolario 1.8.6. ■

Capítulo 2

Cohomología

El objetivo de esta sección es desarrollar la teoría con la que se obtienen las herramientas para calcular grupos de cohomología racional de las configuraciones de tuplas que conmutan. Es una elaboración de los resultados publicados por Baird en [3].

2.1. Hazes principales cohomológicos

Sean $f : X \rightarrow Y$ una función continua y τ un grupo topológico que actúa libremente sobre X por la derecha, tal que $X \rightarrow X/\tau$ es un haz principal. Para el lector interesado en el tema de haces principales, una referencia es [20].

Definición 2.1.1. Decimos que $(f : X \rightarrow Y, \tau)$ es un haz principal cohomológico para la teoría cohomológica H si:

- i) f es suprayectiva y cerrada.
- ii) f desciende a través de la función cociente a una función h :

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \pi \downarrow & \searrow f & \\ X/\tau & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

- iii) $H(h^{-1}(y)) \cong H(pt)$ para toda $y \in Y$.

Proposición 2.1.2. Si $(f : X \rightarrow Y, \tau)$ es un haz principal cohomológico, entonces h también es suprayectiva y cerrada.

Demostración: Claramente h es suprayectiva pues f lo es. Veamos que es cerrada. Sea $A \subset X/\tau$ cerrado, luego entonces $\pi^{-1}(A) \subset X$ es cerrado y ya que f es cerrada, se sigue que $f(\pi^{-1}(A)) \subset Y$ también es cerrado. Finalmente, ya que $f = h \circ \pi$ y π es suprayectiva se sigue que

$$f(\pi^{-1}(A)) = h(\pi(\pi^{-1}(A))) = h(A)$$

es cerrado, con lo cual, h es una función cerrada. ■

Teorema 2.1.3 (Teorema 2.1 de [3]). *Sea $h : Z \rightarrow Y$ una función suprayectiva y cerrada, donde Z es un espacio paracompacto de Hausdorff. Supongamos que $H^*(h^{-1}(y); F) \cong H^*(pt; F)$ para todo $y \in Y$. Entonces $h^* : H^*(Y; F) \rightarrow H^*(Z; F)$ es un isomorfismo.*

Para los resultados siguientes supondremos que τ es un grupo finito y que F es un campo tal que $\text{char}(F)$ no divide a $\#\tau$.

Teorema 2.1.4 (Teorema 2.2 de [3]). *Sean X un espacio topológico sobre el que el grupo τ actúa y $\pi : X \rightarrow X/\tau$ la función cociente. Entonces*

$$\pi^*(H^*(X/\tau; F)) \subset H^*(X; F)^\tau$$

y más aún, $\pi^* : H^*(X/\tau; F) \rightarrow H^*(X; F)^\tau$ es un isomorfismo.

Proposición 2.1.5. *Sea X un espacio de Hausdorff paracompacto sobre el que el grupo τ actúa libremente. Si $(f : X \rightarrow Y, \tau)$ es un haz principal cohomológico para $H^*(\ ; F)$, entonces f induce un isomorfismo $f^* : H^*(Y; F) \rightarrow H^*(X; F)^\tau$.*

Demostración: Ya que X es un espacio de Hausdorff paracompacto entonces X/τ también lo es. Como $(f : X \rightarrow Y, \tau)$ es un haz principal cohomológico, entonces h es suprayectiva y cerrada por la Proposición 2.1.2. Además es tal que $H^*(h^{-1}(y); F) \cong H^*(pt; F)$ para toda y , esto es, h satisface las condiciones del Teorema 2.1.3, con lo cual,

$$h^* : H^*(Y; F) \xrightarrow{\cong} H^*(X/\tau; F)$$

Por otro lado, de la Proposición 2.1.4 se sigue que

$$\pi^* : H^*(X/\tau; F) \xrightarrow{\cong} H^*(X; F)^\tau$$

Finalmente, ya que $f^* = \pi^* \circ h^*$ se sigue que

$$f^* : H^*(Y; F) \xrightarrow{\cong} H^*(X; F)^\tau$$

■

Corolario 2.1.6 (Corolario 2.4 de [3]). *Sea τ un grupo compacto de Lie con N componentes conexas y τ_0 la componente de la identidad. Sea $(f : X \rightarrow Y, \tau)$ un haz cohomológico principal para $H^*(\ ; F)$, donde $\text{char}(F)$ no divide a N y X es un espacio de Hausdorff paracompacto. Entonces $H^*(Y; F) \cong H^*(X/\tau_0; F)^{\tau/\tau_0}$.*

Demostración: Observemos primero que si $t \in \tau_0$ y $x \in X$, entonces $f(x \cdot t) = f(x)$ ya que f desciende a X/τ , por lo tanto, f desciende a una función

$$\begin{aligned} g : X/\tau_0 &\longrightarrow Y \\ [x] &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Consideremos ahora la siguiente acción:

$$\begin{aligned} X/\tau_0 \times \tau/\tau_0 &\longrightarrow X/\tau_0 \\ ([x], t\tau_0) &\mapsto [x \cdot t] \end{aligned}$$

Esta acción está bien definida pues τ_0 es normal en τ . Veamos ahora que $(g : X/\tau_0 \rightarrow Y, \tau/\tau_0)$ es un haz principal cohomológico. Ya que f es suprayectiva y cerrada, se sigue entonces que g también lo es. Además si $[y] = [x] \cdot t\tau_0$ entonces $g([y]) = f(x \cdot t) = f(x) = g([x])$, con lo cual, g desciende a una función $\tilde{h} : \frac{X/\tau_0}{\tau/\tau_0} \rightarrow Y$. Finalmente, ya que

$$\begin{aligned} \varphi : X/\tau &\longrightarrow \frac{X/\tau_0}{\tau/\tau_0} \\ [x]_\tau &\mapsto [[x]] \end{aligned}$$

es un homeomorfismo tal que $h = \tilde{h} \circ \varphi$, se sigue que

$$H^*(\tilde{h}^{-1}(y); F) \cong H^*(h^{-1}(y); F) \cong H^*(pt; F)$$

Por otro lado, el cociente $X \rightarrow X/\tau_0$ es un haz principal y por lo tanto una función cerrada, con lo cual X/τ_0 es paracompacto y de Hausdorff (ver 5.1.33 de [11]). Por último, ya que $\#(\tau/\tau_0) = N$ y por lo tanto $\text{char}(F)$ no divide al orden de τ/τ_0 , entonces la Proposición 2.1.5 nos da el resultado deseado. ■

2.2. Estabilizadores con un toro maximal

Para esta sección consideraremos G un grupo compacto y conexo, T un toro maximal de G y X un espacio en el que G actúa. Consideraremos

también que cada punto $x \in X$ se mantiene fijo bajo la acción de G por algún toro maximal de G .

Proposición 2.2.1. *Con las condiciones indicadas para esta sección, se tiene que la siguiente función es suprayectiva:*

$$\begin{aligned}\Phi : G \times X^T &\longrightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x\end{aligned}$$

Demostración: Sea $x \in X$. Luego por hipótesis se tiene que x está fijo bajo la acción de un toro maximal, digamos T' . Ya que los toros maximales son conjugados entre sí, se tiene que existe $g \in G$ tal que $gTg^{-1} = T'$. Con esto, dado $t \in T$, ya que $gtg^{-1} \in T'$, entonces $gtg^{-1} \cdot x = x$, de donde $tg^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot x$. Esto es, $g^{-1} \cdot x \in X^T$. Por lo tanto, $\Phi(gt, g^{-1} \cdot x) = gtg^{-1} \cdot x = x$, lo cual muestra lo deseado. ■

Lema 2.2.2. *Sea G un grupo topológico que actúa sobre un espacio de Hausdorff X , entonces*

$$X^T = \{x \in X \mid t \cdot x = x, \forall t \in T\}$$

es cerrado en X .

Demostración: Mostraremos que el complemento es abierto;

$$X \setminus X^T = \{x \in X \mid \text{existe } t \in T \text{ con } tx \neq x\}$$

Si $x \in X \setminus X^T$, entonces existe $t \in T$ tal que $L_t(x) = t \cdot x \neq x$. Ya que X es un espacio de Hausdorff se tiene que existen \tilde{U}, \tilde{V} abiertos disjuntos de x y $L_t(x)$ respectivamente. Consideremos entonces $U = \tilde{U} \cap L_t^{-1}(\tilde{V})$ el cual es un abierto no vacío, pues contiene a x . Finalmente, es claro que $U \subset \tilde{U}$ y $L_t(U) \subset \tilde{V}$, por lo tanto, $U \cap L_t(U) = \emptyset$. En conclusión, para todo $y \in U$ se tiene que $L_t(y) \neq y$ y así, $X \setminus X^T$ es abierto. ■

Lema 2.2.3. *Sean G compacto, X un espacio y $\pi : G \times X \longrightarrow X$ la proyección sobre X . Entonces π es una función cerrada.*

Demostración: Sea $C \subset G \times X$ cerrado. Mostraremos que $X \setminus \pi(C)$ es abierto. Sea $x \in X \setminus \pi(C)$. Dado $g \in G$, observemos que necesariamente

$(g, x) \notin C$ y por lo tanto como C es cerrado se tiene que existen abiertos $U_g \subset G$, $V_g \subset X$ tales que $(g, x) \in U_g \times V_g$ y $(U_g \times V_g) \cap C = \emptyset$. Así $\{U_g\}_{g \in G}$ es una cubierta abierta para G y ya que G es compacto, existe un número finito de los abiertos U_g que cubren a G , digamos U_{g_1}, \dots, U_{g_n} . Consideremos ahora $V = V_{g_1} \cap \dots \cap V_{g_n}$. Se tiene claramente que $x \in V$. Veamos que además $V \cap \pi(C) = \emptyset$. Supongamos que no fuese así, esto es, que existe $y \in V \cap \pi(C)$, entonces $G \times \{y\} \subset G \times V$, sin embargo,

$$(G \times \{y\}) \cap C = \pi^{-1}(y) \cap C \neq \emptyset$$

y ya que cada $U_{g_i} \times V \subset U_{g_i} \times V_{g_i}$ donde $(U_{g_i} \times V_{g_i}) \cap C = \emptyset$ entonces

$$\begin{aligned} (G \times V) \cap C &= ((U_{g_1} \cup \dots \cup U_{g_n}) \times V) \cap C \\ &= ((U_{g_1} \times V) \cup \dots \cup (U_{g_n} \times V)) \cap C \\ &= ((U_{g_1} \times V) \cap C) \cup \dots \cup ((U_{g_n} \times V) \cap C) = \emptyset \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. En conclusión, $x \in V \subset (X \setminus \pi(C))$ y así $X \setminus \pi(C)$ es abierto. ■

Proposición 2.2.4. *Si G es un grupo de Lie compacto que actúa sobre X entonces la función $\Psi : G \times X \longrightarrow X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ es cerrada.*

Demostración: Consideremos la siguiente función

$$\begin{aligned} \varphi : G \times X &\longrightarrow G \times X \\ (g, x) &\mapsto (g, gx) \end{aligned}$$

Esta función es continua y tiene por inversa a la función

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : G \times X &\longrightarrow G \times X \\ (g, x) &\mapsto (g, g^{-1}x) \end{aligned}$$

que también es continua, por lo tanto, φ es un homeomorfismo. Sea $\pi : G \times X \longrightarrow X$ la proyección sobre X . Dado $(g, x) \in G \times X$ se tiene que $\pi(\varphi(g, x)) = \pi(g, gx) = gx$, por lo tanto $\Psi = \pi \circ \varphi$. Ya que π es cerrada por el Lema 2.2.3 y además φ es cerrada, se sigue que Ψ también es cerrada. ■

Se puede dotar al espacio $G \times X^T$ de una acción por la derecha del normalizador $N_G(T)$ de la siguiente manera:

$$(G \times X^T) \times N_G(T) \longrightarrow G \times X^T$$

$$((g, x), n) \mapsto (gn, n^{-1} \cdot x)$$

Se encuentra bien definida, ya que si $x \in X^T$ y $t \in T$ entonces $ntn^{-1} \cdot x = x$ y así, $tn^{-1} \cdot x = n^{-1} \cdot x$, esto es, $n^{-1} \cdot x \in X^T$. Además, la acción también es libre, pues si $n \neq e$ entonces $gn \neq g$.

Esta acción induce una del grupo de Weyl de G sobre $G/T \times X^T$ de la siguiente manera:

$$(G/T \times X^T) \times W \longrightarrow G/T \times X^T$$

$$((gT, x), nT) \mapsto (gnT, n^{-1}x)$$

Veamos que no depende del representante de gT ; si $gT = g'T$ entonces $gt_1 = g'$ para algún $t_1 \in T$, y así, $n^{-1}t_1n = t_0$ para algún $t_0 \in T$. Luego $t_1n = nt_0$, con lo cual $gnt_0 = gt_1n$ y así $gnT = gt_1nT = g'nT$. De manera similar se puede ver que no depende del representante de nT . Por otro lado, también se encuentra bien definida sobre X^T ya que si $nT = mT$ entonces $n^{-1}T = m^{-1}T$. Por lo tanto, $m^{-1} = n^{-1}t$, con $t \in T$, entonces $m^{-1} \cdot x = n^{-1}t \cdot x$, y ya que $x \in X^T$, entonces $m^{-1} \cdot x = n^{-1} \cdot x$.

Finalmente, esta última acción induce una acción por la izquierda del grupo de Weyl sobre la cohomología $H^*(G/T \times X^T)$ de la siguiente manera: Dado $nT \in W$, consideremos la función

$$R_{nT} : G/T \times X^T \longrightarrow G/T \times X^T$$

$$(gT, x) \mapsto (gnT, n^{-1}x)$$

la cual está bien definida. Y consideremos la función inducida en cohomología:

$$R_{nT}^* : H^k(G/T \times X^T) \longrightarrow H^k(G/T \times X^T)$$

Definimos entonces la acción en cohomología como:

$$W \times H^k(G/T \times X^T) \longrightarrow H^k(G/T \times X^T)$$

$$(nT, x) \longrightarrow R_{nT}^*(x)$$

Podemos *descomponer* a la acción inicial en cada una de sus coordenadas, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} G/T \times W &\longrightarrow G/T \\ (gT, nT) &\mapsto gnT \\ X^T \times W &\mapsto X^T \\ (x, nT) &\mapsto n^{-1} \cdot x \end{aligned}$$

Ya que el isomorfismo dado por el teorema de Künneth es equivariante con respecto a acciones definidas coordenada a coordenada, podemos obtener la acción inducida en $H^k(G/T \times X^T)$ conociendo las acciones inducidas en $H^i(G/T)$ y en $H^i(X^T)$, para $0 \leq i \leq k$.

Lema 2.2.5. *Sea G actuando sobre X por la derecha y sea $x \in X^T$. Entonces $x \cdot g \in X^T$ si y sólo si $g \in G_x^0 N_G(T)$, donde G_x^0 es la componente de la identidad de G_x .*

Demostración: Si $x \cdot g \in X^T$ entonces $(x \cdot g) \cdot t = x \cdot g$ para toda $t \in T$ y de aquí $gTg^{-1} \subset G_x$. Ya que $T \subset G_x$ y tanto T como gTg^{-1} son conexos, entonces $T, gTg^{-1} \subset G_x^0$. Además como T es maximal en G entonces también lo es en G_x^0 , con lo cual gTg^{-1} también es maximal en G_x^0 . Así que existe $h \in G_x^0$ tal que $h(gTg^{-1})h^{-1} = T$, con lo cual, $hg \in N(T)$ y así $g \in G_x^0 N_G(T)$. Por otro lado, si $g \in G_x^0 N_G(T)$ entonces $g = hn$ con $h \in G_x^0$ y $n \in N(T)$, con lo cual,

$$\begin{aligned} x \cdot (gtg^{-1}) &= (x \cdot h) \cdot (ntn^{-1}h^{-1}) = (x \cdot (ntn^{-1})) \cdot h^{-1} \\ &= x \cdot h^{-1} = x \end{aligned}$$

y así $(x \cdot g) \cdot t = x \cdot g$, por lo tanto, $x \cdot g \in X^T$. ■

Proposición 2.2.6 (Proposición A.4 de [3]). *Sea G un grupo de Lie compacto y conexo con toro maximal T . Sea también F un campo tal que $\text{char}(F)$ no divide al orden de W_G . Se tiene entonces que*

$$H^*(G/N(T); F) \cong H^*(pt; F)$$

Recordemos que $\Phi : G \times X^T \longrightarrow X$ es la función $(g, x) \mapsto g \cdot x$ y que $N_G(T)$ actúa sobre $\Phi^{-1}(x) = \{(g, y) \in G \times X^T \mid g \cdot y = x\}$ mediante $(g, y) \cdot n = (gn, n^{-1}y)$.

Lema 2.2.7. *Si $\text{char}(F)$ no divide al orden de W_G , entonces para cada $x \in X$, $H^*(\Phi^{-1}(x)/N_G(T); F) \cong H^*(pt; F)$.*

Demostración: Sea $x \in X$. Ya que Φ es suprayectiva, se sigue que existe $(g, y) \in G \times X^T$ tal que $\Phi(g, y) = g \cdot y = x$. Observemos que $\Phi^{-1}(x) = \Phi^{-1}(g \cdot y) \cong \Phi^{-1}(y)$ mediante

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(x) &\longrightarrow \Phi^{-1}(y) \\ (h, z) &\rightarrow (g^{-1}h, z) \\ (gh, z) &\leftarrow (h, z) \end{aligned}$$

Además tales funciones son $N_G(T)$ -equivariantes, por lo tanto, podemos suponer de inicio que $x \in X^T$. Ahora bien, observemos que

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(x) &= \{(g, y) \mid g \cdot y = x\} = \{(g, y) \mid y \in X^T, g^{-1}x = y\} \\ &= \{(g, g^{-1}x) \mid g^{-1}x \in X^T\} \end{aligned}$$

Con el lema anterior podemos obtener el siguiente homeomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi : \Phi^{-1}(x) &\longrightarrow G_x^0 N(T) \\ (g, g^{-1}x) &\leftrightarrow g \end{aligned}$$

Si además consideramos que $N(T)$ actúa sobre $G_x^0 N(T)$ por la derecha mediante $g \cdot n = gn$ se tiene que φ es equivariante, ya que si $n \in N(T)$ entonces

$$\varphi((g, g^{-1}x) \cdot n) = \varphi(gn, n^{-1}g^{-1}x) = gn = \varphi(g, g^{-1}x) \cdot n$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(x)/N(T) &\cong G_x^0 N(T)/N(T) \\ &\cong G_x^0 / (G_x^0 \cap N(T)) \cong G_x^0 / N_{G_x^0}(T) \end{aligned}$$

Finalmente, ya que $\#W_{G_x^0}$ divide a $\#W_G$ entonces $\text{char}(F)$ no divide al orden de $W_{G_x^0}$ y así, de la Proposición 2.2.6 se tiene que

$$H^*(\Phi^{-1}(x)/N(T); F) \cong H^*(G_x^0/N_{G_x^0}(T); F) \cong H^*(pt; F) \quad \blacksquare$$

Teorema 2.2.8. *Sea G un grupo de Lie compacto y conexo con toro maximal T , que actúa en un espacio paracompacto de Hausdorff X . Supongamos que para cada punto $x \in X$, el grupo de isotropía G_x contiene un toro maximal de G . Entonces $(\Phi : G \times X^T \longrightarrow X, N(T))$ es un haz*

principal cohomológico para $H^*(\quad; F)$, donde $\text{char}(F)$ no divide al orden de W_G . En particular

$$H^*(X; F) \cong H^*(G/T \times X^T; F)^{W_G}$$

Demostración: Ya que X es de Hausdorff entonces por el Lema 2.2.2 se tiene que X^T es cerrado. Además como X es paracompacto entonces X^T también lo es. Ahora bien, la función

$$\begin{aligned} \Psi : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

es cerrada por el Lema 2.2.4, entonces Φ también lo es, al ser la restricción de una función cerrada en un subespacio cerrado. Por otro lado, de la Proposición 2.2.1, Φ también es suprayectiva. Con esto se tiene $i)$ de la Definición 2.1.1. Luego, si $n \in N(T)$ entonces

$$\begin{aligned} \Phi((g, x) \cdot n) &= \Phi(gn, n^{-1}x) = (gn) \cdot (n^{-1}x) \\ &= g \cdot x = \Phi(g, x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, Φ desciende a través del cociente $\tilde{\Phi} : (G \times X^T)/N(T) \longrightarrow X$. Por último, con el Lema 2.2.7 se tiene que

$$H^*(\tilde{\Phi}^{-1}(x); F) \cong H^*(\Phi^{-1}(x)/N(T); F) \cong H^*(pt; F)$$

Con lo cual, $(\Phi : G \times X^T \longrightarrow X, N(T))$ es un haz principal cohomológico. Ahora bien, con la Proposición 1.1.5 se tiene que

$$(G \times X^T)/N(T)_0 \cong (G \times X^T)/T$$

Luego se tiene el siguiente homeomorfismo

$$\begin{aligned} (G \times X^T)/T &\longrightarrow G/T \times X^T \\ [g, x] &\mapsto (gT, x) \end{aligned}$$

el cual además es equivariante bajo la misma acción de $W_G = N(T)/T$ sobre cada uno de los espacios. Finalmente, con el Corolario 2.1.6 se tiene

$$\begin{aligned} H^*(X; F) &\cong H^*((G \times X^T)/N(T)_0; F)^{N(T)/N(T)_0} \\ &\cong H^*(G/T \times X^T; F)^{W_G} \end{aligned}$$

■

Cabe mencionar que de la demostración puede verse que el isomorfismo $H^*(X; F) \cong H^*(G/T \times X^T; F)^{W_G}$ viene inducido por la función

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : G/T \times X^T &\longrightarrow X \\ (gT, x) &\mapsto \Phi(g, x) \end{aligned}$$

que es tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} H^*(X; F) & \xrightarrow[\cong]{\tilde{\Phi}} & H^*(G/T \times X^T; F)^{W_G} \\ & \searrow_{\cong}^{h^*} & \nearrow_{\cong}^{\pi^*} \\ & H^*(G/T \times_{W_G} X^T; F) & \end{array}$$

2.3. El W -módulo $H^*(G/T)$

Hemos comentado en la Sección 2.2 que hay una acción del grupo de Weyl de $SU(2)$ sobre $SU(2)/T$ dado por

$$\begin{aligned} SU(2)/T \times W &\longrightarrow SU(2)/T \\ (gT, nT) &\mapsto gnT \end{aligned}$$

que induce una acción de W sobre $H^*(SU(2))$. Ya que en la Sección 1.2 mostramos que $SU(2)/T \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$, podemos ver de manera explícita esta acción, y eso será lo que haremos en esta sección. En algunas ocasiones pasaremos a trabajar de acciones por la derecha a acciones por la izquierda o viceversa mediante $g \cdot x = x \cdot g^{-1}$.

Proposición 2.3.1. *La acción de $W \cong \mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ para que el homeomorfismo de la Proposición 1.2.3 sea equivariante corresponde a $\sigma \cdot z = 1/\bar{z}$ y $\sigma \cdot \infty = 0$.*

Demostración: Para que las funciones f y g sean equivariantes se tiene que cumplir que $f(\sigma \cdot g(z)) = \sigma \cdot z$, con lo cual, basta ver el resultado

de $f(\sigma \cdot g(z))$. Supongamos primero que $z \neq \infty$, entonces:

$$\begin{aligned}
 g(z) &= \begin{pmatrix} \frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} & \frac{\bar{z}}{\sqrt{1+|z|^2}} \end{pmatrix} \\
 \sigma \cdot g(z) &= \begin{pmatrix} \frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} & \frac{\bar{z}}{\sqrt{1+|z|^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} & \frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}} \\ -\frac{\bar{z}}{\sqrt{1+|z|^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \end{pmatrix} \\
 f(\sigma \cdot g(z)) &= \frac{-\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}}{\frac{\bar{z}}{\sqrt{1+|z|^2}}} = -\frac{1}{\bar{z}}
 \end{aligned}$$

Mientras que si $z = \infty$ entonces $f(\sigma \cdot g(z)) = 0$. ■

El Lema 1.2.4 transforma esta acción a la acción de \mathbb{Z}_2 sobre S^2 mediante $\sigma \cdot x = -x$. Por lo tanto, podemos considerar al W -espacio $SU(2)/T$ como a S^2 con la acción antipodal.

Ahora bien, la acción inducida sobre la cohomología $H^k(S^2)$ es la inducida por $1 : S^2 \rightarrow S^2$ y $\sigma : S^2 \rightarrow S^2$. Observemos que $H^k(S^2) = 0$ cuando $k \neq 0, 2$, por lo tanto, basta ver la inducida sobre $H^0(S^2) \cong \mathbb{Z}$ y $H^2(S^2) \cong \mathbb{Z}$. La función 1 induce la identidad tanto en H^0 como en H^2 , ya que 1 es la identidad sobre S^2 . Mientras que la función σ induce la identidad en H^0 ya que S^2 es arco-conexo, e induce $-1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto -x$ en H^2 , ya que $\sigma^*(1) = \deg(\sigma)$, y $\deg(\sigma)$ es el grado de la función antipodal, que corresponde al valor -1 cuando $n = 2$. En resumen, la acción inducida sobre H^k es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Z}_2 \times H^0(S^2) &\longrightarrow H^0(S^2) \\
 (\sigma, x) &\mapsto x \\
 \mathbb{Z}_2 \times H^2(S^2) &\longrightarrow H^2(S^2) \\
 (\sigma, x) &\mapsto -x
 \end{aligned}$$

En términos de representaciones de \mathbb{Z}_2 , se tiene:

$$H^0(S^2) = 1 \qquad H^2(S^2) = \sigma$$

Para $U(2)/T$ tenemos el siguiente resultado, donde denotaremos por S^1 al toro maximal estándar de $SU(2)$.

Proposición 2.3.2. *El homeomorfismo $i : SU(2)/S^1 \rightarrow U(2)/T$ de la Proposición 1.3.1 es equivariante. En particular*

$$U(2)/T \cong_{\mathbb{Z}_2} SU(2)/T$$

Demostración: Notemos que la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es un representante de σT en W tanto en $U(2)$ como en $SU(2)$, se sigue que si $A \in SU(2)$ entonces

$$\begin{aligned} i(AS^1) \cdot \sigma T &= AT \cdot \sigma T = A\sigma T \\ &= i(A\sigma S^1) = i(AS^1 \cdot \sigma S^1) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Como consecuencia de esta proposición se tiene que:

$$H^*(U(2)/T) \cong_{\mathbb{Z}_2} H^*(SU(2)/S^1)$$

De manera más general, Baird ha considerado lo siguiente:

Sea G un grupo de Lie, compacto y conexo que actúa sobre un espacio topológico X y sea EG un espacio universal para G . Con esto, G actúa por la derecha sobre EG y $BG = EG/G$ es un espacio clasificante para G . Además G también actúa sobre $EG \times X$ mediante $(e, x) \cdot g = (eg, g^{-1}x)$. Denotemos $X_G = EG \times_G X$ (el cociente) y consideremos el haz fibrado estándar

$$\begin{aligned} \pi : X_G &\longrightarrow BG \\ [e, x] &\mapsto p(e) \end{aligned}$$

donde $p : EG \rightarrow BG$ es el haz G -principal universal. Con esto, π induce el homomorfismo

$$\pi^* : H^*(BG; \mathbb{C}) \longrightarrow H^*(X_G; \mathbb{C})$$

Finalmente, denotemos por $\langle H_G^+ \rangle$ al ideal en $H^*(X_G; \mathbb{C})$ generado por la imagen del ideal de elementos de grado positivo en $H^*(BG; \mathbb{C})$ bajo π^* .

Baird ha dado una fórmula para la estructura de W -módulo $H^*(G/T; \mathbb{C})$ en términos de los conceptos aquí mencionados:

Proposición 2.3.3. *Como anillos graduados y W -módulos se tiene que*

$$H^*(G/T; \mathbb{C}) \cong H^*(BT; \mathbb{C}) / \langle H_T^+ \rangle$$

Capítulo 3

Configuraciones que conmutan

En este capítulo presentamos a las configuraciones de tuplas que conmutan. El espacio que resulta de la mezcla del espacio de configuraciones y el de tuplas que conmutan. En este capítulo mostraremos la definición y algunas de sus propiedades básicas, así como las componentes conexas en los casos $G = U(n)$, $SU(n)$ ó $Sp(n)$.

3.1. Definición y propiedades básicas

Definición 3.1.1. *Sea G un grupo de Lie. Definimos el espacio de configuraciones de k -tuplas que conmutan de G como el siguiente conjunto:*

$$\begin{aligned}\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G) &= \{(g_1, \dots, g_k) \in \text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G) \mid g_i \neq g_j \text{ si } i \neq j\} \\ &= \{(g_1, \dots, g_k) \in G^k \mid g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i, g_i \neq g_j \text{ si } i \neq j\}\end{aligned}$$

De manera similar a los espacios $\text{Conf}_k(G)$ y $\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$, el espacio $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ es un espacio topológico con la topología subespacio de G^k .

Observemos que se tiene la siguiente igualdad de conjuntos:

$$\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G) = \text{Conf}_k(G) \cap \text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$$

Teniendo en cuenta que $\text{Conf}_k(G)$ es abierto en G^k y $\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$ es cerrado también en G^k se tiene que $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ es cerrado en $\text{Conf}_k(G)$, y es abierto en $\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$.

54 CAPÍTULO 3. CONFIGURACIONES QUE CONMUTAN

El espacio $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ es de Hausdorff por ser un subespacio de un espacio de Hausdorff.

Ya que $\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$ es localmente contráctil (ver pág. 568 de [16]) entonces también es localmente arco-conexo. Por otro lado, $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ es abierto en $\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$, por lo tanto el espacio $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ es también localmente contráctil. En particular, $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ es localmente arco-conexo.

Usando la Proposición 1.7.3 podemos obtener también la siguiente caracterización.

Proposición 3.1.2. *Si G es uno de $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$ entonces el espacio $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ consta de justamente aquellas tuplas $(g_1, \dots, g_k) \in \text{Conf}_k(G)$ tales que los elementos g_i pertenecen a un mismo toro maximal.*

Sea G un grupo compacto de Lie y T un toro maximal de G , consideremos la siguiente función:

$$\begin{aligned} \Phi : G \times \text{Conf}_k(T) &\longrightarrow \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G) \\ (g, (t_1, \dots, t_k)) &\mapsto (gt_1g^{-1}, \dots, gt_kg^{-1}) \end{aligned}$$

Veamos a continuación que esta función se encuentra bien definida: dados $g \in G$ y $(t_1, \dots, t_k) \in \text{Conf}_k(T)$, necesariamente $gt_i g^{-1} \neq gt_j g^{-1}$ cuando $i \neq j$, pues de lo contrario se tendría $t_i = t_j$, lo cual no puede ser, por lo tanto, las coordenadas son diferentes entre sí. Mientras que el argumento usado para φ (en la Sección 1.7) muestra que las coordenadas también conmutan entre sí. En conclusión,

$$(gt_1g^{-1}, \dots, gt_kg^{-1}) \in \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$$

y así Φ está bien definida.

Observemos que Φ es la restricción de la función $\varphi : G \times T^k \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$ de la Sección 1.7 al subespacio $G \times \text{Conf}_k(T)$, esto es, si

$$(g, (t_1, \dots, t_k)) \in \text{Conf}_k(T)$$

entonces $\Phi(g, (t_1, \dots, t_k)) = \varphi(g, (t_1, \dots, t_k))$. Consideremos la siguiente acción de G sobre $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$

$$\begin{aligned} G \times \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G) &\longrightarrow \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G) \\ (g, (g_1, \dots, g_k)) &\mapsto (gg_1g^{-1}, \dots, gg_kg^{-1}) \end{aligned}$$

Si $G = U(n)$, $SU(n)$ ó $Sp(n)$ y $(g_1, \dots, g_k) \in \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ entonces por la Proposición 3.1.2 se tiene que existe un toro maximal T' de G tal que $g_i \in T'$ para $1 \leq i \leq k$, con lo cual $\Phi(t', (g_1, \dots, g_k)) = (g_1, \dots, g_k)$ para todo $t' \in T'$ (ya que T' es abeliano). Esto es, todo elemento de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ está fijo bajo la acción de un algún toro maximal.

Proposición 3.1.3. *Si G es un grupo compacto de Lie conexo y T es un toro maximal de G , entonces*

$$\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)^T = \text{Conf}_k(T)$$

Demostración: Si $(g_1, \dots, g_k) \in \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)^T$ entonces $tg_it^{-1} = g_i$ para todo $t \in T$, con lo cual, $g_1^{-1}tg_1 = t$ para todo $t \in T$, esto es, $g_i \in C_G(T) = T$ (usando la Proposición 1.1.9), por lo cual,

$$(g_1, \dots, g_k) \in \text{Conf}_k(T)$$

Por otro lado, es claro que si $(t_1, \dots, t_k) \in \text{Conf}_k(T)$ entonces

$$(t_1, \dots, t_k) \in \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)^T$$

En conclusión $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)^T = \text{Conf}_k(T)$. ■

Esta proposición muestra que la función Φ de la Sección 2.2 en este caso corresponde a esta función Φ . Por lo tanto, con lo visto en esa sección, Φ desciende a la siguiente función:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : G/T \times \text{Conf}_k(T) &\longrightarrow \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G) \\ (gT, (t_1, \dots, t_k)) &\mapsto (gt_1g^{-1}, \dots, gt_kg^{-1}) \end{aligned}$$

Con lo mencionado podemos probar el siguiente teorema:

Teorema 3.1.4. *Sea $G = U(n)$, $SU(n)$ ó $Sp(n)$ y consideremos la acción de $N(T)$ por la derecha sobre $G \times \text{Conf}_k(T)$ dada por*

$$(g, (t_1, \dots, t_k)) \cdot n = (gn, (n^{-1}t_1n, \dots, n^{-1}t_kn))$$

Entonces el par

$$(\Phi : G \times \text{Conf}_k(T) \longrightarrow \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G), N(T))$$

es un haz principal cohomológico. En particular, se tiene que

$$H^*(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G); \mathbb{Q}) \stackrel{\tilde{\Phi}^*}{\cong} H^*(G/T \times \text{Conf}_k(T); \mathbb{Q})^{W_G}$$

56 CAPÍTULO 3. CONFIGURACIONES QUE CONMUTAN

Demostración: Los grupos $G = U(n)$, $SU(n)$ y $Sp(n)$ son grupos de Lie compactos y conexos. Y si G es uno de estos grupos entonces $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ es un espacio paracompacto y de Hausdorff en el que G actúa con la acción mencionada, la cual además es tal que G_x contiene un toro maximal para cada $x \in \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$. Por lo tanto, por el Teorema 2.2.8 se tiene lo deseado. ■

Cabe mencionar que $\tilde{\Phi}^*$ forma parte del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)) & \xrightarrow[\cong]{\tilde{\Phi}} & H^*(G/T \times \text{Conf}_k(T))^{W_G} \\
 \searrow \psi^* & & \nearrow \pi^* \\
 & \cong & \\
 & H^*(G/T \times_{W_G} \text{Conf}_k(T)) &
 \end{array}$$

donde la función ψ está dada por:

$$\begin{aligned}
 \psi : G/T \times_W \text{Conf}_k(T) &\longrightarrow \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G) \\
 [gT, (t_1, \dots, t_k)] &\mapsto (gt_1g^{-1}, \dots, gt_kg^{-1})
 \end{aligned}$$

Del hecho de que el par $(\Phi : G \times \text{Conf}_k(T) \longrightarrow \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G), N(T))$ sea un haz principal cohomológico se tiene que la función Φ es suprayectiva y cerrada y que el espacio $\text{Conf}_k(T)$ es cerrado en $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$. Por lo tanto, las funciones $\tilde{\Phi}$ y ψ también son suprayectivas, continuas y cerradas.

Cabe mencionar que es posible obtener un resultado análogo al Teorema 3.1.4 para homología, usando el teorema de coeficientes universales y teniendo en cuenta que las homologías usadas aquí son de dimensión finita. Con lo cual los resultados con coeficientes racionales son equivalentes.

Proposición 3.1.5. *Si $G = U(n)$, $SU(n)$ ó $Sp(n)$, entonces las funciones π , $\tilde{\Phi}$ y ψ inducen isomorfismos*

$$\begin{aligned}
 \pi_* : H_n(G/T \times \text{Conf}_k(T); \mathbb{Q})^W &\xrightarrow{\cong} H_n(G/T \times_{W_G} \text{Conf}_k(T); \mathbb{Q}) \\
 \psi_* : H_n(G/T \times_{W_G} \text{Conf}_k(T); \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\cong} H_n(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G); \mathbb{Q}) \\
 \tilde{\Phi}_* : H_n(G/T \times \text{Conf}_k(T); \mathbb{Q})^W &\xrightarrow{\cong} H_n(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G); \mathbb{Q})
 \end{aligned}$$

Observemos además que si T y T' son los toros maximales estándares de G y G' respectivamente y $f : G \longrightarrow G'$ es un homomorfismo tal que

$f(T) \subset T'$ y $f(N_G(T)) \subset N_{G'}(T')$ entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} G/T \times_{W_G} \text{Conf}_k(T) & \xrightarrow{f'} & G'/T' \times_{W_{G'}} \text{Conf}_k(T') \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G) & \xrightarrow{f'} & \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G') \end{array}$$

donde las funciones f' son las funciones inducidas esperadas a partir de f . Diremos que ψ es natural con respecto a f .

3.2. Componentes conexas de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$

Ya que el espacio $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ es localmente arco-conexo, se tiene que las componentes conexas y las componentes arco-conexas coinciden.

Proposición 3.2.1. *Si G es un grupo topológico abeliano arco-conexo tal que $G \setminus A$ es arco-conexo para cada subconjunto finito A de G , entonces $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ es arco-conexo.*

Demostración: Sea $(g_1, \dots, g_k) \in \text{Conf}_k(G)$. Ya que G es abeliano entonces $g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i$, con lo cual se tiene la siguiente igualdad de conjuntos:

$$\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G) = \text{Conf}_k(G)$$

La igualdad también es de espacios topológicos, pues ambos tienen la topología subespacio de G^k . Finalmente, por la Proposición 1.5.3 se tiene que $\text{Conf}_k(G)$ es arco-conexo. ■

Si G es un grupo de Lie compacto, abeliano y arco-conexo de rango mayor que uno, entonces G es una variedad topológica arco-conexa de dimensión mayor que uno, por lo que el Corolario 1.5.4 da lugar al siguiente resultado.

Corolario 3.2.2. *Si G es un grupo de Lie abeliano de rango mayor que uno, entonces $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ es arco-conexo.*

Corolario 3.2.3. *Si $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ con $n \geq 2$ entonces el espacio $\text{Conf}_k(T^n)$ es arco-conexo para todo k .*

Demostración: Si $n \geq 2$, entonces $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ es un grupo de Lie abeliano de rango mayor que uno. El corolario anterior da el resultado deseado. ■

Proposición 3.2.4. *Sea G es un grupo compacto de Lie arco-conexo de rango mayor o igual que 2, tal que cualquier subgrupo abeliano está contenido en un subgrupo abeliano conexo. Entonces $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ es arco-conexo.*

Demostración: Sea T un toro maximal de G . Ya que el rango de G es mayor igual que 2, entonces $T \cong T^n$ para algún $n \geq 2$. Así que por el Corolario 3.2.3 se tiene que $\text{Conf}_k(T)$ es arco-conexo. Por lo tanto, $G \times \text{Conf}_k(T)$ también es arco-conexo. Por último, como la función $\Phi : G \times \text{Conf}_k(T) \rightarrow \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ es suprayectiva, se sigue que $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ es arco-conexo. ■

Si $G = U(n)$, $Sp(n)$, con $n \geq 2$ ó $SU(n)$ con $n \geq 3$, entonces G satisface las condiciones de la proposición anterior. Esto da lugar al siguiente teorema.

Teorema 3.2.5. *Si $G = U(n)$, $Sp(n)$, con $n \geq 2$ ó $SU(n)$ con $n \geq 3$ entonces $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ es arco-conexo*

Los casos $U(1) \cong S^1$ y $SU(2) \cong Sp(1)$ serán tratados a continuación.

3.3. Componentes conexas de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(S^1)$

Proposición 3.3.1. *Si $k \geq 2$ entonces $|\pi_0(\text{Conf}_k(0, 1))| = k!$*

Demostración: Sea $(t_1, \dots, t_k) \in \text{Conf}_k(0, 1)$. Ya que $t_1 \neq t_2$ entonces $t_1 < t_2$ ó $t_2 < t_1$. Ahora bien, ya que $t_3 \neq t_1, t_2$, entonces t_3 satisface una de las siguientes condiciones:

Si $t_2 < t_1$ entonces se tienen los siguientes casos:

$$t_3 < t_2 < t_1 \qquad t_2 < t_3 < t_1 \qquad t_2 < t_1 < t_3$$

Mientras que si $t_1 < t_2$ entonces se tienen los siguientes casos:

$$t_3 < t_1 < t_2 \qquad t_1 < t_3 < t_2 \qquad t_1 < t_2 < t_3$$

Observemos que las condiciones anteriores de los t_1, \dots, t_{i-1} determinan los casos en los que se encuentra t_i , los cuales son i . Continuando este argumento, se tiene que (t_1, \dots, t_k) está en alguno de estos conjuntos:

$$A_\sigma = \{(t_1, \dots, t_k) \in (0, 1)^k \mid t_{\sigma^{-1}(1)} < \dots < t_{\sigma^{-1}(k)}\}$$

donde $\sigma \in S_k$. Por lo tanto, se tiene la siguiente igualdad:

$$\text{Conf}_k(0, 1) = \bigcup_{\sigma \in S_k} A_\sigma$$

Veamos que cada A_σ es convexo: Sean $(t_1, \dots, t_k), (r_1, \dots, r_k) \in A_\sigma$ y $s \in [0, 1]$. Luego

$$(1-s)(t_1, \dots, t_k) + s(r_1, \dots, r_k) = ((1-s)t_1 + sr_1, \dots, (1-s)t_k + sr_k)$$

Sean $i < j$ entonces $t_{\sigma^{-1}(i)} < t_{\sigma^{-1}(j)}$ y $r_{\sigma^{-1}(i)} < r_{\sigma^{-1}(j)}$, por lo tanto

$$(1-s)t_{\sigma^{-1}(i)} + sr_{\sigma^{-1}(i)} < (1-s)t_{\sigma^{-1}(j)} + sr_{\sigma^{-1}(j)}$$

y así $((1-s)t_1 + sr_1, \dots, (1-s)t_k + sr_k) \in A_\sigma$.

Ahora bien, consideremos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f_{i,\sigma} : (0, 1)^k &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t_1, \dots, t_k) &\mapsto t_{\sigma^{-1}(i)} - t_{\sigma^{-1}(i-1)} \end{aligned}$$

Estas funciones claramente están bien definidas y son continuas. Además, son tales que

$$A_\sigma = f_{k,\sigma}^{-1}(0, 1) \cap \dots \cap f_{2,\sigma}^{-1}(0, 1)$$

por lo tanto, A_σ también es abierto y además es disjunto con A_τ para todo $\tau \neq \sigma$. Lo cual demuestra el enunciado, pues $|S_k| = k!$ ■

Teorema 3.3.2. *El número de componentes conexas de $\text{Conf}_k(S^1)$ es $(k-1)!$*

Demostración: Por la Proposición 1.5.6 se tiene que

$$\text{Conf}(S^1) \cong S^1 \times \text{Conf}_{k-1}(S^1 - \{1\})$$

Ahora bien, $(0, 1) \cong S^1 - \{1\}$ mediante $t \leftrightarrow e^{2\pi it}$, por lo tanto, por la Proposición 1.5.7 se tiene que

$$\text{Conf}_{k-1}(S^1 - \{1\}) \cong \text{Conf}_{k-1}(0, 1)$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} \text{Conf}(S^1) &\cong S^1 \times \bigcup_{\sigma \in S_{k-1}} A_\sigma \\ &= \bigcup_{\sigma \in S_{k-1}} S^1 \times A_\sigma \end{aligned}$$

donde cada $S^1 \times A_\sigma$ es abierto, arco-conexo y disjunto con los demás $S^1 \times A_{\sigma'}$, por lo tanto, cada $S^1 \times A_\sigma$ es una componente conexa. El hecho de que $|S_{k-1}| = (k-1)!$ concluye la demostración. ■

Para facilitar la notación, diremos que $(t_1, \dots, t_{k-1}) \in \text{Conf}_{k-1}(0, 1)$ tiene el orden σ si $(t_1, \dots, t_{k-1}) \in A_\sigma$. Diremos que tal elemento tiene el orden inverso de $\sigma \in S_{k-1}$ si tiene el orden dado por $\tilde{\sigma}(i) = k - \sigma(i)$. El elemento $\tilde{\sigma} \in S_{k-1}$ tiene por inverso a $\tilde{\sigma}^{-1}(i) = \sigma^{-1}(k-1 - (i-1))$, con esto, si (t_1, \dots, t_{k-1}) tiene el orden inverso de σ entonces $t_{\sigma^{-1}(k-1)} < \dots < t_{\sigma^{-1}(1)}$. Claramente dos elementos de distinto orden pertenecen a componentes conexas disjuntas. También se tiene que el elemento $\tilde{\sigma}$ es único y distinto de σ , y además $\tilde{\tilde{\sigma}} = \sigma$. También llamaremos a $\tilde{\sigma}$ el orden inverso de σ .

3.4. Componentes conexas de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2))$

Al inicio de esta sección hemos probado, entre otras cosas, que la función

$$\begin{aligned} \Phi : SU(2) \times \text{Conf}_k(T(SU(2))) &\longrightarrow \text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2)) \\ (g, (t_1, \dots, t_k)) &\mapsto (gt_1g^{-1}, \dots, gt_kg^{-1}) \end{aligned}$$

es suprayectiva y cerrada, donde $T(SU(2)) \cong S^1$. Así que se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2)) &= \Phi \left(\bigcup_{\sigma \in S_{k-1}} SU(2) \times V_\sigma \right) \\ &= \bigcup_{\sigma \in S_{k-1}} \Phi(SU(2) \times V_\sigma) \end{aligned}$$

donde $\text{Conf}_k(S^1) = \bigcup_{\sigma \in S_{k-1}} V_\sigma$ y cada $V_\sigma \cong S^1 \times A_\sigma$. Ya que Φ es continua y cada $SU(2) \times V_\sigma$ es conexo se sigue que cada $\Phi(SU(2) \times V_\sigma)$ también

lo es. Por lo tanto, el número de componentes conexas de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2))$ se encuentra acotada por $(k - 1)!$

Proposición 3.4.1. *Si $(x_1, \dots, x_k) \in V_\sigma \subset \text{Conf}_k(S^1)$, entonces se tiene que $(x_1^{-1}, \dots, x_k^{-1}) \in V_{\tilde{\sigma}}$, donde $\tilde{\sigma}$ es el orden inverso de σ .*

Demostración: Observemos primero que cada elemento

$$(x_1, \dots, x_k) \in \text{Conf}_k(S^1)$$

puede ponerse de manera única en la forma $(x, xe^{2\pi it_1}, \dots, xe^{2\pi it_{k-1}})$, donde

$$(t_1, \dots, t_{k-1}) \in \text{Conf}_{k-1}(0, 1)$$

Ahora bien, el homeomorfismo $S^1 \times \text{Conf}_{k-1}(0, 1) \cong \text{Conf}_k(S^1)$ viene dado por $(x, (t_1, \dots, t_{k-1})) \leftrightarrow (x, xe^{2\pi it_1}, \dots, xe^{2\pi it_{k-1}})$. Consideremos

$$(x, xe^{2\pi it_1}, \dots, xe^{2\pi it_{k-1}}) \in V_\sigma \cong S^1 \times A_\sigma$$

y observemos que

$$\begin{aligned} (x^{-1}, (xe^{2\pi it_1})^{-1}, \dots, (xe^{2\pi it_{k-1}})^{-1}) &= (x^{-1}, x^{-1}e^{2\pi i(1-t_1)}, \dots, x^{-1}e^{2\pi i(1-t_{k-1})}) \\ &\mapsto (x^{-1}, (1 - t_1, \dots, 1 - t_{k-1})) \end{aligned}$$

Ya que $(t_1, \dots, t_{k-1}) \in A_\sigma$ entonces $t_{\sigma^{-1}(1)} < \dots < t_{\sigma^{-1}(k-1)}$ y así

$$1 - t_{\sigma^{-1}(k-1)} < \dots < 1 - t_{\sigma^{-1}(1)}$$

Por lo tanto, $(1 - t_1, \dots, 1 - t_{k-1}) \in A_{\tilde{\sigma}}$, donde $\tilde{\sigma}$ es el orden inverso de σ . En conclusión, $(x^{-1}, (xe^{2\pi it_1})^{-1}, \dots, (xe^{2\pi it_{k-1}})^{-1}) \in V_{\tilde{\sigma}}$. ■

Ahora bien, consideremos $(A_1, \dots, A_k) \in \text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2))$, entonces existe $(g, (x_1, \dots, x_k)) \in SU(2) \times V_\sigma$ para algún $\sigma \in S_{k-1}$ tal que

$$\Phi(g, (x_1, \dots, x_k)) = (A_1, \dots, A_k)$$

Sea $n \in \sigma T$ como en la Sección 1.2, en la que ya hemos mostrado que si $x_i \in T$ entonces $nx_in^{-1} = x_i^{-1}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (A_1, \dots, A_k) &= \Phi(g, (x_1, \dots, x_k)) \\ &= \Phi(gn^{-1}, (nx_1n^{-1}, \dots, nx_kn^{-1})) \\ &= \Phi(gn^{-1}, (x_1^{-1}, \dots, x_k^{-1})) \end{aligned}$$

62 CAPÍTULO 3. CONFIGURACIONES QUE CONMUTAN

Teniendo en cuenta la proposición anterior se tiene que

$$(A_1, \dots, A_k) \in \Phi(SU(2) \times V_{\tilde{\sigma}})$$

De hecho, $\Phi(SU(2) \times V_{\tilde{\sigma}}) = \Phi(SU(2) \times V_{\sigma})$, donde $\tilde{\sigma}$ es el orden inverso de σ . Por lo tanto, bastan la mitad de los elementos en S_{k-1} para generar $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2))$. Con esto, podemos concluir que para $k \leq 3$, se tiene que $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2))$ es conexo.

Consideraremos ahora $k \geq 4$. Teniendo en cuenta que cada V_{σ} es cerrado se sigue que cada $\Phi(SU(2) \times V_{\sigma})$ es cerrado pues Φ es cerrada. Finalmente, veamos que los conjuntos $\Phi(SU(2) \times V_{\rho})$ y $\Phi(SU(2) \times V_{\sigma})$ son disjuntos si $\rho \neq \sigma, \tilde{\sigma}$.

Consideremos a los siguientes elementos:

$$\begin{aligned} (gt_1g^{-1}, \dots, gt_kg^{-1}) &\in \Phi(SU(2) \times V_{\sigma}) \\ (hs_1h^{-1}, \dots, hs_kh^{-1}) &\in \Phi(SU(2) \times V_{\rho}) \end{aligned}$$

con $\rho \neq \sigma, \tilde{\sigma}$ y tales que $(gt_1g^{-1}, \dots, gt_kg^{-1}) = (hs_1h^{-1}, \dots, hs_kh^{-1})$. Luego entonces, $h^{-1}gt_i g^{-1}h = s_i$. Ya que $k \geq 4$, necesariamente existe $s_i \neq \{\pm 1\}$ y por lo tanto, como hemos mostrado en la Sección 1.2, se tiene que $h^{-1}g \in N(T)$. Así necesariamente todos los s_i son tales que $s_i = t_i$ ó $s_i = t_i^{-1}$. Ningún caso puede darse, pues (t_1, \dots, t_k) y (s_1, \dots, s_k) venían de componentes disjuntas, donde además σ no era el orden inverso de ρ . En conclusión, cada componente $\Phi(SU(2) \times V_{\sigma})$ es disjunta de otra $\Phi(SU(2) \times V_{\rho})$, con $\rho \neq \sigma, \tilde{\sigma}$.

Con todo lo mostrado en esta sección hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 3.4.2. *El espacio $\text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2))$ es arco-conexo y para $k \geq 3$ el número de componentes conexas de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2))$ es $\frac{(k-1)!}{2}$.*

Capítulo 4

Cohomología de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$

En este capítulo y en el siguiente únicamente estaremos utilizando cohomología racional, por lo tanto escribiremos $H^k(X)$ en lugar de $H^k(X; \mathbb{Q})$.

El primer caso que trataremos será el del espacio $\text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2))$.

4.1. El espacio $\text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2))$

En el Capítulo 3 hemos visto que

$$H^*(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2))) \cong H^*(SU(2)/T \times \text{Conf}_2(S^1))^{W_{SU(2)}}$$

donde $T(SU(2)) \cong S^1$ como en la Sección 1.2. Además en la Sección 2.2 hemos comentado que para determinar la acción de W sobre

$$H^*(SU(2)/T \times \text{Conf}_2(S^1))$$

basta determinar las acciones inducidas de cada una de las siguientes:

$$\begin{aligned} SU(2)/T \times W &\longrightarrow SU(2)/T \\ (gT, nT) &\mapsto gnT \\ W \times \text{Conf}_2(S^1) &\mapsto \text{Conf}_2(S^1) \\ (nT, (x_1, x_2)) &\mapsto (nx_1n^{-1}, nx_2n^{-1}) \end{aligned}$$

En la Sección 2.3 ya hemos determinado completamente la acción de W sobre $H^*(SU(2)/T)$, con lo cual, falta determinar la acción de W sobre $H^*(\text{Conf}_2(S^1))$. En la Sección 1.2 vimos que $W \cong \{T, \sigma T\} \cong \mathbb{Z}_2$ y

que $\sigma x \sigma^{-1} = x^{-1}$, por lo tanto, la acción sobre $\text{Conf}_2(S^1)$ está dada por $1 \cdot (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ y $\sigma \cdot (x_1, x_2) = (x_1^{-1}, x_2^{-1})$.

Ahora bien, S^1 puede interpretarse como \mathbb{R}/\mathbb{Z} mediante $e^{2\pi it} \leftrightarrow [t]$. Con esta interpretación, el producto está dado por $[t] \cdot [s] = [t + s]$, el inverso de $[t]$ es $[t]^{-1} = [1 - t]$ y el antípodo, es el siguiente:

$$\begin{aligned} -e^{2\pi it} &= (-\cos(2\pi t), -\text{sen}(2\pi t)) \\ &= (\cos(2\pi t + \pi), \text{sen}(2\pi t + \pi)) \\ &= (\cos(2\pi(t + 1/2)), \text{sen}(2\pi(t + 1/2))) \\ &= e^{2\pi i(t+1/2)} \mapsto [t + 1/2] \end{aligned}$$

De manera similar, se tiene la siguiente interpretación:

$$\begin{aligned} S^1 \times S^1 &\cong \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2} \\ (e^{2\pi it_1}, e^{2\pi it_2}) &\leftrightarrow [t_1, t_2] \end{aligned}$$

Finalmente, una interpretación de $\text{Conf}_2(S^1)$ es la siguiente:

$$\frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2} - \{[x, x] \mid x \in [0, 1]\}$$

Por lo tanto, también consideraremos a $\text{Conf}_2(S^1)$ de esta manera, según nos convenga.

Proposición 4.1.1. *Si consideramos la acción de $W \cong \mathbb{Z}_2$ sobre S^1 , dado por $\sigma \cdot x = x^{-1}$, se tiene que $\text{Conf}_2(S^1) \simeq_{\mathbb{Z}_2} S^1$.*

Demostración: Observemos primero que la acción indicada corresponde a $\sigma \cdot [t] = [1 - t]$. Consideremos ahora las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f : \text{Conf}_2(S^1) &\longrightarrow S^1 \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_2 \\ g : S^1 &\longrightarrow \text{Conf}_2(S^1) \\ y &\mapsto (-y, y) \end{aligned}$$

Claramente las funciones son equivariantes y además $f \circ g = \mathbb{1}_{S^1}$. Ahora

bien, consideremos la siguiente homotopía:

$$H : \text{Conf}_2(S^1) \times I \longrightarrow \text{Conf}_2(S^1)$$

$$([x, y], t) \mapsto \begin{cases} [x + t/2 + t(y - x), y] & 0 \leq y < x \leq 1 \\ [x - t/2 + t(y - x), y] & 0 \leq x < y \leq 1 \end{cases}$$

Los elementos en los que podrían haber problemas de definición son aquellos de la forma $[x, 0] = [x, 1]$ y $[0, y] = [1, y]$. Sin embargo

$$H([x, 0], t) = [x + t/2 - tx, 0] = [x - t/2 + t - tx, 1] = H([x, 1], t)$$

$$H([0, y], t) = [-t/2 + ty, y] = [1 + ty - t/2, 1] = H([1, y], t)$$

Además $[x + t/2 + t(y - x), y]$ siempre es elemento de $\text{Conf}_2(S^1)$ cuando $0 \leq y < x \leq 1$, ya que de lo contrario, $x + t/2 + t(y - x) = y$ para algún $t \in [0, 1]$, y por lo tanto, si $t \neq 1$ entonces $y - x = \frac{t}{2(1-t)}$, lo cual no puede ser, pues $y - x < 0$, mientras que si $t = 1$ entonces se tendría $1/2 = 0$. Ningún caso puede darse. De manera similar con el otro caso. Ahora bien, observemos que $H_0([x, y]) = [x, y] = \mathbb{1}_{\text{Conf}_2(S^1)}([x, y])$ y que $H_1([x, y]) = [y \pm 1/2, y] = (-[y], [y]) = g \circ f([x, y])$. Por lo tanto, $g \circ f \simeq \mathbb{1}_{\text{Conf}_2(S^1)}$.

Finalmente, observemos que si $[x, y]$ es tal que $0 \leq x < y \leq 1$ entonces $[1 - x, 1 - y]$ es tal que $0 \leq 1 - y < 1 - x \leq 1$, esto es, satisface la primera relación, y por lo tanto, para $t \in [0, 1]$ se tiene:

$$\begin{aligned} H(\sigma \cdot [x, y], t) &= H((\sigma \cdot [x], \sigma \cdot [y]), t) = H([1 - x, 1 - y], t) \\ &= [1 - x + t/2 + t(1 - y - (1 - x)), 1 - y] \\ &= [1 - x + t/2 + t(x - y), 1 - y] \\ \sigma \cdot H([x, y], t) &= \sigma \cdot [x - t/2 + t(y - x), y] \\ &= [1 - x + t/2 + t(x - y), 1 - y] \end{aligned}$$

Esto es, la homotopía es equivariante para todo $t \in [0, 1]$ y por lo tanto una equivalencia equivariante, como deseábamos. ■

Con esto podemos considerar a $\text{Conf}_2(S^1)$ como a S^1 con la acción dada por $\sigma \cdot x = x^{-1}$. Ahora bien, la acción sobre la cohomología $H^k(S^1)$ que induce la acción de \mathbb{Z}_2 sobre S^1 es la inducida por $1 : S^1 \longrightarrow S^1$ y $\sigma : S^1 \longrightarrow S^1, x \mapsto x^{-1}$. Observemos que $H^k(S^1) = 0$ cuando $k \neq 0, 1$, por lo tanto, basta ver la inducida sobre $H^0(S^1) \cong \mathbb{Z}$ y $H^1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. La

función 1 induce la identidad tanto en H^0 como en H^1 , mientras que la función σ induce la identidad en H^0 ya que S^1 es conexo.

Para ver la inducida de σ en $H^1(S^1)$, veamos primero la inducida sobre la homología:

$$\begin{array}{ccc} H_1(S^1) & \xleftarrow{\cong} & \pi_1(S^1)_{ab} \cong \mathbb{Z}_{ab} \cong \mathbb{Z} \\ \downarrow \sigma_* & & \downarrow \sigma_* \\ H_1(S^1) & \xleftarrow{\cong} & \pi_1(S^1)_{ab} \cong \mathbb{Z}_{ab} \cong \mathbb{Z} \end{array}$$

La inducida en el grupo fundamental, σ_* es tal que $\sigma_*(1) = -1$, ya que σ manda al lazo cuya clase genera $\pi_1(S^1)$ al reverso. Por lo tanto, en la inducida en homología se tiene también $\sigma_*(1) = -1$. Finalmente, la inducida σ^* en $H^1(S^1)$ corresponde a la transpuesta de $H_1(S^1)$, que en este caso vuelve a ser σ_* . En resumen, la acción inducida sobre H^k es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_2 \times H^0(S^1) &\longrightarrow H^0(S^1) \\ (\sigma, x) &\mapsto x \\ \mathbb{Z}_2 \times H^1(S^1) &\longrightarrow H^1(S^1) \\ (\sigma, x) &\mapsto -x \end{aligned}$$

En términos de representaciones, se tiene

$$H^0(S^1) = 1 \qquad H^1(S^1) = \sigma$$

Ahora podemos pasar a calcular la cohomología de $\text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2))$ dimensión a dimensión. Para ello usaremos lo visto en la Sección 1.8.

Ya que el espacio es conexo por lo visto en el capítulo anterior, se tiene que

$$H^0(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2))) = \mathbb{Q}$$

Para la dimensión uno, se tiene usando el Teorema de Künneth que

$$\begin{aligned} H^1(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2))) &= [H^1(SU(2)/T \times \text{Conf}_2(S^1))]^{\mathbb{Z}_2} \\ &= [H^0(SU(2)/T) \otimes H^1(\text{Conf}_2(S^1)) \\ &\quad \oplus H^1(SU(2)/T) \otimes H^0(\text{Conf}_2(S^1))]^{\mathbb{Z}_2} \end{aligned}$$

Usando las equivalencias homotópicas equivariantes antes calculadas, obtenemos que

$$\begin{aligned} H^1(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2))) &\cong [(H^0(S^2) \otimes H^1(S^1)) \oplus (H^1(S^2) \otimes H^0(S^1))]^{\mathbb{Z}_2} \\ &\cong [(1 \otimes \sigma) \oplus (0 \otimes \sigma)]^{\mathbb{Z}_2} \cong [1 \otimes \sigma]^{\mathbb{Z}_2} \\ &\cong \sigma^{\mathbb{Z}_2} = 0 \end{aligned}$$

Para la dimensión 2, se tiene que

$$\begin{aligned} H^2(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2))) &\cong [H^2(SU(2)/T \times \text{Conf}_2(S^1))]^{\mathbb{Z}_2} \\ &= [(H^2(S^2) \otimes H^0(S^1)) \\ &\oplus (H^1(S^2) \otimes H^1(S^1)) \oplus (H^0(S^2) \otimes H^2(S^1))]^{\mathbb{Z}_2} \\ &= [(\sigma \otimes 1) \oplus (0 \otimes \sigma) \oplus (1 \otimes 0)]^{\mathbb{Z}_2} \\ &\cong \sigma^{\mathbb{Z}_2} = 0 \end{aligned}$$

Para la dimensión 3, se tiene que

$$\begin{aligned} H^3(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2))) &= [H^3(S^2) \otimes H^0(S^1) \oplus H^2(S^2) \otimes H^1(S^1) \\ &\oplus H^1(S^2) \otimes H^2(S^1) \oplus H^0(S^2) \otimes H^3(S^1)]^{\mathbb{Z}_2} \\ &= [(0 \otimes 1) \oplus (\sigma \otimes \sigma) \oplus (0 \otimes 0) \oplus (1 \otimes 0)]^{\mathbb{Z}_2} \\ &\cong 1^{\mathbb{Z}_2} \cong \mathbb{Q} \end{aligned}$$

En dimensión $k \geq 4$, en todos los términos involucrados en el isomorfismo de Künneth aparece al menos un cero, lo cual muestra que

$$H^k(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2))) = 0$$

En resumen:

$$H^n(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2)); \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } n = 0, 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La cohomología de $\text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2))$ es también la cohomología de $SU(2) \cong S^3$. Esto da lugar a intuir que $\text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2)) \simeq S^3$. Esto es cierto, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 4.1.2. *El espacio $\text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2))$ es homotópicamente equivalente a $SU(2)$.*

Demostración: Consideremos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f : \text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2)) &\longrightarrow SU(2) \\ (A, B) &\mapsto A \\ g : SU(2) &\longrightarrow \text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2)) \\ A &\mapsto (A, -A) \end{aligned}$$

Se tiene que $f \circ g = \mathbb{1}_{SU(2)}$ y $g(f(A, B)) = (A, -A)$. Veamos que $g \circ f$ es homótopa a $\mathbb{1}_{\text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2))}$. Consideremos la siguiente homotopía:

$$\begin{aligned} H : \text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2)) \times I &\longrightarrow \text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2)) \\ (A, B, t) &\mapsto \left(A, \frac{t(-A) + (1-t)B}{\|t(-A) + (1-t)B\|} \right) \end{aligned}$$

donde consideramos $A, B \in \mathbb{R}^4$ y $\|\cdot\|$ la norma correspondiente en \mathbb{R}^4 . Veamos que H se encuentra bien definida: primero, si sucediera que $\|t(-A) + (1-t)B\| = 0$, entonces $tA = (1-t)B$, con lo cual, necesariamente $t \neq 0$ y $t \neq 1$, por lo tanto, $A = \frac{1-t}{t}B$. Ya que $\frac{1-t}{t} > 0$ y $A, B \in S^3$ entonces $A = B$, lo cual no puede ser. Ahora bien, si sucediera que $A = \frac{t(-A) + (1-t)B}{\|t(-A) + (1-t)B\|}$ se tendría

$$\|t(-A) + (1-t)B\|A = t(-A) + (1-t)B$$

con lo cual, $(\|t(-A) + (1-t)B\| + t)A = (1-t)B$, y ya que $A, B \in S^3$ y $A \neq B$, entonces $B = -A$, de donde

$$(\|t(-A) + (1-t)(-A)\| + t)A = (t-1)A$$

con lo cual, $1+t = t-1$ y por lo tanto $1 = -1$, lo cual no puede ser. En conclusión $A \neq \frac{t(-A) + (1-t)B}{\|t(-A) + (1-t)B\|}$. Finalmente, ya que $A, B \in \mathbb{H}$ son de norma 1 y son tales que $AB = BA$, se tiene que las partes imaginarias de A y B son paralelas, digamos

$$A = a + bi + cj + dk \quad B = e + \lambda bi + \lambda cj + \lambda dk$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned} \frac{t(-A) + (1-t)B}{\|t(-A) + (1-t)B\|} &= \frac{t(-a) + (1-te)}{\|t(-A) + (1-t)B\|} + \frac{t + (1-t)\lambda}{\|t(-A) + (1-t)B\|} bi \\ &+ \frac{t + (1-t)\lambda}{\|t(-A) + (1-t)B\|} cj + \frac{t + (1-t)\lambda}{\|t(-A) + (1-t)B\|} dk \end{aligned}$$

y por lo tanto, las partes imaginarias de A y $\frac{t(-A)+(1-t)B}{\|t(-A)+(1-t)B\|}$ son paralelas y así conmutan como elementos de \mathbb{H} . En conclusión, la homotopía considerada está bien definida. Esta homotopía claramente es continua y es tal que $H_0 = \mathbb{1}_{\text{Conf}_2^{\text{ab}}(SU(2))}$ y $H_1 = g \circ f$. ■

4.2. El espacio $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2))$

En la Sección 3.1 mostramos que la función

$$\begin{aligned} \psi : SU(2)/T \times_W \text{Conf}_k(T) &\longrightarrow \text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2)) \\ [gT, (t_1, \dots, t_k)] &\mapsto (gt_1g^{-1}, \dots, gt_kg^{-1}) \end{aligned}$$

es suprayectiva, continua y cerrada. Ahora bien, supongamos que

$$\psi([gT, (t_1, \dots, t_k)]) = \psi([hT, (s_1, \dots, s_k)])$$

Se tiene entonces que $h^{-1}gt_i g^{-1}h = s_i$, ya que $k \geq 3$ entonces existe $t_i \neq \{\pm 1\}$, por lo tanto, $h^{-1}g \in N(T)$ (como hemos comentado en la Sección 1.2). Así que existe $n \in N(T)$ tal que $h^{-1}g = n$. Observemos entonces que

$$\begin{aligned} (gT, (t_1, \dots, t_k)) \cdot n^{-1} &= (gn^{-1}T, (nt_1n^{-1}, \dots, nt_kn^{-1})) \\ &= (hT, (h^{-1}gt_1g^{-1}h, \dots, h^{-1}gt_kg^{-1}h)) \\ &= (hT, (s_1, \dots, s_k)) \end{aligned}$$

Esto es $[gT, (t_1, \dots, t_k)] = [hT, (s_1, \dots, s_k)]$. En conclusión ψ es también inyectiva y así un homeomorfismo. Por lo tanto

$$\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2)) \cong SU(2)/T \times_W \text{Conf}_k(S^1)$$

Teorema 4.2.1. *El espacio $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2))$ es homotópicamente equivalente a $\bigsqcup_{\frac{(k-1)!}{2}} S^2 \times S^1$ cuando $k \geq 3$.*

Demostración: En la Sección 2.3 mostramos que $SU(2)/T \cong_W S^2$, donde la acción de W sobre S^2 es la antipodal. Y en esta sección mostramos que $\text{Conf}_k(S^1) \cong_W \bigsqcup_{\sigma \in S_{k-1}} S^1$ con la acción comentada. Así que

$$SU(2)/T \times_W \text{Conf}_k(S^1) \cong S^2 \times_W \bigsqcup_{\sigma \in S_{k-1}} S^1$$

En este cociente, cada elemento (x, α_σ) de la componente conexa $S^2 \times S_\sigma^1$ se relaciona únicamente con el elemento $(-x, \alpha_{\bar{\sigma}}^{-1})$ de la componente conexa $S^2 \times S_{\bar{\sigma}}^1$. Así que toda la componente conexa $S^2 \times S_\sigma^1$ se identifica únicamente con la componente conexa $S^2 \times S_{\bar{\sigma}}^1$, por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2)) &\cong S^2 \times_W \bigsqcup_{\sigma \in S_{k-1}} S^1 \\ &\cong \bigsqcup_{\frac{(k-1)!}{2}} S^2 \times S^1 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Con la equivalencia mostrada, y teniendo en cuenta que los grupos de cohomología de S^2 y S^1 son conocidos, es posible calcular los grupos de cohomología del espacio $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2))$.

Corolario 4.2.2. *El espacio $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2))$ tiene los siguientes grupos de cohomología cuando $k \geq 3$:*

$$H^n(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(2)), \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}^{\frac{(k-1)!}{2}} & \text{si } n \leq 3 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

4.3. Cohomología de $\text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(2))$

Hemos visto que $W \cong \mathbb{Z}_2$ actúa sobre $U(2)/T$ y $\text{Conf}_2(T)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} U(2)/T \times W &\longrightarrow U(2)/T \\ (gT, nT) &\mapsto gnT \\ W \times \text{Conf}_2(T) &\mapsto \text{Conf}_2(T) \\ (nT, (A, B)) &\mapsto (nAn^{-1}, nBn^{-1}) \end{aligned}$$

La acción inducida de W sobre $U(2)/T$ ya fue calculada en la Sección 2.3, así que basta calcular la acción inducida sobre $\text{Conf}_2(T)$. Consideremos ahora $A = (a_1, a_2) \in T$. En la Sección 1.3 hemos visto que el elemento σ es tal que $\sigma A \sigma^{-1} = (a_2, a_1)$. Así que la acción del grupo de Weyl sobre $\text{Conf}_2(T)$ está dada de la siguiente manera:

$$\sigma \cdot ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ((x_2, x_1), (y_2, y_1))$$

De la Proposición 1.5.6 se tiene que $\text{Conf}_2(T) \cong T \times (T - \{1\})$. Para dar una acción del grupo de Weyl sobre $T \times (T - \{1\})$ de tal manera que el

homeomorfismo sea equivariante debe cumplirse:

$$\sigma \cdot ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \phi(\sigma \cdot \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)))$$

donde las funciones ϕ y φ corresponden a las de la Proposición 1.5.6. Desarrollando la expresión se obtiene que la acción es

$$\sigma \cdot ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ((x_2, x_1), (y_2, y_1))$$

Ahora bien, consideremos a $T - \{1\}$ como el cuadrado unitario $I \times I$ menos el centro, en el que se identifican los lados paralelos, junto con la acción de \mathbb{Z}_2 sobre $T - \{1\}$ que es tal que $\sigma \cdot (x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Observemos que el subconjunto de $T - \{1\}$ que consta de los lados del cuadrado es homeomorfo a $S^1 \vee S^1$ y la acción sobre $T - \{1\}$ restringida a $S^1 \vee S^1$ corresponde a la acción que es tal que $\sigma \cdot (s)_1 = (s)_2$, donde $(s)_1$ representa al elemento $s \in S^1_1$ y $(s)_2$ al elemento $s \in S^1_2$. Además es claro que la acción sobre $T - \{1\}$ es tal que

$$\begin{aligned} \sigma \cdot ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) &= \sigma \cdot (x_1, x_2) + \sigma \cdot (y_1, y_2) \\ \sigma \cdot (t(x_1, x_2) + (1-t)(y_1, y_2)) &= t(\sigma \cdot (x_1, x_2)) + (1-t)(\sigma \cdot (y_1, y_2)) \end{aligned}$$

Consideremos entonces a las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} p : T - \{1\} &\longrightarrow S^1 \vee S^1 \\ i : S^1 \vee S^1 &\longrightarrow T - \{1\} \end{aligned}$$

donde p es la proyección radial desde el centro del cuadrado hacia los lados e i es la inclusión de los lados paralelos en el cuadrado. Notemos que p es tal que $p(\sigma \cdot (x_1, x_2)) = \sigma \cdot p(x_1, x_2)$ y por tanto p es equivariante, e i también lo es, pues

$$\begin{aligned} i(\sigma \cdot (s)_1) &= i((s)_2) = (0, s) \\ \sigma \cdot (i(s)_1) &= \sigma \cdot (s, 0) = (0, s) \end{aligned}$$

Además estas funciones son tales que $p \circ i = \mathbb{1}$ e $i \circ p(x_1, x_2) = p(x_1, x_2)$. Sea ahora la siguiente homotopía:

$$\begin{aligned} H : (T - \{1\}) \times I &\longrightarrow T - \{1\} \\ (x, t) &\mapsto (1-t)p(x) + tx \end{aligned}$$

Se encuentra bien definida ya que el segmento que va de $p(x)$ a x no pasa por el centro. Esta H es tal que $H_0(x_1, x_2) = p(x_1, x_2) = i \circ p(x_1, x_2)$ y

$H_1 = \mathbb{1}$ y además

$$\begin{aligned} H(\sigma \cdot (x_1, x_2), t) &= H((x_2, x_1), t) \\ &= (1-t)p(x_2, x_1) + t(x_2, x_1) \\ &= (1-t)(\sigma \cdot p(x_1, x_2)) + t(\sigma \cdot (x_1, x_2)) \\ &= \sigma \cdot H((x_1, x_2), t) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $T - \{1\} \simeq_{\mathbb{Z}_2} S^1 \vee S^1$ y así también

$$T \times (T - \{1\}) \simeq_{\mathbb{Z}_2} T \times (S^1 \vee S^1)$$

Veamos ahora cómo es la acción que induce en $H^*(T)$ y $H^*(S^1 \vee S^1)$, lo cual corresponde a ver la inducida de σ en las cohomologías respectivas. Ya que T y $S^1 \vee S^1$ son conexos, se tiene que la inducida de σ sobre $H^0(T)$ y $H^0(S^1 \vee S^1)$ es trivial. Ahora bien, se tiene que los lazos que generan el grupo fundamental de T son $\alpha = (e^{2\pi it}, 1)$ y $\beta = (1, e^{2\pi it})$, estos lazos son tales que $\sigma \cdot \alpha = \beta$ y $\sigma \cdot \beta = \alpha$. Ya que $\pi_1(T) = \pi_1(T)_{ab}$ se tiene que la inducida σ_* en $H_1(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ es la inducida σ_* en $\pi_1(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, la cual es tal que $\sigma_*(0, 1) = (1, 0)$ y $\sigma_*(1, 0) = (0, 1)$ y está representada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la inducida en $H^1(T)$ es la transpuesta de σ_* , que vuelve a tener la misma expresión. Ahora bien, se tiene que $H^*(T) = \wedge_{\mathbb{Q}}(x, y)$ con $|x| = |y| = 1$, donde x y y corresponden a $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Ya que σ^* es multiplicativa y xy es un generador de $H^2(T) \cong \mathbb{Q}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma \cdot xy &= (\sigma \cdot x)(\sigma \cdot y) \\ &= yx = -xy \end{aligned}$$

Con esto se ha determinado la inducida en $H^*(T)$. Veamos ahora un análisis similar para $H^*(S^1 \vee S^1)$. Los lazos que generan el grupo fundamental de $S^1_1 \vee S^1_2$ son $\alpha = (e^{2\pi it})_1$ y $\beta = (e^{2\pi it})_2$, los cuales son tales que $\sigma \cdot \alpha = \beta$ y $\sigma \cdot \beta = \alpha$. Por lo tanto, la inducida σ_* en $\pi_1(S^1 \vee S^1) = F_2$ es tal que $\sigma \cdot a = b$ y $\sigma \cdot b = a$. Luego, la inducida en $H^1(S^1 \vee S^1) \cong \text{Hom}(\pi_1(S^1 \vee S^1)_{ab}; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ es también tal que $\sigma \cdot (1, 0) = (0, 1)$ y $\sigma \cdot (0, 1) = (1, 0)$. En resumen, la acción del grupo de

Weyl viene dada por:

$$\begin{array}{lll} H^0(T) \cong \mathbb{Q} & H^1(T) \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & H^2(T) \cong \mathbb{Q} \\ \sigma \cdot x = x & \sigma \cdot (x, y) = (y, x) & \sigma \cdot x = -x \\ H^0(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Q} & H^1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & \\ \sigma \cdot x = x & \sigma \cdot (x, y) = (y, x) & \end{array}$$

En términos de representaciones y usando la Proposición 1.8.8 se tiene:

$$\begin{array}{lll} H^0(T) = 1 & H^1(T) = 1 \oplus \sigma & H^2(T) = \sigma \\ H^0(S^1 \vee S^1) = 1 & H^1(S^1 \vee S^1) = 1 \oplus \sigma & \end{array}$$

Con esto ya podemos calcular la cohomología de $\text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(2))$.

En el capítulo anterior vimos que $\text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(2))$ es conexo, por lo tanto,

$$H^0(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(2))) \cong \mathbb{Q}$$

Para la dimensión 1, se tiene que

$$\begin{aligned} H^1(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(2))) &= [H^1(U(2)/T) \otimes H^0(\text{Conf}_2(T)) \\ &\quad \oplus H^0(U(2)/T) \otimes H^1(U(2)/T)]^{\mathbb{Z}_2} \end{aligned}$$

Ya que $\text{Conf}_2(T) \simeq_{\mathbb{Z}_2} T \times (S^1 \vee S^1)$ y $U(2)/T \cong_{\mathbb{Z}_2} S^2$ (lo cual implica $H^1(U(2)/T) = 0$), se tiene, usando de nuevo el Teorema de Künneth y el Lema 1.8.7, que

$$\begin{aligned} H^1(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(2))) &= [H^0(S^2) \otimes [H^1(T) \otimes H^0(S^1 \vee S^1) \\ &\quad \oplus H^0(T) \otimes H^1(S^1 \vee S^1)]]^{\mathbb{Z}_2} \\ &= [1 \otimes [((1 \oplus \sigma) \otimes 1) \oplus (1 \otimes (1 \oplus \sigma))]]^{\mathbb{Z}_2} \\ &= (2 \oplus 2\sigma)^{\mathbb{Z}_2} = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Para la dimensión 2 se tiene

$$\begin{aligned} H^2(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(2))) &= [H^2(S^2) \otimes H^0(T \times (S^1 \vee S^1)) \\ &\quad \oplus H^0(S^2) \otimes (H^1(T) \otimes H^1(S^1 \vee S^1) \\ &\quad \oplus H^2(T) \otimes H^0(S^1 \vee S^1))]^{\mathbb{Z}_2} \\ &= [(\sigma \otimes 1) \oplus (1 \otimes (((1 \oplus \sigma) \otimes (1 \oplus \sigma)) \oplus (\sigma \otimes 1)))]^{\mathbb{Z}_2} \\ &= [\sigma \oplus (1 \oplus \sigma) \oplus (\sigma \oplus 1) \oplus \sigma]^{\mathbb{Z}_2} \\ &= [2 \oplus 4\sigma]^{\mathbb{Z}_2} \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Para la dimensión 3 se tiene:

$$\begin{aligned}
 H^3(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(2))) &= [H^0(S^2) \otimes (H^2(T) \otimes H^1(S^1 \vee S^1)) \\
 &\quad \oplus H^2(S^2) \otimes (H^0(T) \otimes H^1(S^1 \vee S^1)) \\
 &\quad \oplus H^1(T) \otimes H^0(S^1 \vee S^1)]^{\mathbb{Z}_2} \\
 &= [1 \otimes (\sigma \otimes (1 \oplus \sigma)) \oplus (\sigma \otimes ((1 \otimes (1 \oplus \sigma)) \\
 &\quad \oplus ((1 \oplus \sigma) \otimes 1))]^{\mathbb{Z}_2} \\
 &= [(\sigma \oplus 1) \oplus (\sigma \oplus 1) \oplus (\sigma \oplus 1)]^{\mathbb{Z}_2} \\
 &= [3 \oplus 3\sigma]^{\mathbb{Z}_2} \cong \mathbb{Q}^3
 \end{aligned}$$

Para la dimensión 4 se tiene

$$\begin{aligned}
 H^4(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(2))) &= [H^2(S^2) \otimes ((H^1(T) \otimes H^1(S^1 \vee S^1)) \\
 &\quad \oplus (H^2(T) \otimes H^0(S^1 \vee S^1)))]^{\mathbb{Z}_2} \\
 &= [\sigma \otimes (((1 \oplus \sigma) \otimes (1 \oplus \sigma)) \oplus (1 \otimes \sigma))]^{\mathbb{Z}_2} \\
 &= [(\sigma \oplus 1) \oplus (1 \oplus \sigma) \oplus (\sigma \oplus 1)]^{\mathbb{Z}_2} \\
 &= [3 + 3\sigma]^{\mathbb{Z}_2} = \mathbb{Q}^3
 \end{aligned}$$

Para la dimensión 5 se tiene que:

$$\begin{aligned}
 H^5(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(2))) &= [H^2(S^2) \otimes (H^2(T) \otimes H^1(S^1 \vee S^1))]^{\mathbb{Z}_2} \\
 &= [\sigma \otimes (\sigma \otimes (1 \oplus \sigma))]^{\mathbb{Z}_2} \\
 &= [1 + \sigma]^{\mathbb{Z}_2} \cong \mathbb{Q}
 \end{aligned}$$

Si $k \geq 6$, cada uno de los términos involucrados en la fórmula de Künneth tiene un cero, por lo tanto:

$$H^k(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(2))) = 0$$

En resumen, obtuvimos lo siguiente:

$$H^n(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(2)), \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Q}^2 & \text{si } n = 1, 2 \\ \mathbb{Q}^3 & \text{si } n = 3, 4 \\ \mathbb{Q} & \text{si } n = 5 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

4.4. Cohomología de $\text{Conf}_3^{\text{ab}}(U(2))$

Recordemos que $H^k(\text{Conf}_3^{\text{ab}}(U(2))) \cong [H^k(U(2)/T \times \text{Conf}_3(T))]^{\mathbb{Z}_2}$ y la cohomología de $U(2)/T$ está calculada en la Sección 2.3, entonces basta conocer la cohomología de $\text{Conf}_3(T)$. Ya que

$$\text{Conf}_3(T) \cong T \times \text{Conf}_2(T - \{1\})$$

lo que haremos primero será calcular $H^k(\text{Conf}_2(T - \{1\}))$ y deducir la acción de \mathbb{Z}_2 sobre esta cohomología. Consideraremos a $\text{Conf}_2(T - \{1\})$ como en la Sección 1.6, donde $T \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y un punto de T es denotado por sus coordenadas (u, v) , con $u, v \in [0, 1]$. Consideremos también a los puntos $y_1 = (1/8, 1/8)$ y $y_2 = (2/8, 2/8)$, de esta forma, y_1 y y_2 están fijos bajo la acción de \mathbb{Z}_2 .

La fibración de Fadell y Neuwirth [13] se ve de la forma

$$\begin{array}{ccc} T - \{1, y_1\} & \xrightarrow{i} & \text{Conf}_2(T - \{1\}) \xrightarrow{p} T - \{1\} \\ y & \mapsto & (y_1, y) \\ & & (x, y) \mapsto x \end{array}$$

Esta fibración da lugar a una sucesión exacta larga entre los grupos de homotopía de los espacios involucrados. Observemos que

$$T - \{1, y_1\} \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^1 \quad T - \{1\} \simeq S^1 \vee S^1$$

y por lo tanto $\pi_1(T - \{1, y_1\}) = F_3$ y $\pi_1(T - \{1\}) = F_2$. Además si $k \geq 2$ entonces

$$\pi_k(T - \{1\}) \cong \pi_k(S^1 \vee S^1) \cong \pi_k(E) = 1$$

donde E es el cubriente universal de $S^1 \vee S^1$, el cual es contráctil. De manera similar se tiene que $\pi_k(T - \{1, y_1\}) = 1$ si $k \geq 2$. Se tienen entonces las siguientes sucesiones exactas cortas:

$$1 \longrightarrow F_3 \xrightarrow{i_*} \pi_1(\text{Conf}_2(T - \{1\})) \xrightarrow{p_*} F_2 \longrightarrow 1 \quad (4.1)$$

$$1 \longrightarrow \pi_k(\text{Conf}_2(T - \{1\})) \longrightarrow 1$$

Por lo tanto, $\text{Conf}_2(T - \{1\})$ es un $K(\pi_1(\text{Conf}_2(T - \{1\})), 1)$ y así

$$B\pi_1(\text{Conf}_2(T - \{1\})) \simeq \text{Conf}_2(T - \{1\})$$

Ahora bien, en la Sección 1.6 vimos que $\pi_1(\text{Conf}_2(T - \{1\}))$ es generado por los elementos a_2, a_3, b_2, b_3 y B_{23} que satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} [a_2, a_3] &= [b_2, b_3] = 1 \\ [a_i, B_{23}] &= [b_i, B_{23}] = 1 \\ [b_3, a_3 a_2^{-1}] &= [b_3 b_2^{-1}, a_3] = B_{23} \end{aligned}$$

y donde $B_{23}(t) = (y_1, \tilde{\gamma}(t))$. Consideremos ahora a los espacios

$$T - \{1, y_1\} \quad \text{Conf}_2(T - \{1\}) \quad T - \{1\}$$

basados en los puntos $y_2, (y_1, y_2)$ y y_1 respectivamente. Con esto las funciones p e i son funciones basadas. Consideremos también a los grupos fundamentales basados en los puntos dados con esta presentación:

$$F_2 \cong \pi_1(T - \{1\}) = \langle v, h \rangle \quad F_3 \cong \pi_1(T - \{1, y_1\}) = \langle \tilde{v}, \tilde{r}, \tilde{h} \rangle$$

donde los lazos correspondientes $I \longrightarrow T - \{1\}, T - \{1, y_1\}$ son los siguientes:

$$\begin{aligned} v(t) &= y_1 - (0, t) & \tilde{v}(t) &= y_2 - (0, t) \\ h(t) &= y_1 - (t, 0) & \tilde{r}(t) &= \tilde{\gamma}(t) \\ & & \tilde{h}(t) &= y_2 - (t, 0) \end{aligned}$$

Con esto es claro que las funciones i_* y p_* son tales que:

$$\begin{aligned} i_* : \pi_1(T - \{1, y_1\}) &\longrightarrow \pi_1(\text{Conf}_2(T - \{1\})) \\ &\tilde{v} \mapsto b_3 \\ &\tilde{r} \mapsto B_{23} \\ &\tilde{h} \mapsto a_3 \\ p_* : \pi_1(\text{Conf}_2(T - \{1\})) &\longrightarrow \pi_1(T - \{1\}) \\ &a_2 \mapsto h \\ &b_2 \mapsto v \\ &a_3, b_3 \mapsto 1 \end{aligned}$$

La sucesión exacta corta (4.1) induce una fibración homotópica entre los espacios clasificantes de los grupos involucrados, que salvo homotopía es la fibración de Fadell y Neuwirth. Ya que $BF_3 \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^1$ y

$BF_2 \simeq S^1 \vee S^1$, la fibrición tiene la siguiente forma:

$$S^1 \vee S^1 \vee S^1 \longrightarrow \text{Conf}_2(T - \{1\}) \longrightarrow S^1 \vee S^1$$

Esta fibrición nos da una sucesión espectral de Serre que es tal que:

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} &= H^p(S^1 \vee S^1; \underline{H}^q(S^1 \vee S^1 \vee S^1; \mathbb{Q})) \\ &\Rightarrow H^{p+q}(\text{Conf}_2(T - \{1\}); \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

donde $\underline{H}^q(S^1 \vee S^1 \vee S^1; \mathbb{Q})$ indica que los coeficientes son locales, esto es, es el grupo $H^q(S^1 \vee S^1 \vee S^1; \mathbb{Q})$ en el cual actúa $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ por medio de la acción inducida por la fibrición. Ahora bien, ya que para $k \geq 2$ se tiene que $H^k(S^1 \vee S^1) = H^k(S^1 \vee S^1 \vee S^1) = 0$ entonces la página E_2 se ve de la siguiente manera:

	0	0	0
	$H^0(S^1 \vee S^1; \underline{H}^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1))$	$H^1(S^1 \vee S^1; \underline{H}^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1))$	0
	$H^0(S^1 \vee S^1; \underline{H}^0(S^1 \vee S^1 \vee S^1))$	$H^1(S^1 \vee S^1; \underline{H}^0(S^1 \vee S^1 \vee S^1))$	0

Los diferenciales son todos iguales a cero, por lo tanto, la página E_2 corresponde a la página E_∞ . Así que la cohomología de $\text{Conf}_2(T - \{1\})$ está dada por:

$$H^0(\text{Conf}_2(T - \{1\})) = H^0(S^1 \vee S^1; \underline{H}^0(S^1 \vee S^1 \vee S^1)) \quad (4.2)$$

$$H^1(\text{Conf}_2(T - \{1\})) = H^0(S^1 \vee S^1; \underline{H}^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)) \quad (4.3)$$

$$\oplus H^1(S^1 \vee S^1; \underline{H}^0(S^1 \vee S^1 \vee S^1)) \quad (4.4)$$

$$H^2(\text{Conf}_2(T - \{1\})) = H^1(S^1 \vee S^1; \underline{H}^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)) \quad (4.5)$$

$$H^k(\text{Conf}_2(T - \{1\})) = 0 \quad \text{si } k \geq 3 \quad (4.6)$$

A continuación determinaremos cada uno de los términos involucrados en la sucesión espectral, para ello determinaremos primero la acción de $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ sobre las cohomologías respectivas. Para ver la acción de los generadores h y v , primero tomamos $a_2 \in p_*^{-1}(h)$ y $b_2 \in p_*^{-1}(v)$. Consideramos para cada $x \in F_3$ los elementos $C_h(x)$ y $C_v(x)$ definidos mediante

$$i_*(C_h(x)) = a_2 i_*(x) a_2^{-1} \quad i_*(C_v(x)) = b_2 i_*(x) b_2^{-1}$$

Estos elementos están bien definidos ya que i_* es inyectiva. Con esto se obtienen homomorfismos $C_h, C_v : F_3 \longrightarrow F_3$. Observemos entonces que:

$$\begin{aligned} a_2 i_*(\tilde{v}) a_2^{-1} &= a_2 b_3 a_2^{-1} & b_2 i_*(\tilde{v}) b_2^{-1} &= b_2 b_3 b_2^{-1} = b_3 \\ a_2 i_*(\tilde{r}) a_2^{-1} &= a_2 B_{23} a_2^{-1} = B_{23} & b_2 i_*(\tilde{r}) b_2^{-1} &= b_2 B_{23} b_2^{-1} = B_{23} \\ a_2 i_*(\tilde{h}) a_2^{-1} &= a_2 a_3 a_2^{-1} = a_3 & b_2 i_*(\tilde{h}) b_2^{-1} &= b_2 a_3 b_2^{-1} \end{aligned}$$

De la presentación del grupo $\pi_1(\text{Conf}_2(T - \{1\}))$ se tiene que:

$$\begin{aligned} B_{23}^{-1} &= a_3 a_2^{-1} b_3 a_2 a_3^{-1} b_3^{-1} \\ \Rightarrow a_2^{-1} b_3 a_2 &= a_3^{-1} B_{23}^{-1} b_3 a_3 \\ \Rightarrow a_3 a_2^{-1} b_3 a_2 a_3^{-1} &= B_{23}^{-1} b_3 \\ \Rightarrow a_2^{-1} a_3 b_3 a_3^{-1} a_2 &= B_{23}^{-1} b_3 \\ \Rightarrow a_3 b_3 a_3^{-1} &= a_2 B_{23}^{-1} b_3 a_2^{-1} = B_{23}^{-1} a_2 b_3 a_2^{-1} \\ \Rightarrow a_2 b_3 a_2^{-1} &= B_{23} a_3 b_3 a_3^{-1} \end{aligned}$$

De manera similar, de $B_{23} = b_3 b_2^{-1} a_3 b_2 b_3^{-1} a_3^{-1}$ se puede concluir que $b_2 a_3 b_2^{-1} = B_{23}^{-1} b_3 a_3 b_3^{-1}$. Por lo tanto, C_h y C_v tienen la siguiente regla de asignación en los generadores:

$$\begin{array}{ll} C_h : F_3 \longrightarrow F_3 & C_v : F_3 \longrightarrow F_3 \\ \tilde{v} \mapsto \tilde{r} \tilde{h} \tilde{v} \tilde{h}^{-1} & \tilde{v} \mapsto \tilde{v} \\ \tilde{r} \mapsto \tilde{r} & \tilde{r} \mapsto \tilde{r} \\ \tilde{h} \mapsto \tilde{h} & \tilde{h} \mapsto \tilde{r}^{-1} \tilde{v} \tilde{h} \tilde{v}^{-1} \end{array}$$

Siguiendo con el procedimiento para obtener la acción de los generadores h y v , ahora debemos considerar modelos para $[BC_h]$ y $[BC_v]$, esto es, funciones $\alpha, \beta : S^1 \vee S^1 \vee S^1 \longrightarrow S^1 \vee S^1 \vee S^1$ tales que $[\alpha] = [BC_h]$ y $[\beta] = [BC_v]$ y usar éstas para obtener la acción inducida en $H^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)$. Sin embargo, ya que $S^1 \vee S^1 \vee S^1$ es arco-conexo, sin importar los modelos considerados, se tendrá que la acción de $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ sobre $H^0(S^1 \vee S^1 \vee S^1)$ es trivial.

Ahora bien, para ver la acción sobre $H^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)$, recordemos que $\alpha : S^1 \vee S^1 \vee S^1 \longrightarrow S^1 \vee S^1 \vee S^1$ es un modelo para $[BC_h]$ si y sólo si el

siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(T - \{1, y_1\}) & \xrightarrow{C_h} & \pi_1(T - \{1, y_1\}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \pi_1(S^1 \vee S^1 \vee S^1) & \xrightarrow{\alpha_*} & \pi_1(S^1 \vee S^1 \vee S^1) \end{array}$$

De igual manera para $[BC_v]$. Así que sin importar cual sea el modelo, sabemos cuál será la acción inducida en $\pi_1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)$, y ya que

$$H_1(S^1 \vee S^1 \vee S^1) \cong \pi_1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)_{ab} \cong \pi_1(T - \{1, y_1\})_{ab}$$

entonces también podemos obtener la acción inducida en $H_1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)$, esta acción viene dada por:

$$\begin{aligned} (C_h)_* : H_1(S^1 \vee S^1 \vee S^1) &\longrightarrow H_1(S^1 \vee S^1 \vee S^1) \\ e_v &\mapsto e_r + e_v \\ e_r &\mapsto e_r \\ e_h &\mapsto e_h \\ (C_v)_* : H_1(S^1 \vee S^1 \vee S^1) &\longrightarrow H_1(S^1 \vee S^1 \vee S^1) \\ e_v &\mapsto e_v \\ e_r &\mapsto e_r \\ e_h &\mapsto e_h - e_r \end{aligned}$$

donde e_v, e_r y e_h son las clases de los elementos \tilde{v}, \tilde{r} y \tilde{h} en $H_1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)$. Las funciones $(C_h)_*$ y $(C_v)_*$ están representadas en la base $\{e_v, e_r, e_h\}$ por las siguientes matrices:

$$(C_h)_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (C_v)_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así que los duales C_h^* y C_v^* están representados en $H^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)$ con la matriz transpuesta respectiva, esto es:

$$C_h^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_v^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Siendo esta la acción de F_2 sobre $H^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)$. Así que ya hemos descrito cómo actúa π_1 sobre las H^q respectivas, por lo tanto, ya podemos

calcular las cohomologías involucradas en la sucesión espectral.

Ya que la acción de F_2 sobre H^0 es trivial, entonces

$$\begin{aligned} H^0(S^1 \vee S^1; \underline{H}^0(S^1 \vee S^1 \vee S^1)) &\cong H^0(S^1 \vee S^1; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \\ H^1(S^1 \vee S^1; \underline{H}^0(S^1 \vee S^1 \vee S^1)) &\cong H^1(S^1 \vee S^1; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^2 \end{aligned}$$

Ahora bien, recordemos que $H^0(X; \underline{M}) = M^{\pi_1(X)}$, así que

$$H^0(S^1 \vee S^1; \underline{H}^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)) \cong H^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)^{F_2} \quad (4.7)$$

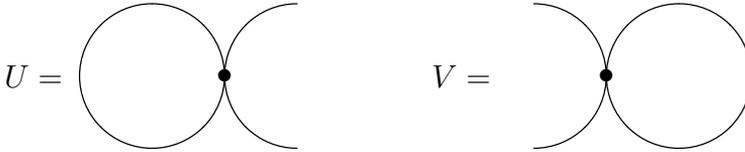
Si (x, y, z) está fijo bajo C_h^* y C_v^* entonces $(x, y, z) = (x + y, y, z)$ y $(x, y, z) = (x, y, -y + z)$, de donde $y = 0$. Esto es, los puntos fijos corresponden a los de la forma $(x, 0, z)$. Por lo tanto

$$H^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)^{F_2} \cong (\mathbb{Q}^3)^{F_2} = \{(x, 0, z) \in \mathbb{Q}^3\} \cong \mathbb{Q}^2$$

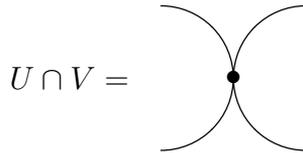
Así que

$$H^0(\text{Conf}_2(T - \{1\})) \cong \mathbb{Q} \quad H^1(\text{Conf}_2(T - \{1\})) \cong \mathbb{Q}^4$$

Para calcular el término restante $H^1(S^1 \vee S^1; \underline{H}^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1))$ haremos uso de la sucesión de Mayer-Vietoris con coeficientes locales. Consideremos los siguientes abiertos:



Estos abiertos son tales que $U, V \simeq S^1$, $U \cup V = S^1 \vee S^1$ y



con lo cual, $U \cap V \simeq pt$. Tenemos entonces la siguiente sucesión exacta larga:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(S^1 \vee S^1; \underline{M}) & \longrightarrow & H^0(S^1; \underline{M}) \oplus H^0(S^1; \underline{M}) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ H^1(S^1; \underline{M}) \oplus H^1(S^1; \underline{M}) & \longleftarrow & H^1(S^1 \vee S^1; \underline{M}) & \longleftarrow & H^0(pt; \underline{M}) & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

donde $\underline{M} = \underline{H}^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1; \mathbb{Q})$. Los coeficientes locales de cada término en la sucesión de Mayer-Vietoris heredan la acción del grupo fundamental restringido a los espacios correspondientes. Esto es, $\pi_1(pt)$ actúa de manera trivial sobre M , mientras el generador de uno de los $\pi_1(S^1)$ actúa sobre M mediante C_h^* y en el otro mediante C_v^* . Ahora bien, el término $H^0(S^1 \vee S^1; \underline{M})$ ya fue calculado en (4.7), mientras que en los demás términos se tiene lo siguiente;

$$\begin{aligned} H^0(U; \underline{M}) &\cong H^0(S^1; \underline{M}) \cong H^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)^{C_v^*} \cong \mathbb{Q}^2 \\ H^0(V; \underline{M}) &\cong H^0(S^1; \underline{M}) \cong H^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)^{C_h^*} \cong \mathbb{Q}^2 \end{aligned}$$

Luego, teniendo en cuenta que $H^1(X, \underline{M}) \cong M_{\pi_1(X)}$ cuando $\pi_1(X)$ es cíclico e infinito (ver pág. 58 de [6]), se tiene que

$$\begin{aligned} H^1(S^1; \underline{M}) &\cong H^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)_{C_h^*} \\ &\cong \mathbb{Q}^3 / \langle (x, y, z) - (x + y, y, z) \rangle \\ &\cong \mathbb{Q}^3 / \langle (y, 0, 0) \rangle \cong \mathbb{Q}^2 \\ H^1(S^1; \underline{M}) &\cong H^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)_{C_v^*} \\ &\cong \mathbb{Q}^3 / \langle (x, y, z) - (x, y, z - y) \rangle \\ &\cong \mathbb{Q}^3 / \langle (0, 0, y) \rangle \cong \mathbb{Q}^2 \end{aligned}$$

Se tiene entonces la siguiente sucesión exacta en la que se encuentra el término que nos interesa:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Q}^2 & \rightarrow & \mathbb{Q}^2 \oplus \mathbb{Q}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{Q}^3 \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & 0 & \leftarrow & \mathbb{Q}^2 \oplus \mathbb{Q}^2 \leftarrow H^1(S^1 \vee S^1; \underline{M}) \end{array}$$

donde f es la inclusión de los puntos fijos, esto es, $i(x, y) = (x, 0, y)$ y $f(u, v) = i(u) - i(v)$. Es claro que $\text{Im}(f) \cong \mathbb{Q}^2$ y por lo tanto

$$\text{Coker}(f) \cong \mathbb{Q}^3 / \mathbb{Q}^2 \cong \mathbb{Q}$$

Con lo cual, se tiene la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow H^1(S^1 \vee S^1; \underline{M}) \rightarrow \mathbb{Q}^2 \oplus \mathbb{Q}^2 \rightarrow 0$$

Ya que $\mathbb{Q}^2 \oplus \mathbb{Q}^2$ es libre, entonces esta sucesión se escinde, y así

$$H^1(S^1 \vee S^1; \underline{M}) \cong \mathbb{Q}^5$$

Por lo tanto, $H^2(\text{Conf}_2(T - \{1\})) \cong \mathbb{Q}^5$. Con esto se ha logrado calcular la cohomología racional de $\text{Conf}_2(T - \{1\})$.

Ahora bien, recordemos que la acción de $W \cong \{1, \sigma\}$ sobre $\text{Conf}_2(T - \{1\})$ es tal que $\sigma \cdot ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ((x_2, x_1), (y_1, y_2))$ y estamos interesados en saber la acción inducida sobre la cohomología. Ya que $\text{Conf}_2(T - \{1\})$ es conexo, se sigue que en H^0 , esta acción es trivial. En dimensión 1, los generadores del grupo fundamental de $\text{Conf}_2(T - \{1\})$, son tales que

$$\sigma \cdot a_2 = b_2 \quad \sigma \cdot a_3 = b_3 \quad \sigma \cdot b_2 = a_2 \quad \sigma \cdot b_3 = a_3$$

Por lo tanto, en $H^1(\text{Conf}_2(T - \{1\})) \cong \mathbb{Q}^4$ la acción es tal que

$$\sigma \cdot e_1 = e_2 \quad \sigma \cdot e_2 = e_1 \quad \sigma \cdot e_3 = e_4 \quad \sigma \cdot e_4 = e_3$$

En términos de representaciones se tiene:

$$H^0(\text{Conf}_2(T - \{1\})) = 1 \quad H^1(\text{Conf}_2(T - \{1\})) = 2 \oplus 2\sigma$$

Ahora bien, para determinar la acción sobre H^2 , recordemos primero que $\text{Conf}_2(T - \{1\})$ era parte de la siguiente fibración homotópica:

$$\begin{aligned} S^1 \vee S^1 \vee S^1 &\longrightarrow \text{Conf}_2(T - \{1\}) \xrightarrow{\tilde{p}} S^1 \vee S^1 \\ &\quad (x, y) \mapsto \tilde{p}(x) \end{aligned}$$

donde \tilde{p} es la proyección radial del centro del toro hacia su 1-esqueleto con su CW -estructura usual (esto último ya que \tilde{p} es un modelo para $[Bp_*]$). Ahora bien, la acción de \mathbb{Z}_2 sobre $\text{Conf}_2(T - \{1\})$ induce una acción sobre $S^1 \vee S^1$ y sobre $S^1 \vee S^1 \vee S^1$, de tal manera que \tilde{p} es equivariante. Tal acción sobre $S^1 \vee S^1$ y $S^1 \vee S^1 \vee S^1$ respectivamente está dada por:

$$\sigma \cdot (s)_1 = (s)_2 \quad \sigma \cdot (s)_1 = (s)_3 \quad (4.8)$$

$$\sigma \cdot (s)_2 = (s)_1 \quad \sigma \cdot (s)_2 = (s^{-1})_2 \quad (4.9)$$

$$\sigma \cdot (s)_3 = (s)_1 \quad (4.10)$$

Ya que $H^2(\text{Conf}_2(T - \{1\})) \cong H^1(S^1 \vee S^1; \underline{H}^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)) \cong \mathbb{Q}^5$ y la sucesión espectral de Serre es natural respecto a funciones entre fibracio-nes, basta conocer cuál es la acción sobre $H^1(S^1 \vee S^1; \underline{H}^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1))$. Recordemos que en el argumento anterior obtuvimos la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \text{Coker}(f) \xrightarrow{\delta} H^1(S^1 \vee S^1; \underline{M}) \xrightarrow{g} H^1(S^1_1; \underline{M}) \oplus H^1(S^1_2; \underline{M}) \longrightarrow 0$$

Ya que la sucesión anterior se escinde y estamos tratando con una acción de un grupo finito, entonces existe una escisión equivariante

$$r : H^1(S_1^1; \underline{M}) \oplus H^1(S_2^1; \underline{M}) \longrightarrow H^1(S^1 \vee S^1; \underline{M})$$

Así que la acción de \mathbb{Z}_2 sobre $H^1(S_1^1; \underline{M}) \oplus H^1(S_2^1; \underline{M})$ determinará la acción sobre $\text{Im}(r) \cong \mathbb{Q}^4 \subset H^1(S^1 \vee S^1; \underline{M})$. Esta acción es la que viene dada en 4.8. Ya que

$$\begin{aligned} H^1(S_1^1; \underline{M}) \oplus H^1(S_2^1; \underline{M}) &\cong H^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)_{C_v^*} \oplus H^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1)_{C_h^*} \\ &\cong \frac{\langle v_1, r_1, h_1 \rangle_{ab}}{\langle h_1 \rangle} \oplus \frac{\langle v_2, r_2, h_2 \rangle_{ab}}{\langle v_2 \rangle} \\ &\cong \langle \tilde{v}, \tilde{r}_1 \rangle \oplus \langle \tilde{r}_2, \tilde{h} \rangle \end{aligned}$$

Dado que la acción de σ sobre $S_1^1 \vee S_2^1$, manda los elementos de S_1^1 a S_2^1 y viceversa, y considerando la acción de σ sobre $S^1 \vee S^1 \vee S^1$ se tiene que

$$\begin{array}{lll} \sigma \cdot v_1 = h_2 & \sigma \cdot r_1 = -r_2 & \sigma \cdot h_1 = v_2 \\ \sigma \cdot v_2 = h_1 & \sigma \cdot r_2 = -r_1 & \sigma \cdot h_2 = v_1 \end{array}$$

y por lo tanto

$$\begin{array}{ll} \sigma \cdot \tilde{v} = \tilde{h} & \sigma \cdot \tilde{h} = \tilde{v} \\ \sigma \cdot \tilde{r}_1 = -\tilde{r}_2 & \sigma \cdot \tilde{r}_2 = -\tilde{r}_1 \end{array}$$

Así que falta determinar únicamente la acción de σ sobre el último generador de $H^1(S^1 \vee S^1; \underline{M})$. Recordemos que

$$\begin{aligned} H^1(S^1 \vee S^1; \underline{M}) &\cong \text{Coker}(f) \oplus (H^1(S_1^1; \underline{M}) \oplus H^1(S_2^1; \underline{M})) \\ &\cong \mathbb{Q} \oplus (\mathbb{Q}^2 \oplus \mathbb{Q}^2) \end{aligned}$$

mediante el isomorfismo que viene dado por

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Q} \oplus (\mathbb{Q}^2 \oplus \mathbb{Q}^2) &\longrightarrow H^1(S^1 \vee S^1; \underline{M}) \\ (m, p) &\mapsto \delta(m) + r(p) \end{aligned}$$

Así que el último generador es el que viene dado por $\delta(\tilde{r}_3)$, donde \tilde{r}_3 es el generador de $\text{Coker}(f)$. Ya que

$$f : \mathbb{Q}^2 \oplus \mathbb{Q}^2 \longrightarrow H^1(S^1 \vee S^1 \vee S^1) \cong \langle v, r, h \rangle_{ab}$$

e $\text{Im}(f) = \langle v, h \rangle$, entonces $\text{Coker}(f) \cong \mathbb{Q}\tilde{r}_3$, y además $\sigma \cdot \tilde{r}_3 = -\tilde{r}_3$. Por lo tanto, el elemento en el que estamos interesados es $\sigma \cdot \delta(\tilde{r}_3)$. Ya que

$\sigma \cdot \delta(\tilde{r}_3) = \sigma^*(\delta(\tilde{r}_3))$ donde $\sigma : (S^1 \vee S^1, U, V) \longrightarrow (S^1 \vee S^1, V, U)$, se tiene que el siguiente diagrama debe ser conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} \cong \frac{H^0(U \cap V; M)}{\text{Im}(f)} & \xrightarrow{\delta} & H^1(S^1 \vee S^1) \\ \downarrow \sigma^* & & \downarrow \sigma^* \\ \mathbb{Q} \cong \frac{H^0(V \cap U; M)}{\text{Im}(f)} & \xrightarrow{\delta'} & H^1(S^1 \vee S^1) \end{array}$$

Y de aquí se sigue que $\sigma^* \circ \delta = \delta' \circ \sigma^*$, donde δ es la función borde de la sucesión de Mayer-Vietoris que induce la inclusión $i_{UV} : U \cap V \longrightarrow S^1 \vee S^1$ y δ' es la función borde que induce la inclusión $i_{VU} : V \cap U \longrightarrow S^1 \vee S^1$. Ya que $\sigma \cdot \tilde{r}_3 = -\tilde{r}_3$ entonces $\sigma^*(x) = -x$. Veamos ahora que la función δ' que induce i_{VU} es $-\delta$.

Consideremos $[e] \in H^0(U \cap V)$, el elemento $[\delta(e)]$ resulta de un proceso en el que primero se toma un elemento

$$(a, b) \in C^0(U) \oplus C^0(V)$$

tal que $i_U^\#(a) - i_V^\#(b) = e$. Luego, aplicamos la función δ para tener el elemento $(\delta(a), \delta(b)) \in C^1(U) \oplus C^1(V)$ y finalmente un elemento $m \in C^1(S^1 \vee S^1)$ tal que $(j_U^\#(m), j_V^\#(m)) = (\delta(a), \delta(b))$ es asignado al borde. Esto es, $[\delta(e)] = [m]$, donde las funciones

$$\begin{array}{ll} i_U : U \cap V \longrightarrow U & i_V : U \cap V \longrightarrow V \\ j_U : U \longrightarrow S^1 \vee S^1 & j_V : V \longrightarrow S^1 \vee S^1 \end{array}$$

son las respectivas inclusiones. Por otro lado, con el proceso análogo del mismo elemento con la otra sucesión, se tiene primero que el elemento $(-b, -a) \in C^0(V) \oplus C^0(U)$ es tal que $i_V^\#(-b) - i_U^\#(-a) = e$. Luego, aplicando la función δ se tiene el elemento $(\delta(-b), \delta(-a)) \in C^1(V) \oplus C^1(U)$. Y finalmente, tomando el elemento $-m$ se tiene que

$$(j_V(-m), j_U(-m)) = (-\delta(b), -\delta(a))$$

Por lo tanto, el valor asignado correspondiente es $-m$, esto es,

$$[\delta'(e)] = [-m] = [-\delta(e)]$$

En conclusión, la acción de σ sobre $\delta(\tilde{r}_3)$ es la trivial, pues:

$$\begin{aligned}\sigma \cdot \delta(\tilde{r}_3) &= \delta' \circ \sigma^*(\tilde{r}_3) = \delta'(-\tilde{r}_3) \\ &= -\delta(-\tilde{r}_3) = \delta(\tilde{r}_3)\end{aligned}$$

Con esto ya se tiene una descripción de la acción sobre los generadores, la cual da por resultado la siguiente acción sobre \mathbb{Q}^5 :

$$\sigma \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto (x_5, -x_4, x_3, -x_2, x_1)$$

En términos de representaciones y usando la Proposición 1.8.8 se tiene:

$$H^2(\text{Conf}_2(T - \{1\})) = 3 \oplus 2\sigma$$

Teniendo en cuenta que la acción sobre $H^k(T)$ es como en la sección anterior y que $U(2)/T \cong_{\mathbb{Z}_2} S^2$, ahora podemos pasar a calcular los puntos fijos de la acción en cada dimensión de las cohomologías.

Ya que $\text{Conf}_3^{\text{ab}}(U(2))$ es arco-conexo, entonces

$$H^0(\text{Conf}_3^{\text{ab}}(U(2))) \cong \mathbb{Q}$$

Para la dimensión 1 se tiene que

$$\begin{aligned}H^1(\text{Conf}_3^{\text{ab}}(U(2))) &\cong H^1(U(2)/T \times \text{Conf}_3(T))^{\mathbb{Z}_2} \\ &\cong [H^0(S^2) \otimes [(H^0(T) \otimes H^1(\text{Conf}_2(T - \{1\}))) \\ &\quad \oplus (H^1(T) \otimes H^0(\text{Conf}_2(T - \{1\})))]^{\mathbb{Z}_2} \\ &\cong [1 \otimes ((1 \otimes (2 \oplus 2\sigma)) \oplus ((1 \oplus \sigma) \otimes 1))]^{\mathbb{Z}_2} \\ &\cong [3 + 3\sigma]^{\mathbb{Z}_2} \cong \mathbb{Q}^3\end{aligned}$$

Para la dimensión 2 se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}H^2(\text{Conf}_3^{\text{ab}}(U(2))) &\cong [(H^0(S^2) \otimes [(H^2(T) \otimes H^0(\text{Conf}_2(T - \{1\}))) \\ &\quad \oplus (H^1(T) \otimes H^1(\text{Conf}_2(T - \{1\})) \\ &\quad \oplus (H^0(T) \otimes H^2(\text{Conf}_2(T - \{1\})))] \\ &\quad \oplus (H^2(S^2) \otimes H^0(\text{Conf}_3(T)))]^{\mathbb{Z}_2} \\ &\cong [(\sigma \oplus ((1 \oplus \sigma) \otimes (2 \oplus 2\sigma)) \oplus (3 \oplus 2\sigma)) \oplus \sigma]^{\mathbb{Z}_2} \\ &\cong [\sigma \oplus (4 \oplus 4\sigma) \oplus (3 \oplus 2\sigma) \oplus \sigma]^{\mathbb{Z}_2} \\ &\cong [7 + 8\sigma]^{\mathbb{Z}_2} \cong \mathbb{Q}^7\end{aligned}$$

Para la dimensión 3 se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
H^3(\text{Conf}_3^{\text{ab}}(U(2))) &\cong [H^0(S^2) \otimes [H^1(T) \otimes H^2(\text{Conf}_2(T - \{1\})) \\
&\quad \oplus H^2(T) \otimes H^1(\text{Conf}_2(T - \{1\}))] \\
&\quad \oplus H^2(S^2) \otimes [H^0(T) \otimes H^1(\text{Conf}_2(T - \{1\})) \\
&\quad \oplus H^1(T) \otimes H^0(\text{Conf}_2(T - \{1\}))]]^{\mathbb{Z}_2} \\
&\cong [((1 \oplus \sigma) \otimes (3 \oplus 2\sigma)) \oplus (\sigma \otimes (2 \oplus 2\sigma)) \\
&\quad \oplus (\sigma \otimes ((2 \oplus 2\sigma) \oplus (1 \oplus \sigma)))]^{\mathbb{Z}_2} \\
&\cong [(5 \oplus 5\sigma) \oplus (2\sigma \oplus 2) \oplus (2\sigma \oplus 2) \oplus (1 \oplus \sigma)]^{\mathbb{Z}_2} \\
&\cong [10 \oplus 10\sigma]^{\mathbb{Z}_2} \cong \mathbb{Q}^{10}
\end{aligned}$$

Para la dimensión 4 se tiene que:

$$\begin{aligned}
H^4(\text{Conf}_3^{\text{ab}}(U(2))) &\cong [H^0(S^2) \otimes [H^2(T) \otimes H^2(\text{Conf}_2(T - \{1\}))] \\
&\quad \oplus H^2(S^2) \otimes [H^0(T) \otimes H^2(\text{Conf}_2(T - \{1\})) \\
&\quad \oplus H^1(T) \otimes H^1(\text{Conf}_2(T - \{1\})) \\
&\quad \oplus H^2(T) \otimes H^0(T)]]^{\mathbb{Z}_2} \\
&\cong [(\sigma \otimes (3 \oplus 2\sigma)) \\
&\quad \oplus (\sigma \otimes ((3 \oplus 2\sigma) \oplus ((1 \oplus \sigma) \otimes (2 \oplus 2\sigma)) \oplus \sigma))]^{\mathbb{Z}_2} \\
&\cong [(3\sigma \oplus 2) \oplus (3\sigma \oplus 2) \oplus (4\sigma \oplus 4) \oplus 1]^{\mathbb{Z}_2} \\
&= [9 \oplus 10\sigma]^{\mathbb{Z}_2} \cong \mathbb{Q}^9
\end{aligned}$$

Para la dimensión 5 se tiene que:

$$\begin{aligned}
H^5(\text{Conf}_3^{\text{ab}}(U(2))) &\cong [H^2(S^2) \otimes [H^1(T) \otimes H^2(\text{Conf}_2(T - \{1\})) \\
&\quad \oplus H^2(T) \otimes H^1(\text{Conf}_2(T - \{1\}))]]^{\mathbb{Z}_2} \\
&\cong [\sigma \otimes [((1 \oplus \sigma) \otimes (3 \oplus 2\sigma)) \oplus (\sigma \otimes (2 \oplus 2\sigma))]^{\mathbb{Z}_2} \\
&\cong [(5 \oplus 5\sigma) \oplus (2 \oplus 2\sigma)]^{\mathbb{Z}_2} \\
&\cong [7 \oplus 7\sigma]^{\mathbb{Z}_2} \cong \mathbb{Q}^7
\end{aligned}$$

Para la dimensión 6 se tiene que:

$$\begin{aligned}
H^6(\text{Conf}_3^{\text{ab}}(U(2))) &\cong [H^2(S^2) \otimes H^2(T) \otimes H^2(\text{Conf}_2(T - \{1\}))]^{\mathbb{Z}_2} \\
&\cong [\sigma \otimes \sigma \otimes (3 \otimes 2\sigma)]^{\mathbb{Z}_2} \\
&\cong [3 \otimes 2\sigma]^{\mathbb{Z}_2} \cong \mathbb{Q}^3
\end{aligned}$$

Finalmente, si $k \geq 7$, cada término de la fórmula de Künneth tiene un cero, por lo tanto,

$$H^k(\text{Conf}_3^{\text{ab}}(U(2))) = 0$$

En resumen, hemos obtenido:

$$H^n(\text{Conf}_3^{\text{ab}}(U(2)), \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Q}^3 & \text{si } n = 1, 6 \\ \mathbb{Q}^7 & \text{si } n = 2, 5 \\ \mathbb{Q}^{10} & \text{si } n = 3 \\ \mathbb{Q}^9 & \text{si } n = 4 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora bien, para $SU(3)$ y $Sp(2)$ el toro maximal estándar es de dimensión 2. Teniendo en cuenta que

$$H^n(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(3))) \cong \bigoplus_{i=0}^n H^{n-i}(SU(3)/T) \otimes H^i(\text{Conf}_k(T))$$

$$H^n(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(Sp(2))) \cong \bigoplus_{i=0}^n H^{n-i}(Sp(2)/T) \otimes H^i(\text{Conf}_k(T))$$

y que la cohomología racional de $\text{Conf}_k(T)$ la hemos determinado en este capítulo para $k = 2, 3$, entonces es posible determinar la cohomología racional de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(3))$ y $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(Sp(2))$ para $k = 2, 3$ usando los mismos métodos que los usados en este capítulo.

4.5. Cohomología en dimensión 1

En esta sección estaremos interesados en la cohomología de dimensión 1 de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ para todos los grupos de Lie que nos interesan: $U(r)$, $SU(r+1)$ ó $Sp(r)$. Consideremos entonces $G_r = U(r)$, $SU(r+1)$ ó $Sp(r)$, W_r el grupo de Weyl de G_r y T_r el toro maximal de G_r . Recordemos ahora que el primer grupo de cohomología del espacio de k -tuplas que conmutan tiene la siguiente descomposición:

$$H^1(\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G_r)) \cong H^1(G_r/T_r \otimes (T_r)^k)^{W_r}$$

$$\cong [(H^0(G_r/T_r) \otimes H^1(T^k)) \oplus (H^1(G_r/T_r) \otimes H^0(T^k))]^{W_r}$$

donde las acciones de W_r sobre G_r/T_r y sobre $(T_r)^k$ son las que vienen dadas por

$$gT_r \cdot nT_r = gnT_r \quad nT_r \cdot (t_1, \dots, t_k) = (nt_1n^{-1}, \dots, nt_kn^{-1})$$

donde $t_i \in T_r$. El primer grupo de cohomología del espacio de configuraciones de k -tuplas que conmutan tiene una descomposición similar:

$$\begin{aligned} H^1(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_r)) &\cong H^1(G_r/T_r \otimes \text{Conf}_k(T_r))^{W_r} \\ &\cong [H^0(G_r/T_r) \otimes H^1(\text{Conf}_k(T_r)) \\ &\quad \oplus H^1(G_r/T_r) \otimes H^0(\text{Conf}_k(T_r))]^{W_r} \end{aligned}$$

Las acciones de W_r sobre G_r/T_r y $\text{Conf}_k(T_r)$ son las mismas que en el caso $\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$. Por lo tanto, la identidad $1 : G_r/T_r \rightarrow G_r/T_r$ y la inclusión $i : \text{Conf}_k(T_r) \rightarrow (T_r)^k$ son funciones equivariantes que a su vez inducen homomorfismos equivariantes en cohomología. Claramente la función identidad en G_r/T_r induce el isomorfismo identidad en $H^0(G_r/T_r)$ y en $H^1(G_r/T_r)$. Mientras que para $r \geq 2$ se tiene que $\text{Conf}_k(T_r)$ es arco-conexo y por lo tanto la inclusión también induce el isomorfismo identidad $i_* : H^0(\text{Conf}_k(T_r)) \rightarrow H^0((T_r)^k)$.

Lo que haremos ahora es mostrar que bajo ciertas condiciones, la inclusión también induce un isomorfismo en H^1 . Para comenzar recordaremos el siguiente teorema dado por Birman. Este teorema es muy importante para los resultados obtenidos en esta sección.

Teorema 4.5.1 (Teorema 1 de [4]). *Sea M una variedad cerrada y conexa con $\dim(M) \geq 3$, entonces la inclusión $i : \text{Conf}_k(M) \rightarrow M^k$ induce un isomorfismo*

$$\pi_1(\text{Conf}_k(M)) \cong \pi_1(M^k)$$

Recordemos que T_r es una variedad cerrada. Por lo tanto, para $r \geq 3$, se tiene por el Teorema 4.5.1 que la inclusión $i : \text{Conf}_k(T_r) \rightarrow (T_r)^k$ induce un isomorfismo:

$$i_* : \pi_1(\text{Conf}_k(T_r)) \xrightarrow{\cong} \pi_1((T_r)^k)$$

Ya que el primer grupo de homología es naturalmente isomorfo a la abelianización del grupo fundamental para espacios arco-conexos entonces la inducida en homología también es un isomorfismo:

$$i_* : H_1(\text{Conf}_k(T_r)) \xrightarrow{\cong} H_1((T_r)^k)$$

Ya que hay un isomorfismo natural $H^1(X; \mathbb{Q}) \cong \text{Hom}(H_1(X); \mathbb{Q})$, entonces la inducida en cohomología también es un isomorfismo:

$$i^* : H^1((T_r)^k) \xrightarrow{\cong} H^1(\text{Conf}_k(T_r))$$

Como ya hemos comentado, la inclusión es una función equivariante y de igual manera la identidad, por lo tanto, si $r \geq 3$ entonces:

$$\begin{aligned} & [H^0(G_r/T_r) \otimes H^1(T^k) \oplus H^1(G_r/T_r) \otimes H^0(T^k)]^{W_r} \\ & \cong [H^0(G_r/T_r) \otimes H^1(\text{Conf}_k(T_r)) \oplus H^1(G_r/T_r) \otimes H^0(\text{Conf}_k(T_r))]^{W_r} \end{aligned}$$

Así que en consecuencia:

$$H^1(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_r)) \cong H^1(\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G_r))$$

La dimension del toro maximal de $SU(r+1)$, $U(r)$ y $Sp(r)$ es mayor o igual que 3 cuando $r \geq 3$. Por lo tanto, si $r \geq 3$ se tiene lo siguiente:

- $H^1(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(r+1))) \cong H^1(\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, SU(r+1)))$
- $H^1(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(Sp(r))) \cong H^1(\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, Sp(r)))$
- $H^1(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(U(r))) \cong H^1(\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, U(r)))$

Ahora bien, si $G = SU(r+1)$, $U(r)$ ó $Sp(r)$ con $r \geq 3$ entonces $\pi_1(G) = 0$ y por lo tanto $\pi_1(\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)) \cong \pi_1(G)^k = 0$ (ver Teorema 1.1 de [17]). De esto último también se tiene que $H_1(\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)) = 0$ y por lo tanto, $H^1(\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)) = 0$. Así que:

- $H^1(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(SU(n+1))) = 0$ si $n \geq 3$
- $H^1(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(Sp(n))) = 0$ si $n \geq 3$
- $H^1(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(U(n))) = 0$ si $n \geq 3$

No todos los grupos de cohomología en dimensión 1 son cero, pues en cálculos anteriores hemos mostrado que

- $H^1(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(2))) = \mathbb{Q}^2$
- $H^1(\text{Conf}_3^{\text{ab}}(U(2))) = \mathbb{Q}^3$

Capítulo 5

Estabilidad homológica

En este capítulo mostraremos los resultados que hemos obtenido sobre la estabilidad homológica de los espacios de configuraciones de tuplas que conmutan.

5.1. Definición y propiedades básicas

Comenzaremos introduciendo la categoría **FI** para luego hablar de los **FI**-módulos y **FI**-espacios. Estos conceptos están relacionados con la estabilidad por representaciones como mencionaremos más adelante.

Definición 5.1.1. Sea $\{X_n, \phi_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de espacios topológicos junto con funciones $\phi_n : X_n \rightarrow X_{n+1}$. Decimos que esta sucesión es homológicamente estable en dimensión m si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(\phi_n)_* : H_m(X_n) \rightarrow H_m(X_{n+1})$ es un isomorfismo para toda $n \geq N$. En este caso decimos que es homológicamente estable en dimensión m en con rango estable N .

Definición 5.1.2. Definimos la categoría **FI** como aquella que tiene por objetos a los conjuntos $[n] = \{1, \dots, n\}$ y cuyos morfismos son las funciones inyectivas $\phi : [m] \rightarrow [n]$.

Algunas observaciones inmediatas son que $\text{Aut}([n]) \cong S_n$ y que el conjunto $\text{Mor}([m], [n])$ es vacío a menos que $m \leq n$. Además existe una acción de S_n sobre $\text{Mor}([m], [n])$ mediante la composición, es decir, si $\phi : [m] \rightarrow [n]$ y $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ entonces $\sigma \cdot \phi = \sigma \circ \phi$. Es claro que esta acción es transitiva y por lo tanto, cada morfismo ϕ puede ser escrito de la forma $\sigma \cdot i_{m,n}$, donde $i_{m,n} : [m] \rightarrow [n]$ es la inclusión de $[m]$ en $[n]$.

Definición 5.1.3. Un **FI** – módulo V sobre un anillo R es un funtor $V : \mathbf{FI} \rightarrow R\text{-Mód}$, donde $R\text{-Mód}$ es la categoría de R -módulos. Un sub **FI** – módulo de V es un **FI** – módulo V' con $V'([n]) \leq V([n])$ submódulo para cada n y $V'(\phi) = V(\phi)|_{V'([n])}$ para cada morfismo ϕ en **FI**. Por último, un **FI** – espacio X es un funtor $X : \mathbf{FI} \rightarrow \text{Top}$.

Observemos que si X es un **FI** – espacio entonces podemos componer con el funtor $H_m(-; \mathbb{Q}) : \text{Top} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-Mód}$ para obtener un **FI** – módulo. A partir de aquí denotaremos $V_n = V([n])$ y $\phi_* = V(\phi)$.

Definición 5.1.4. Decimos que un **FI** – módulo V es generado en la etapa n si para cada $k \geq n$, la unión de las imágenes de V_n bajo morfismos $\phi_* : V_n \rightarrow V_k$ genera V_k . Si el **FI** – módulo V es sobre un campo, diremos que es finitamente generado si es generado en alguna etapa n y V_n es de dimensión finita.

Claramente si un **FI** – módulo es generado en la etapa n entonces también es generado en la etapa r para toda $r \geq n$. Ya que todos los módulos trabajados aquí son sobre \mathbb{Q} y de dimensión finita, entonces un **FI** – módulo V será finitamente generado si y sólo si es generado en alguna etapa n .

Definición 5.1.5. Dados **FI**-módulos V, W , el producto tensorial $V \otimes W$ es el **FI** – módulo tal que $(V \otimes W)_n = V_n \otimes W_n$ y donde los morfismos actúan diagonalmente.

Proposición 5.1.6 (Proposición 5.2 de [27]). Si V y W son **FI**-módulos de dimensión finita que son generados en las etapas m y n respectivamente, entonces $V \otimes W$ es generado en alguna etapa k , con $k \leq m + n$.

Definición 5.1.7. Definimos la categoría $\mathbf{FI}_\#$ como aquella que tiene por objetos los conjuntos $[n]_0 = \{0, \dots, n\}$ con punto base 0, y los morfismos son aquellas funciones basadas $\phi : [n]_0 \rightarrow [m]_0$ que son inyectivas en el conjunto $[n]_0 \setminus \phi^{-1}(0)$. Definimos también un $\mathbf{FI}_\#$ – módulo como un funtor $V : \mathbf{FI}_\# \rightarrow R\text{-Mód}$ y un $\mathbf{FI}_\#$ -espacio como un funtor $X : \mathbf{FI}_\# \rightarrow \text{Top}$.

Claramente hay un encaje de **FI** en $\mathbf{FI}_\#$ y por lo tanto, cada $\mathbf{FI}_\#$ -módulo V tiene un **FI** – módulo asociado, restringiendo a lo largo de la inclusión $\mathbf{FI} \rightarrow \mathbf{FI}_\#$. Así que cada $\mathbf{FI}_\#$ -módulo también puede ser considerado un **FI** – módulo.

Un concepto relacionado con los **FI**-módulos son las sucesiones consistentes. Es de este tipo de sucesiones en las que originalmente se trabajaron los conceptos de estabilidad por representaciones. De hecho los **FI**-módulos surgieron a partir de las sucesiones consistentes, como herramientas para estudiarlas. Para hablar de estos conceptos recordaremos algunas propiedades de S_r -representaciones e introduciremos cierta notación.

Definición 5.1.8. *Dado $n \in \mathbb{N}$, diremos que $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ es una partición de n si $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1$ y $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$. Denotaremos $|\lambda| = n$ y diremos que k es la longitud de λ .*

Recordemos que existe una correspondencia entre las representaciones irreducibles de S_n y las particiones de n (Teorema 4.3 de [27]). Denotemos por V_λ a la representación correspondiente. Si $|\lambda| = l$, entonces para cualquier $n \geq l + \lambda_1$ definimos

$$\lambda[n] = (n - l, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$$

Claramente $|\lambda[n]| = n$. Observemos ahora que cada representación irreducible no trivial de S_n es de la forma $V_{\lambda[n]}$ para una única λ . Así que dada una representación V_n de S_n , escribiremos $c_\lambda(V_n)$ para la multiplicidad de $V_{\lambda[n]}$ en V_n .

Definición 5.1.9. *Sea $\{V_n\}$ una sucesión de S_n -representaciones junto con transformaciones lineales $\phi_n : V_n \rightarrow V_{n+1}$. Diremos que la sucesión $\{V_n, \phi_n\}$ es una sucesión consistente si ϕ_n es equivariante con respecto a las inclusiones $i_n : S_n \rightarrow S_{n+1}$. De manera análoga se define una sucesión consistente de S_n -espacios.*

Observemos que si V es un **FI**-módulo entonces podemos asociar la sucesión dada por $\{V_n, (i_n)_*\}$, donde $i_n : [n] \rightarrow [n+1]$ es la inclusión. Esta sucesión es tal que V_n es una S_n representación mediante

$$\begin{aligned} \pi_n : S_n &\longrightarrow \text{Aut}(V_n) \\ \sigma &\mapsto \sigma_* : V_n \longrightarrow V_n \end{aligned}$$

e i_* es equivariante bajo estas acciones, por lo tanto, la sucesión asociada es una sucesión consistente. Además, cada **FI**-módulo V está determinado por esta sucesión, ya que cada morfismo $\phi : [m] \rightarrow [n]$ puede ser escrito de la forma $\sigma \cdot i_{m,n}$. De manera similar, si X es un **FI**-espacio entonces X está determinado por su sucesión de S_n -espacios junto con sus funciones $(i_n)_*$.

Recíprocamente, una sucesión consistente no necesariamente se puede extender a un **FI** – módulo. El siguiente lema muestra las condiciones necesarias para que esto pueda ocurrir.

Lema 5.1.10 (Lema 3.4 de [27]). *Sea $\{V_n, \phi_n\}$ una sucesión consistente. Entonces esta sucesión extiende a un **FI**–módulo que tiene por sucesión asociada a $\{V_n, \phi_n\}$ si y solo si $\sigma_* \circ \phi_{n-1} \circ \dots \circ \phi_m = \phi_{n-1} \circ \dots \circ \phi_m$ para toda $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma(i) = i$ para $i \leq m$.*

En este caso, el **FI** – módulo al que extiende está dado por $[n] \mapsto V_n$ y $f = \sigma \circ i_{m,n} \mapsto \sigma_* \circ \phi_{m,n}$, donde $\phi_{m,n} = \phi_n \circ \dots \circ \phi_m$. Nosotros estaremos interesados únicamente en aquellas sucesiones que puedan extenderse, y en algunas ocasiones haremos uso del lema para tener un **FI** – módulo.

Definición 5.1.11. *Sea V un **FI**–módulo sobre un campo K de característica cero. Decimos que V es estable por representaciones si satisface las siguientes condiciones:*

- i) *Inyectividad: Las funciones $(i_n)_* : V_n \longrightarrow V_{n+1}$ son inyectivas a partir de una n suficientemente grande.*
- ii) *Suprayectividad: La imagen $(i_n)_*(V_n)$ genera a V_{n+1} como un $K[S_{n+1}]$ – módulo, a partir de una n suficientemente grande.*
- iii) *Multiplicidades: Existe un isomorfismo de S_n – representaciones*

$$V_n \cong \bigoplus_{\lambda} c_{\lambda[n]}(V_n) V_{\lambda[n]}$$

tal que a partir de una n suficientemente grande, la multiplicidad $c_{\lambda[n]}(V_n)$ es independiente de n para cada λ .

Las descomposiciones en representaciones irreducibles siempre son únicas, así que las multiplicidades se encuentran bien definidas. Un tipo de estabilidad más fuerte es el siguiente.

Definición 5.1.12. *Sea V un **FI**–módulo que es estable por representaciones, donde para cada λ existe N_λ tal que si $n \geq N_\lambda$ entonces $c_{\lambda[n]}(V_n)$ es constante. Decimos que V es uniformemente estable por representaciones si existe $N = N_\lambda$ para toda partición λ . En este caso decimos que V tiene rango estable N .*

La siguiente proposición relaciona a los **FI**-módulos que son finitamente generados con los que son uniformemente estables por representaciones.

Proposición 5.1.13 (Teoremas 4.27 y 4.28 de [27]). *Sea K un campo de característica cero y V un **FI**-módulo. Entonces V es finitamente generado si y sólo si es uniformemente estable por representaciones.*

Ahora bien, un resultado en el que estamos interesados es el siguiente, pues relaciona el rango estable con la etapa en la que se genera un **FI**-módulo, fue obtenido por Church-Ellenberg-Farb en [8].

Teorema 5.1.14. *Sea V un $\mathbf{FI}_\#$ -módulo sobre un campo de característica cero. Si V es finitamente generado como $\mathbf{FI}_\#$ -módulo en la etapa k , entonces V (visto como **FI**-módulo) es uniformemente estable por representaciones con rango estable $n = 2k$.*

Por último, el siguiente teorema es de gran utilidad para obtener estabilidad homológica en cierto tipo de espacios.

Teorema 5.1.15 (Teorema 4.20 de [24]). *Sea $\{X_n, \phi_n\}$ una sucesión consistente de S_n -espacios tal que la sucesión consistente $\{H_k(X_n; \mathbb{Q}), (\phi_n)_*\}$ extiende a un **FI**-módulo finitamente generado. Entonces la sucesión de espacios $\{X_n/S_n, \tilde{\phi}_n\}$ es homológicamente estable en dimensión k , donde*

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_n : X_n/S_n &\longrightarrow X_{n+1}/S_{n+1} \\ [x] &\mapsto [\phi_n(x)] \end{aligned}$$

*Si además el **FI**-módulo $H_k(X_\bullet; \mathbb{Q})$ es generado en la etapa d y extiende a un $\mathbf{FI}_\#$ -módulo entonces el rango estable de la sucesión $\{X_n/S_n, \tilde{\phi}_n\}$ es d .*

5.2. FI-módulos a partir de $U(r)$

Sea $G_r = U(r)$ y consideremos las inclusiones estándar:

$$\begin{aligned} j_r : G_r &\longrightarrow G_{r+1} \\ A &\mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Estas inclusiones son tales que $j_r(T_r) \subset T_{r+1}$, donde T_r y T_{r+1} son los toros maximales de G_r y G_{r+1} respectivamente.

Lema 5.2.1 (Lema 6.1 de [24]). *Las inclusiones estándar son tales que $j_r(N_{G_r}(T_r)) \subset N_{G_{r+1}}(T_{r+1})$ y además $N_{G_r}(T_r)/T_r \cong S_r$ de tal manera que las funciones inducidas $N_{G_r}(T_r)/T_r \longrightarrow N_{G_{r+1}}(T_{r+1})/T_{r+1}$ se convierten en las inclusiones estándar $S_r \longrightarrow S_{r+1}$.*

Esto muestra que la función ψ de la Proposición 3.1.5 es natural con respecto a j_r . Además, el isomorfismo $W_r = N_{G_r}(T_r)/T_r \cong S_r$ ó S_{r+1} según sea el caso, muestra que la acción de $N_{G_r}(T_r)/T_r$ sobre T_r dada por $nT_r \cdot t = ntn^{-1}$ corresponde a la acción de S_r sobre T_r que permuta las coordenadas del toro (ver pág 22 de [24]).

Retomemos la acción de W_r sobre G_r/T_r dada por $gT \cdot nT = gnT$ y consideremos las inclusiones inducidas

$$\begin{aligned} \tilde{j}_r : G_r/T_r &\longrightarrow G_{r+1}/T_{r+1} \\ AT_r &\mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T_{r+1} \end{aligned}$$

Se tiene que si $AT_r \in G_r/T_r$ y $nT_r \in W_r$ entonces

$$\begin{aligned} j_r(AT_r \cdot nT_r) &= j_r(AnT_r) = \begin{pmatrix} An & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T_{r+1} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T_{r+1} \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T_{r+1} \\ &= j_r(AT_r) \cdot \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T_{r+1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión $\{G_r/T_r, j_r\}_{r \geq 1}$ es una sucesión consistente. En el siguiente ejemplo mostramos que esta sucesión no extiende a un **FI** – módulo.

Ejemplo: Tomemos la matriz $n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, que bajo el isomorfismo $W_3 \cong S_3$, corresponde al elemento $\sigma = (2, 3)$. Este elemento es tal que $\sigma(1) = 1$, sin embargo,

$$\sigma_*(\tilde{j}_{1,3}(1)) = IT_3 \cdot nT_3 = nT_3 \neq IT_3 = \tilde{j}_{1,3}(1)$$

y por lo tanto, la sucesión no satisface las condiciones del Lema 5.1.10, con lo cual no extiende a un **FI** – módulo con esta acción.

Sin embargo, los S_r -módulos inducidos $H_n(G_r/T_r)$ sí se extienden a un **FI** – módulo como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 5.2.2 (Proposición 6.6 de [24]). *Las sucesiones consistentes de W_r -módulos $r \mapsto H_n(G_r/T_r)$ se extienden a **FI**-módulos finitamente generados.*

Ahora bien, consideremos $r \geq 1$, $T_r = (S^1)^r$ y la acción del grupo de Weyl $W_r \cong S_r$ sobre $\text{Conf}_k(T_r)$ dada por

$$nT \cdot (x_1, \dots, x_k) = (nx_1n^{-1}, \dots, nx_kn^{-1})$$

donde $x_i \in T_r$. Por un comentario realizado previamente, esta acción corresponde a la acción de $\sigma \in S_r$ dada por la acción que permuta las coordenadas en cada tupla:

$$\begin{aligned} \sigma \cdot ((x_{1,1}, \dots, x_{1,r}), \dots, (x_{k,1}, \dots, x_{k,r})) \\ = ((x_{1,\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{1,\sigma^{-1}(r)}), \dots, (x_{k,\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{k,\sigma^{-1}(r)})) \end{aligned}$$

Consideremos también la siguiente función:

$$\begin{aligned} \phi_r : \text{Conf}_k(T_r) &\longrightarrow \text{Conf}_k(T_{r+1}) \\ ((x_{1,1}, \dots, x_{1,r}), \dots, (x_{k,1}, \dots, x_{k,r})) &\mapsto ((x_{1,1}, \dots, x_{1,r}, 1), \dots, (x_{k,1}, \dots, x_{k,r}, 1)) \end{aligned}$$

Es claro que si $\sigma \in S_r$ y consideramos a $\tilde{\sigma} \in S_{r+1}$ como aquel que permuta a los primeros r elementos mediante σ entonces

$$\begin{aligned} \phi_r(\sigma \cdot ((x_{1,1}, \dots, x_{1,r}), \dots, (x_{k,1}, \dots, x_{k,r}))) \\ = \tilde{\sigma} \cdot \phi_r((x_{1,1}, \dots, x_{1,r}), \dots, (x_{k,1}, \dots, x_{k,r})) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión $\{\text{Conf}_k(T_r), \phi_r\}$ es una sucesión consistente. Ahora bien, consideremos $n \geq m$ y $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma(i) = i$ (con lo cual, $\sigma^{-1}(i) = i$) para $i \leq m$. Notemos que se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma \cdot (\phi_{n-1}(\dots(\phi_m(x_1, \dots, x_k))\dots)) &= ((x_1, 1, \dots, 1), \dots, (x_k, 1, \dots, 1)) \\ &= \phi_{n-1}(\dots(\phi_m(x_1, \dots, x_k))\dots) \end{aligned}$$

donde x_i denota un elemento de T_r . Con esto se cumplen las condiciones de la Proposición 5.1.10 y por lo tanto, la sucesión extiende a un **FI** – espacio con la estructura $[r] \mapsto \text{Conf}_k(T_r)$ y tal que a cada morfismo $f = \sigma \circ i_{m,n} : [m] \longrightarrow [n]$ le asigna $f_* = \sigma_* \circ \phi_{m,n} : X_m \longrightarrow X_n$,

donde $\phi_{m,n} = \phi_{n-1} \circ \dots \circ \phi_m$. Aplicando el funtor $H_n(\ ; \mathbb{Q})$ se tiene un **FI** – módulo dado por $r \mapsto H_n(\text{Conf}_k(T_r))$.

Ahora bien, recordemos que $\text{Conf}_k(T_r) \cong T_r \times \text{Conf}_{k-1}(T_r - \{1\})$ y notemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Conf}_k(T_r) & \longrightarrow & T_r \times \text{Conf}_{k-1}(T_r - \{1\}) \\ \downarrow i_r & & \downarrow i \times j_r \\ \text{Conf}_k(T_{r+1}) & \longrightarrow & T_{r+1} \times \text{Conf}_{k-1}(T_{r+1} - \{1\}) \end{array}$$

donde i y j_r son las funciones que agregan el elemento 1 al final de cada tupla. Es fácil verificar que la función j_r está bien definida y de manera similar al caso i_r , la sucesión $\{\text{Conf}_{k-1}(T_r - \{1\}), j_r\}$ es una sucesión consistente que extiende a un **FI** – espacio con el cual obtenemos un **FI** – módulo. Ahora bien, la fórmula de Künneth otorga una descomposición de la forma:

$$H_n(\text{Conf}_k(T_r)) \cong \bigoplus_{i=0}^n H_i(T_r) \otimes H_{n-i}(\text{Conf}_{k-1}(T_r - \{1\}))$$

Ya que este isomorfismo es natural con respecto a funciones coordenada a coordenada (en particular usando i y j_r), entonces ésta es una descomposición en cada uno de los siguientes **FI**–módulos:

$$r \mapsto H_i(T_r) \qquad r \mapsto H_{n-i}(\text{Conf}_{k-1}(T_r - \{1\}))$$

La siguiente proposición generaliza uno de los casos que nos interesan:

Proposición 5.2.3 (Corolario 6.3 de [24]). *Para cada $n \geq 1$, el **FI** – módulo $\{H_n((T_r)^k)\}$ es generado en la etapa n y es uniformemente estable por representaciones con rango estable $2n$.*

En la proposición anterior, la estructura de **FI**–módulo de $\{H_n((T_r)^k)\}$ viene inducida por las funciones

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_r &: (T_r)^k \longrightarrow (T_{r+1})^k \\ (t_1, \dots, t_k) &\mapsto ((t_1, 1), \dots, (t_k, 1)) \end{aligned}$$

Tomando el caso $k = 1$ se tiene que el **FI** – módulo $r \mapsto H_i(T_r)$ es finitamente generado en la etapa i . Veamos a continuación que los grupos

$H_n(\text{Conf}_k(T_r - \{1\}))$ son de dimensión finita. Para ello mostraremos algunos lemas técnicos. Recordemos primero de la Sección 1.4 que T_r es un CW -complejo de tal manera que el k -ésimo esqueleto de T_r , donde $k \leq r$, tiene celdas de dimensión k cuyas imágenes en T_r son de la forma $b_1 \times \dots \times b_r$, donde $a = \{x \mid x \in S^1\}$ aparece en el producto k veces y los $r - k$ términos restantes son $pt = \{1\}$. En particular, T_r es un CW -complejo de dimensión r que tiene una única celda de dimensión r . Además, ya que un elemento $z \in T_r^{(m)}$, donde $m \leq r$, pertenece a un subespacio de la forma $b_1 \times \dots \times b_r$, donde a aparece en el producto m veces, y los restantes $r - m$ términos son pt , entonces

$$\phi_r(z) \in b_1 \times \dots \times b_r \times pt \subset T_{r+1}^{(m)} \subset T_{r+1}^{(r)}$$

De manera similar, si $\sigma \in S_{r+1}$ entonces $\sigma \cdot z \in T_{r+1}^{(m)} \subset T_{r+1}^{(r)}$. Con esto puede verificarse que $r \mapsto T_r^{(m)}$, $r \mapsto T_r^{(r-1)}$ son **FI** - espacios y por lo tanto $r \mapsto H_k(T_r^{(m)})$, $r \mapsto H_k(T_r^{(r-1)})$ son **FI**-módulos.

Veamos ahora que las funciones $\sigma_* \circ \phi_r : T_r^{(m)} \longrightarrow T_{r+1}^{(m)}$ inducen morfismos como en la página 24; sea e_α^k , con $k \leq m$, una celda de $T_r^{(m)}$. Entonces $\Phi(e_\alpha^k) = b_1 \times \dots \times b_r$, donde a aparece en el producto k veces, y los restantes términos son pt . Por lo tanto, $\phi_r(\Phi(e_\alpha^k)) = b_1 \times \dots \times b_r \times pt$ y ya que la acción de cada $\sigma \in S_{r+1}$ únicamente permuta coordenadas, entonces se tiene que $\sigma_*(\phi_r(\Phi(e_\alpha^k))) = \tilde{b}_1 \times \dots \times \tilde{b}_{r+1}$, donde a aparece en el producto k veces. Ahora bien, $\tilde{b}_1 \times \dots \times \tilde{b}_{r+1}$ es una celda en $T_{r+1}^{(m)}$ y por lo tanto existe \tilde{e}_β^k tal que

$$\tilde{\Phi}(\tilde{e}_\beta^k) = \tilde{b}_1 \times \dots \times \tilde{b}_{r+1} = \sigma_*(\phi_r(\Phi(e_\alpha^k)))$$

con lo cual el diagrama deseado conmuta. Así que $\sigma_* \circ \phi_r$ induce homomorfismos entre los complejos celulares y en homología como en la Sección 1.4.

Lema 5.2.4. *Sea X un CW -complejo y M un $\mathbb{Z}\pi_1(X, x_0)$ -módulo izquierdo. Entonces los grupos $C_n^{CW}(X; \underline{M})$ del complejo para la homología celular con coeficientes locales son isomorfos a los grupos $C_n^{CW}(X; M)$ del complejo para la homología celular con coeficientes en M .*

Demostración: Consideremos al cubriente universal \tilde{X} como un CW -complejo con la estructura inducida por el cubriente $p : \tilde{X} \longrightarrow X$. Ahora bien, por definición se tiene que

$$C_n^{CW}(X, \underline{M}) = C_n^{CW}(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}\pi} M \quad \text{y} \quad C_n^{CW}(\tilde{X}) = \mathbb{Z}S_n^{CW}(\tilde{X})$$

donde $S_n^{CW}(\tilde{X})$ es el conjunto de n -celdas que tiene \tilde{X} y $\pi = \pi_1(X, x_0)$. Ya que \tilde{X} es el recubridor universal, la acción de $\pi_1(X, x_0)$ sobre las fibras es libre y transitiva. Como la estructura CW de \tilde{X} es la inducida por X , entonces esta acción induce una acción libre y transitiva sobre las n -celdas de \tilde{X} que son levantamientos de una n -celda fija de X . Finalmente, ya que todas las n -celdas de \tilde{X} son de esta forma, entonces $S_n^{CW}(\tilde{X})$ está en biyección con $\pi_1(X, x_0)S_n^{CW}(X)$. Por lo tanto,

$$\mathbb{Z}S_n^{CW}(\tilde{X}) \cong \mathbb{Z}\pi_1(X, x_0)S_n^{CW}(X)$$

como $\pi_1(X, x_0)$ -módulos, donde $\pi_1(X, x_0)$ actúa sobre $\mathbb{Z}\pi_1(X, x_0)S_n^{CW}(X)$ mediante $([\alpha]e) \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]e$. Así que

$$\mathbb{Z}S_n^{CW}(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}\pi} M \cong \mathbb{Z}\pi_1(X, x_0)S_n^{CW}(X) \otimes_{\mathbb{Z}\pi} M$$

Luego $\mathbb{Z}\pi_1(X, x_0)S_n^{CW}(X) \otimes_{\mathbb{Z}\pi} M \cong \mathbb{Z}S_n^{CW}(X) \otimes M$ mediante los morfismos $f(e \otimes m) = e \otimes m$ y $f^{-1}([\alpha]e \otimes m) = e \otimes [\alpha]m$. Finalmente, ya que $C_n(X; M) = \mathbb{Z}S_n^{CW}(X) \otimes M$ concluimos que

$$C_n^{CW}(X; \underline{M}) \cong C_n^{CW}(X; M) \quad \blacksquare$$

Con el lema anterior ya podemos probar el siguiente teorema.

Teorema 5.2.5. *Si a_1, \dots, a_s están en $T_r - \{1\}$, entonces los grupos de homología de $\text{Conf}_k(T_r - \{1, a_1, \dots, a_s\})$ son de dimensión finita.*

Demostración: Para este caso, consideraremos a T_r con una estructura CW similar a la de la Sección 1.4, cambiando el conjunto $pt = \{1\}$ por $pt = \{x\}$, donde $x \notin \{1, a_1, \dots, a_s\}$. De esta manera, los elementos $1, a_1, \dots, a_s \in T_r$ forman parte del interior de la única r -celda de T_r . A continuación procederemos por inducción sobre k . Por la Proposición 1.4.7 se tiene que $T_r - \{1, a_1, \dots, a_s\} \simeq T_r^{(r-1)} \vee \bigvee_{i=1}^s S^{r-1}$. Puesto que

$$H_n(T_r - \{1, a_1, \dots, a_s\}) \cong H_n \left(T_r^{(r-1)} \vee \bigvee_{i=1}^s S^{r-1} \right)$$

y $T_r^{(r-1)} \vee \bigvee_{i=1}^s S^{r-1}$ tiene un número finito de celdas en cada dimensión, entonces $H_n(T_r - \{1, a_1, \dots, a_s\})$ es de dimensión finita. Supongamos ahora que el enunciado es cierto para $k-1$. Consideremos la fibración de Fadell y Neuwirth

$$\text{Conf}_k(T_r - \{1, a_1, \dots, a_s\}) \longrightarrow T_r - \{1, a_1, \dots, a_s\}$$

cuya fibra es $\text{Conf}_{k-1}(T_r - \{1, a_1, \dots, a_s, a_{s+1}\})$, donde a_{s+1} puede ser considerado en el interior de la única r -celda de T_r . Esta fibración nos da la sucesión espectral de Serre con los términos

$$\begin{aligned} E_{p,q}^2 &= H_p(T_r - \{1, a_1, \dots, a_s\}; \underline{H}_q(\text{Conf}_{k-1}(T_r - \{1, a_1, \dots, a_s, a_{s+1}\}))) \\ &\Rightarrow H_{p+q}(\text{Conf}_k(T_r - \{1, a_1, \dots, a_s\})) \end{aligned}$$

Ya que $T_r - \{1, a_1, \dots, a_s\} \simeq T_r^{(r-1)} \vee \bigvee_{i=1}^s S^{r-1}$ se tiene entonces que

$$\begin{aligned} &H_p(T_r - \{1, a_1, \dots, a_s\}; \underline{H}_q(\text{Conf}_{k-1}(T_r - \{1, a_1, \dots, a_s, a_{s+1}\}))) \\ &\cong H_p\left(T_r^{(r-1)} \vee \bigvee_{i=1}^s S^{r-1}; \underline{H}_q(\text{Conf}_{k-1}(T_r - \{1, a_1, \dots, a_s, a_{s+1}\}))) \right) \end{aligned}$$

Ahora bien, de la Proposición 5.2.4 se tiene que

$$\begin{aligned} &C_p^{CW}\left(T_r^{(r-1)} \vee \bigvee_{i=1}^s S^{r-1}; \underline{H}_q(\text{Conf}_{k-1}(T_r - \{1, a_1, \dots, a_s, a_{s+1}\}))) \right) \\ &\cong C_p^{CW}\left(T_r^{(r-1)} \vee \bigvee_{i=1}^s S^{r-1}; H_q(\text{Conf}_{k-1}(T_r - \{1, a_1, \dots, a_s, a_{s+1}\}))) \right) \\ &\cong C_p^{CW}\left(T_r^{(r-1)} \vee \bigvee_{i=1}^s S^{r-1}\right) \otimes H_q(\text{Conf}_{k-1}(T_r - \{1, a_1, \dots, a_s, a_{s+1}\}))) \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción, $H^q(\text{Conf}_{k-1}(T_r - \{1, a_1, \dots, a_s, a_{s+1}\}))$ es de dimensión finita pues $1, a_1, \dots, a_s, a_{s+1}$ están en el interior de la celda de dimensión r . Además, $T_r^{(r-1)} \vee \bigvee_{i=1}^s S^{r-1}$ es un CW -complejo con un número finito de celdas en cada dimensión, por lo tanto,

$$C_n^{CW}\left(T_r^{(r-1)} \vee \bigvee_{i=1}^s S^{r-1}\right)$$

es de dimensión finita y así

$$C_n^{CW}\left(T_r^{(r-1)} \vee \bigvee_{i=1}^s S^{r-1}; \underline{H}_q(\text{Conf}_{k-1}(T_r - \{1, a_1, \dots, a_{s+1}\}))) \right)$$

también es de dimensión finita. Por lo tanto, cada término $E_{p,q}^2$ es de dimensión finita, al ser un cociente de un subgrupo de

$$C_n^{CW}\left(T_r^{(r-1)} \vee \bigvee_{i=1}^s S^{r-1}; \underline{H}_q(\text{Conf}_{k-1}(T_r - \{1, \dots, a_{s+1}\}))) \right)$$

De manera similar, cada término $E_{p,q}^\infty$ de la página E^∞ también será de dimensión finita, así que el grupo $H_{p+q}(\text{Conf}_k(T_r - \{1, \dots, a_s\}))$ es de dimensión finita. ■

Haciendo uso de la proposición anterior, se tiene que si el **FI**-módulo $r \mapsto H_n(\text{Conf}_k(T_r - \{1\}))$ está generado en alguna etapa, entonces es finitamente generado.

Existen resultados similares a los desarrollados en esta sección para $G_r = SU(r)$ ó $Sp(r)$. Sin embargo, requieren un argumento adicional para $SU(r)$ ó la teoría de **FI_W**-módulos de [27]. En este trabajo no hace falta considerar estos casos para determinar la estabilidad homológica del **FI** – módulo $r \mapsto H_n(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_r); \mathbb{Q})$, como lo mostraremos en la Sección 5.4.

5.3. Estabilidad para $r \mapsto H_n(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(r)); \mathbb{Q})$.

En la siguiente sección mostraremos la estabilidad homológica para $r \mapsto H_n(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(U(r)))$ y también para $SU(r)$ y $Sp(r)$. Sin embargo, hemos puesto este caso particular que es más sencillo de comprender y que tiene una metodología distinta a la usada en la siguiente sección.

Sea $r \geq 1$ y consideremos la siguiente función:

$$\begin{aligned} \varphi'_r : \text{Conf}_k^{\text{ab}}(U(r)) &\longrightarrow \text{Conf}_k^{\text{ab}}(U(r+1)) \\ (A, B) &\mapsto \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Esto da una sucesión $\{\text{Conf}_k^{\text{ab}}(U(r)), \varphi'_r\}_{r \geq 1}$. En esta sección mostraremos que para $k = 2$, esta sucesión es homológicamente estable en cada dimensión n con rango estable n , para toda $n \in \mathbb{N}$ (ver Definición 5.1.1). Para ello veamos primero que el **FI** – módulo $r \mapsto H_n(\text{Conf}_2(T_r))$ es finitamente generado en la etapa $n + 1$. Las siguientes proposiciones están enfocadas en demostrar este hecho.

Proposición 5.3.1. *El **FI** – módulo $r \mapsto H_n(T_r - \{1\})$ es isomorfo al **FI** – módulo $r \mapsto H_n(T_r^{(m)})$, donde $m = \min\{n + 1, r - 1\}$.*

Demostración: Notemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 T_r^{(m)} & \xrightarrow{\sigma_* \circ \phi_r} & T_{r+1}^{(m)} \\
 \downarrow i & & \downarrow i \\
 T_r^{(r-1)} & \xrightarrow{\sigma_* \circ \phi_r} & T_{r+1}^{(r)} \\
 \downarrow i & & \downarrow i \\
 T_r - \{1\} & \xrightarrow{\sigma_* \circ \phi_r} & T_{r+1} - \{1\}
 \end{array}$$

donde las funciones i son las respectivas inclusiones y $\sigma \in S_{r+1}$. Aplicando el functor $H_n(\ ; \mathbb{Q})$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(T_r^{(m)}) & \xrightarrow{\sigma_* \circ (\phi_r)_*} & H_n(T_{r+1}^{(m)}) \\
 \downarrow i_* & & \downarrow i_* \\
 H_n(T_r^{(r-1)}) & \xrightarrow{\sigma_* \circ (\phi_r)_*} & H_n(T_{r+1}^{(r)}) \\
 \downarrow i_* & & \downarrow i_* \\
 H_n(T_r - \{1\}) & \xrightarrow{\sigma_* \circ (\phi_r)_*} & H_n(T_{r+1} - \{1\})
 \end{array}$$

Si $r-1 \leq n+1$ entonces $m = r-1$ y así $i : T_r^{(m)} \rightarrow T_r^{(r-1)}$ es la identidad. Si $r-1 > n+1$ entonces $m = n+1 > n$, por lo tanto, en cualquier caso, $i_* : H_n(T_r^{(m)}) \rightarrow H_n(T_r^{(r-1)})$ es un isomorfismo. Por otro lado, por el Corolario 1.4.5 se tiene que $i_* : H_n(T_r^{(r-1)}) \rightarrow H_n(T_r - \{1\})$ también es un isomorfismo. Finalmente, ya que todo morfismo $f : [r] \rightarrow [r+1]$ es de la forma $\sigma_* \circ i_{r,r+1}$ para algun $\sigma \in S_{r+1}$ y sus inducidos en homología tienen la forma $\sigma_* \circ (\phi_r)_*$ entonces el **FI** – módulo $r \mapsto H_n(T_r - \{1\})$ es isomorfo al **FI** – módulo $r \mapsto H_n(T_r^{(m)})$. ■

Proposición 5.3.2. *El **FI** – módulo $r \mapsto H_n(T_r - \{1\})$ es generado en la etapa $n + 1$.*

Demostración: Por la proposición anterior, basta mostrar que el **FI** – módulo $r \mapsto H_n(T_r^{(m)})$ es generado en la etapa $n + 1$. Tomemos $r = n + 2$ (con lo cual, $m = n + 1$). Mostraremos que $H_n(T_{n+3}^{(n+1)})$ es

generado a partir de $H_n(T_{n+2}^{(n+1)})$. Sea $[\tilde{\Phi}(\tilde{e}_\beta^k)] \in H_n(T_{n+3}^{(n+1)})$, con $k \leq n+1$. Observemos que $\tilde{\Phi}(\tilde{e}_\beta^k)$ es de la forma $\tilde{b}_1 \times \dots \times \tilde{b}_{n+3}$, donde a aparece en el producto k veces, y los $n - k + 3 \geq 2$ términos restantes son pt . Tomemos $\sigma \in S_{n+3}$ tal que $\sigma_*(\tilde{b}_1 \times \dots \times \tilde{b}_{n+3}) = a \times \dots \times a \times pt \times \dots \times pt$ y $a \times \dots \times a \times pt \times \dots \times pt \times \hat{pt}$ el producto donde a aparece k veces y pt aparece $n - k + 2$ veces y notemos que

$$(\sigma^{-1})_*(\phi_{n+2}(a \times \dots \times a \times pt \times \dots \times pt \times \hat{pt})) = \tilde{b}_1 \times \dots \times \tilde{b}_{n+3}$$

Ahora bien, si consideramos $\Phi(e_\alpha^k)$ la celda en $T_{n+2}^{(n+1)}$ tal que

$$\Phi(e_\alpha^k) = a \times \dots \times a \times pt \times \dots \times pt \times \hat{pt}$$

entonces $(\sigma^{-1})_*((\phi_{n+2})_*([\Phi(e_\alpha^k)])) = [\tilde{\Phi}(\tilde{e}_\beta^k)]$. Así que $H_n(T_{n+3}^{(n+1)})$ es generado por las imágenes de las funciones $\sigma_* \circ \phi_* : H_n(T_{n+2}^{(n+1)}) \rightarrow H_n(T_{n+3}^{(n+1)})$. Un argumento totalmente análogo muestra que si $r > n+2$ entonces $H_n(T_{r+1}^{(n+1)})$ es generado por $H_n(T_r^{(n+1)})$. Si $r < n+2$, entonces $m = r-1$ y un argumento como este ya no funcionaría. En conclusión, el **FI**-módulo $r \mapsto H_n(T_r^{(m)})$ es generado en la etapa $n+2$.

Veamos ahora que es finitamente generado en la etapa $n+1$, esto es, probaremos que $H_n(T_{n+2}^{(n+1)})$ es generado a partir de $H_n(T_{n+1}^{(n)})$. Tomemos entonces $[\tilde{\Phi}(\tilde{e}_\beta^k)] \in H_n(T_{n+2}^{(n+1)})$ y recordemos que la inclusión

$$i : T_{n+2}^{(n)} \rightarrow T_{n+2}^{(n+1)}$$

induce un homomorfismo sobreyectivo $i_* : H_n(T_{n+2}^{(n)}) \rightarrow H_n(T_{n+2}^{(n+1)})$. Entonces existe una celda e_α^k de $T_{n+2}^{(n)}$ tal que $i_*([\Phi(e_\alpha^k)]) = [\tilde{\Phi}(\tilde{e}_\beta^k)]$. Usando un argumento similar al anterior, se tiene que existen $\sigma \in S_{n+1}$ y $[\Phi(\hat{e}_\gamma^k)] \in H_n(T_{n+1}^{(n)})$ tales que $\sigma_*((\phi_{n+1})_*([\Phi(\hat{e}_\gamma^k)])) = [\tilde{\Phi}(\tilde{e}_\beta^k)]$. Por último, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T_{n+1}^{(n)} & \xrightarrow{\sigma_* \circ \phi_{n+1}} & T_{n+2}^{(n)} \\ \downarrow 1 & & \downarrow 1 \\ T_{n+1}^{(n)} & \xrightarrow{\sigma_* \circ \phi_{n+1}} & T_{n+2}^{(n+1)} \end{array}$$

así que, aplicando el funtor $H_n(-; \mathbb{Q})$, el diagrama respectivo en homología también conmuta, y por lo tanto, las imágenes de las funciones

$\sigma_* \circ \phi_* : H_n(T_{n+1}^{(n)}) \longrightarrow H_n(T_{n+2}^{(n+1)})$ generan a $H_n(T_{n+2}^{(n+1)})$, con lo cual, el **FI** – módulo es generado en la etapa $n + 1$. ■

Proposición 5.3.3. *El **FI** – módulo $r \mapsto H_n(\text{Conf}_2(T_r))$ es finitamente generado en la etapa $n + 1$.*

Demostración: Recordemos que

$$H_n(\text{Conf}_2(T_r)) \cong \bigoplus_{i=0}^n H_{n-i}(T_r) \otimes H_i(T_r - \{1\})$$

Por la Proposición 5.2.3, el **FI** – módulo $H_{n-i}(T_r)$ es generado en la etapa $n - i$ y por la Proposición 5.3.2, el **FI** – módulo $H_i(T_r - \{1\})$ es generado en la etapa $i + 1$. Así que por la Proposición 5.1.6, cada término $H_{n-i}(T_r) \otimes H_i(T_r - \{1\})$ es generado en la etapa $n + 1$ y por lo tanto $r \mapsto H_n(\text{Conf}_2(T_r))$ es generado en la etapa $n + 1$. ■

Usando la proposición anterior y el Teorema 5.1.14 se tiene que tal **FI** – módulo es de hecho uniformemente estable por representaciones con rango estable $2n + 2$.

De manera similar a los casos anteriores, es posible probar que la sucesión $\{U(r)/T_r \times \text{Conf}_2(T_r), \varphi_r\}_{r \geq 1}$ es una sucesión consistente, donde

$$\begin{aligned} \varphi_r : U(r)/T_r \times \text{Conf}_2(T_r) &\longrightarrow U(r+1)/T_{r+1} \times \text{Conf}_2(T_{r+1}) \\ (gT_r, ((x_1, \dots, x_r), (y_1, \dots, y_r))) &\mapsto (gT_{r+1}, ((x_1, \dots, x_r, 1), (y_1, \dots, y_r, 1))) \end{aligned}$$

Esta sucesión tampoco extiende a un **FI** – espacio. Sin embargo, ya que $H_{n-i}(U(r)/T_r)$ y $H_i(\text{Conf}_2(T_r))$ son **FI** – módulos con las funciones coordenada a coordenada y por el Teorema de Künneth se tiene

$$H_n(U(r)/T_r \times \text{Conf}_2(T_r)) \cong \bigoplus_{i=0}^n H_{n-i}(U(r)/T_r) \otimes H_i(\text{Conf}_2(T_r))$$

entonces $r \mapsto H_n(U(r)/T_r \times \text{Conf}_2(T_r))$ es un **FI** – módulo.

Proposición 5.3.4. *El **FI** – módulo $r \mapsto H_n(U(r)/T_r \times \text{Conf}_2(T_r))$ es finitamente generado.*

Demostración: Se tiene que $H_{n-i}(U(r)/T_r)$ es finitamente generado por la Proposición 5.2.2 y que $H_i(\text{Conf}_2(T_r))$ también es finitamente

generado por la Proposición 5.3.3. Así que por la Proposición 5.1.6 cada término $H_{n-i}(T_r) \otimes H_i(T_r - \{1\})$ es finitamente generado y por lo tanto el **FI** – módulo deseado es finitamente generado. ■

Teorema 5.3.5. *La sucesión $\{\text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(r)), \varphi'_r\}_{r \geq 1}$ es homológicamente estable en cada dimensión.*

Demostración: Hemos visto que la sucesión

$$\{U(r)/T_r \times \text{Conf}_2(T_r), \varphi_r\}_{r \geq 1}$$

es tal que la sucesión consistente $\{H_n(U(r)/T_r \times \text{Conf}_2(T_r)), (\varphi_r)_*\}_{r \geq 1}$ se extiende a un **FI** – módulo finitamente generado. Por lo tanto, por el Teorema 5.1.15 se tiene que la sucesión $\{U(r)/T_r \times_{W_r} \text{Conf}_2(T_r), \tilde{\varphi}_r\}_{r \geq 1}$ es homológicamente estable en dimensión n , donde $\tilde{\varphi}$ es el inducido en el cociente. Así que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(\tilde{\varphi}_r)_*$ es un isomorfismo para toda $r \geq N$. Mostraremos que $(\varphi'_r)_*$ también es un isomorfismo para toda $r \geq N$. Ya que la función ψ de la Proposición 3.1.5 es natural con respecto a la función j_r entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(r)) & \xrightarrow{\varphi'_r} & \text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(r+1)) \\ \uparrow \psi & & \uparrow \psi \\ U(r)/T_r \times_{W_r} \text{Conf}_2(T_r) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_r} & U(r+1)/T_{r+1} \times_{W_{r+1}} \text{Conf}_2(T_{r+1}) \end{array}$$

Por lo tanto, el diagrama inducido en homología conmuta, donde ψ_* es isomorfismo.

$$\begin{array}{ccc} H_n(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(r))) & \xrightarrow{(\varphi'_r)_*} & H_n(\text{Conf}_2^{\text{ab}}(U(r+1))) \\ \uparrow \cong \psi_* & & \uparrow \cong \psi_* \\ H_n(U(r)/T_r \times_{W_r} \text{Conf}_2(T_r)) & \xrightarrow{(\tilde{\varphi}_r)_*} & H_n(U(r+1)/T_{r+1} \times_{W_{r+1}} \text{Conf}_2(T_{r+1})) \end{array}$$

Como $(\tilde{\varphi}_r)_*$ es un isomorfismo para toda $r \geq N$, así lo es $(\varphi'_r)_*$. ■

5.4. Estabilidad para $r \mapsto H_n(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_r); \mathbb{Q})$

Esta sección generalizará lo que vimos en la sección anterior. Consideremos $G_r = U(r), SU(r+1)$ ó $Sp(r)$, W_r el grupo de Weyl de G_r y

T_r el toro maximal de G_r . Con esto, la dimensión de T_r es r . Sea φ la siguiente función:

$$\begin{aligned} \varphi_r : \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_r) &\longrightarrow \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_{r+1}) \\ (A_1, \dots, A_k) &\mapsto \left(\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Esto nos da la sucesión $\{\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_r), \varphi_r\}_{r \geq 1}$. En esta sección mostraremos que esta sucesión es homológicamente estable en cada dimensión.

En la Sección 4.5 hemos visto que a partir de cierta $r > 0$ los grupos de cohomología en dimensión 1 de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_r)$ son cero. Por lo tanto, la sucesión $r \mapsto H_1(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_r))$ es homológicamente estable con rango estable 4 y con $\{0\}$ como el grupo al que converge.

A continuación definiremos algunos conceptos que nos serán de gran utilidad para el resto del capítulo.

Definición 5.4.1. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función de espacios basados. Decimos que f es n -conexa si el homomorfismo inducido*

$$f_* : \pi_i(X) \longrightarrow \pi_i(Y)$$

es un isomorfismo para toda $i \leq n - 1$ y es sobreyectivo para $i = n$. Decimos que un espacio X es n -conexo si $\pi_i(X) = 0$ para toda $i \leq n$.

El siguiente teorema es debido a Golasiński, Gonçalves y Guaschi, quienes generalizaron el Teorema 4.5.1 dado por Birman.

Teorema 5.4.2 (Teorema 3.2 de [15]). *Sea X una variedad topológica conexa y sin borde de dimensión $n \geq 2$. Entonces la inclusión*

$$i_k : \text{Conf}_k(X) \longrightarrow X^k$$

es $(n - 1)$ - conexa.

Proposición 5.4.3. *Sea $F \longrightarrow E \xrightarrow{f} B$ una fibración donde f es n - conexa, entonces F es $(n - 1)$ -conexa.*

Demostración: La fibración dada induce una sucesión exacta larga en los grupos de homotopía de la siguiente manera:

$$\pi_{j+1}(E) \xrightarrow{f_*} \pi_{j+1}(B) \longrightarrow \pi_j(F) \longrightarrow \pi_j(E) \xrightarrow{f_*} \pi_j(B)$$

Ya que f es n -conexa entonces $\pi_{j+1}(E) \xrightarrow{f_*} \pi_{j+1}(B)$ es sobreyectivo para toda $j \leq n - 1$, mientras que $\pi_j(E) \xrightarrow{f_*} \pi_j(B)$ es inyectivo para toda $j \leq n - 1$. Así que si $j \leq n - 1$, el grupo $\pi_j(F)$ se encuentra en una sucesión exacta corta de la forma:

$$0 \longrightarrow \pi_j(F) \longrightarrow 0$$

Concluyendo así lo deseado. ■

La siguiente proposición es una consecuencia del Teorema 5.4.2, en la cual, la homología es con coeficientes enteros.

Proposición 5.4.4. *Sea X una variedad topológica conexa y sin borde de dimensión $n \geq 2$. Entonces el homomorfismo*

$$(i_k)_* : H_j(\text{Conf}_k(X); \mathbb{Z}) \longrightarrow H_j(X^k; \mathbb{Z})$$

inducido por la inclusión $i_k : \text{Conf}_k(X) \longrightarrow X^k$ es un isomorfismo para toda $j \leq n - 2$.

Demostración: Ya que la inclusión $i_k : \text{Conf}_k(X) \longrightarrow X^k$ es $(n-1)$ -conexa, entonces en particular $\pi_i(X^k, \text{Conf}_k(X)) = 0$ para toda $i \leq n-1$. Así que por el Teorema de Hurewicz relativo (ver Teorema 4.37 de [19]) se tiene que $H_i(X^k, \text{Conf}_k(X); \mathbb{Z}) = 0$ para toda $i \leq n-1$. La sucesión exacta larga de homología del par $(X^k, \text{Conf}_k(X))$ da el resultado deseado. ■

Usando el Teorema de coeficientes universales para homología podemos tener el siguiente corolario:

Corolario 5.4.5. *Sea X una variedad topológica conexa y sin borde de dimensión $n \geq 2$. Entonces el homomorfismo*

$$(i_k)_* : H_j(\text{Conf}_k(X); \mathbb{Q}) \longrightarrow H_j(X^k; \mathbb{Q})$$

inducido por la inclusión $i_k : \text{Conf}_k(X) \longrightarrow X^k$ es un isomorfismo para toda $j \leq n - 2$.

La siguiente proposición nos muestra el rango estable para el caso $\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G_r)$. Nosotros la usaremos más adelante para mostrar un rango estable en el caso $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_r)$.

Proposición 5.4.6 (Teorema 10.7 de [24]). *Para cada $k \geq 1$, la sucesión $\{\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G_r), \tilde{\varphi}_r\}_{r \geq 1}$ satisface estabilidad homológica en dimensión n con rango estable una vez que $r - \lfloor \sqrt{r} \rfloor \geq n$.*

En la proposición anterior se asume que la sucesión de naturales $r - \lfloor \sqrt{r} \rfloor$ es creciente y que el rango estable corresponde al mínimo natural con tal condición.

A partir de ahora, regresamos a usar únicamente cohomología racional. En la siguiente proposición mostramos que los grupos de homología de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_r)$ coinciden con los grupos de homología de $\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G_r)$ hasta cierta dimensión, dependiendo de la dimensión del toro maximal de G_r :

Teorema 5.4.7. *Sea $\chi : \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_r) \longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G_r)$ la inclusión. Si $r \geq 2$ entonces χ induce isomorfismos en homología hasta dimensión $s \leq r - 2$. En particular si $s \leq r - 2$ entonces*

$$H_s(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_r)) \cong H_s(\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G_r))$$

Demostración: Observemos primero que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} G_r/T_r \times \text{Conf}_k(T_r) & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_r) \\ \downarrow \tilde{\chi} & & \downarrow \chi \\ G_r/T_r \times (T_r)^k & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & \text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G_r) \end{array}$$

donde $\tilde{\chi}$ es la identidad en G_r/T_r y la inclusión en cada coordenada en el segundo factor y $\tilde{\Phi}$ es la inducida por conjugación, como en la Proposición 3.1.5. Por lo tanto, el diagrama inducido en homología también conmuta, y además, como $\tilde{\Phi}$ induce un isomorfismo con los puntos fijos, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_s(G_r/T_r \times \text{Conf}_k(T_r))^{W_r} & \xrightarrow[\cong]{\tilde{\Phi}_*} & H_s(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_r)) \\ \downarrow \tilde{\chi}_* & & \downarrow \chi_* \\ H_s(G_r/T_r \times (T_r)^k)^{W_r} & \xrightarrow[\cong]{\tilde{\Phi}_*} & H_s(\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G_r)) \end{array}$$

Así que basta probar que $\tilde{\chi}_*$ es un isomorfismo para que χ_* lo sea. Apli-

cando la fórmula de Künneth tenemos las siguientes descomposiciones:

$$H_s(G_r/T_r \times \text{Conf}_k(T_r))^{W_r} \cong \left[\bigoplus_{i=0}^s H_{s-i}(G_r/T_r) \otimes H_i(\text{Conf}_k(T_r)) \right]^{W_r}$$

$$H_s(G_r/T_r \times (T_r)^k)^{W_r} \cong \left[\bigoplus_{i=0}^s H_{s-i}(G_r/T_r) \otimes H_i((T_r)^k) \right]^{W_r}$$

La función $\tilde{\chi}$ induce un homomorfismo entre las descomposiciones coordenada a coordenada, que en este caso, corresponden a la identidad y a la inclusión. La identidad claramente induce isomorfismos en homología. Por otro lado, ya que $r \geq 2$, entonces por la Proposición 5.4.5 se tiene que la inclusión $i_k : \text{Conf}_k(T_r) \rightarrow (T_r)^k$ induce isomorfismos en homología hasta dimensión $i \leq r - 2$. Dado que además i_k es W_r -equivariante, se tiene:

$$\left[\bigoplus_{i=0}^s H_{s-i}(G_r/T_r) \otimes H_i(\text{Conf}_k(T_r)) \right]^{W_r} \cong \left[\bigoplus_{i=0}^s H_{s-i}(G_r/T_r) \otimes H_i((T_r)^k) \right]^{W_r}$$

Así que $\tilde{\chi}_*$ es un isomorfismo y por lo tanto χ_* también, teniendo así lo deseado. ■

En el siguiente teorema mostramos la estabilidad para las sucesiones de la forma $\{\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_r), \varphi_r\}_{r \geq 1}$.

Teorema 5.4.8. *Para cada $k \geq 1$, la sucesión $\{\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_r), \varphi_r\}_{r \geq 1}$ satisface estabilidad homológica en dimensión n con rango estable*

$$s = \text{máx}\{\text{mín}\{z \mid z - \lfloor \sqrt{z} \rfloor \geq n\}, n + 2\}$$

Demostración: Basta mostrar que $(\varphi_r)_*$ es un isomorfismo a partir del rango mencionado. Consideremos $r \geq s$ y observemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_r) & \xrightarrow{\varphi_r} & \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G_{r+1}) \\ \downarrow \chi & & \downarrow \chi \\ \text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G_r) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_r} & \text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G_{r+1}) \end{array}$$

Por lo tanto, el diagrama inducido en homología en dimensión n también conmuta. Ya que $r \geq s$ y $s - \lfloor \sqrt{s} \rfloor \geq n$ entonces por la Proposición

5.4.6 se tiene que $(\tilde{\varphi}_r)_*$ es un isomorfismo, y como $\dim(T_r) = r \geq n + 2$ entonces por el teorema anterior se tiene que ambos mapeos χ inducen isomorfismos en homología hasta dimensión n . Por lo tanto, $(\varphi_r)_*$ también es un isomorfismo. ■

Para el caso $G_r = U(r)$ podemos decir un poco más.

Proposición 5.4.9. *Para cada $r \geq 1$ sea T_r el toro maximal de $G_r = U(r)$. Entonces el **FI** – módulo $r \mapsto H_n(\mathbf{Conf}_k(T_r))$ es generado en la etapa $n + 2$.*

Demostración: Sea $r \geq n + 2$ y $x \in H_n(\mathbf{Conf}_k(T_{r+1}))$, mostraremos que es imagen de alguno de los morfismos $\sigma_* \circ (\phi_{n+2,r})_*$, donde $\phi_{n+2,r} = \phi_{r-1} \circ \dots \circ \phi_{n+2}$. El **FI** – módulo $r \mapsto \{H_n((T_r)^k)\}$ es generado en el nivel n por la Proposición 5.2.3, en particular es generado en el nivel $n + 2$ y por lo tanto existen $\tilde{y} \in H_n((T_{n+2})^k)$ y $\sigma \in S_r$ tales que $\sigma_* \circ (\tilde{\phi}_{n+2,r})_*(\tilde{y}) = (i_k)_*(x)$, donde $i_k : \mathbf{Conf}_k(T_r) \rightarrow (T_r)^k$ es la inclusión. Notemos ahora que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Conf}_k(T_{n+2}) & \xrightarrow{\sigma_* \circ \phi_{n+2,r}} & \mathbf{Conf}_k(T_{r+3}) \\ \downarrow i_k & & \downarrow i_k \\ (T_{n+2})^k & \xrightarrow{\sigma_* \circ \tilde{\phi}_{n+2,r}} & (T_{r+3})^k \end{array}$$

Así que el diagrama inducido en homología en dimensión n también conmuta:

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathbf{Conf}_k(T_{n+2})) & \xrightarrow{\sigma_* \circ (\phi_{n+2,r})_*} & H_n(\mathbf{Conf}_k(T_{r+3})) \\ \cong \downarrow (i_k)_* & & \cong \downarrow (i_k)_* \\ H_n((T_{n+2})^k) & \xrightarrow{\sigma_* \circ (\tilde{\phi}_{n+2,r})_*} & H_n((T_{r+3})^k) \end{array}$$

Ya que $\dim(T_{n+2}) = n + 2$ entonces por la Proposición 5.4.4 se tiene que $(i_k)_*$ es un isomorfismo y por lo tanto existe $y \in H_n(\mathbf{Conf}_k(T_{n+2}))$ tal que $(i_k)_*(y) = \tilde{y}$. Finalmente, la conmutatividad del diagrama y el hecho de que $(i_k)_*$ sean isomorfismos muestra que $\sigma_* \circ (\phi_{n+2,r})_*(y) = x$. ■

La siguiente proposición nos muestra que $\{H_n(U(r)/T_r \times \mathbf{Conf}_k(T_r))\}_{r \geq 1}$ es uniformemente estable por representaciones.

Proposición 5.4.10. *El \mathbf{FI} -módulo $r \mapsto H_n(U(r)/T_r \times \text{Conf}_k(T_r))$ es finitamente generado.*

Demostración: El \mathbf{FI} -módulo $r \mapsto H_n(U(r)/T_r \times \text{Conf}_k(T_r))$ tiene la siguiente descomposición en \mathbf{FI} -módulos:

$$H_n(U(r)/T_r \times \text{Conf}_k(T_r)) \cong \bigoplus_{i=0}^n H_i(U(r)/T_r) \otimes H_{n-i}(\text{Conf}_k(T_r))$$

Ya hemos visto que $H_i(U(r)/T_r)$ es finitamente generado y $H_{n-i}(\text{Conf}_k(T_r))$ también es finitamente generado por la Proposición 5.4.9. Así que por la Proposición 5.1.6 cada término $H_{n-i}(U(r)/T_r) \otimes H_i(\text{Conf}_k(T_r))$ es finitamente generado y por lo tanto el \mathbf{FI} -módulo deseado es finitamente generado. ■

5.5. Estabilidad con respecto al número de puntos

En esta sección nos concentraremos en las sucesiones donde varía el número de puntos. En general, no es trivial definir funciones

$$\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G) \longrightarrow \text{Conf}_{k+1}^{\text{ab}}(G)$$

pero sí es posible definir funciones $\text{Conf}_{k+1}^{\text{ab}}(G) \longrightarrow \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ mediante proyecciones. Sin embargo, en homología estas funciones inducen homomorfismos de la forma $H_n(\text{Conf}_{k+1}^{\text{ab}}(G)) \longrightarrow H_n(\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G))$, con los cuales no se podrían fabricar \mathbf{FI} -módulos. Es por ello que para este caso trabajaremos con la cohomología, que al ser un funtor contravariante, con este sí podrán construirse \mathbf{FI} -módulos. Para ello, comenzaremos definiendo conceptos duales a los que hemos trabajado.

Definición 5.5.1. *Definimos la categoría opuesta \mathbf{FI}^{op} como aquella en la que los objetos son los conjuntos $[n]$ y $\text{Mor}_{\mathbf{FI}^{\text{op}}}([m], [n]) = \text{Mor}_{\mathbf{FI}}([n], [m])$. Un coFI -espacio será un funtor $\mathbf{FI}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Top}$.*

Ya que el funtor cohomología $H^n(\ ; \mathbb{Q})$ es contravariante, entonces un coFI -espacio define un \mathbf{FI} -módulo mediante la composición.

Definición 5.5.2. *Sea X un espacio topológico. Definimos el coFI -espacio $\text{Conf}(X)$ como el funtor que asigna en los objetos $[n] \mapsto \text{Conf}_n(X)$*

y para un morfismo $f \in \text{Mor}_{\mathbf{FP}^p}([m], [n])$, esto es $f : [n] \rightarrow [m]$ inyectiva, asignamos

$$\begin{aligned} f_* : \text{Conf}_n(X) &\longrightarrow \text{Conf}_m(X) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_{f(1)}, \dots, x_{f(m)}) \end{aligned}$$

Con esto tenemos para cada n , el **FI**–módulo $r \mapsto H^n(\text{Conf}_r(X))$. La sucesión consistente asociada al **coFI**–espacio $\text{Conf}(X)$ está determinada por las funciones que induce la inclusión $i : [r] \rightarrow [r+1]$, las cuales tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} i_{r+1} : \text{Conf}_{r+1}(X) &\longrightarrow \text{Conf}_r(X) \\ (x_1, \dots, x_{r+1}) &\mapsto (x_1, \dots, x_r) \end{aligned}$$

y la acción de S_k sobre $\text{Conf}_k(X)$ corresponde a aquella que permuta las coordenadas de cada tupla. De manera similar, si G es un grupo de Lie compacto y conexo, puede definirse el **coFI** – espacio $\text{Conf}^{\text{ab}}(G)$ cuya sucesión consistente asociada tendrá las mismas características que las de $\text{Conf}(X)$.

Definición 5.5.3. *Decimos que una variedad M es de tipo finito si $H^*(M; \mathbb{Q})$ es de dimensión finita.*

Church [7] ha demostrado que para variedades de tipo finito, la sucesión de grupos de cohomología de los espacios de configuraciones es uniformemente estable por representaciones:

Proposición 5.5.4 (Teorema 1 de [7]). *Para cualquier variedad orientable conexa M de tipo finito y cualquier $n \geq 0$, la sucesión consistente $\{H^n(\text{Conf}_r(M); \mathbb{Q}), i_r^*\}_{r \geq 1}$ es uniformemente estable por representaciones, con rango estable $2n$ si $\dim(M) \geq 3$ y rango estable $4n$ si $\dim(M) = 2$.*

Como consecuencia de este resultado, se tiene que el **FI** – módulo $r \mapsto H^n(\text{Conf}_r(M))$ es finitamente generado por la Proposición 5.1.13. En particular, como la variedad $T = (S^1)^k$ es de tipo finito, entonces el **FI** – módulo $r \mapsto H^n(\text{Conf}_r(T))$ es finitamente generado.

Lema 5.5.5 (Lema 7.6 de [24]). *Sean H un grupo finito, F un campo de característica cero, FH el anillo de grupo y $R : FH\text{-Mód} \rightarrow F\text{-Mód}$ el funtor de olvido. Si $V : \mathbf{FI} \rightarrow FH\text{-Mód}$ es tal que $R \circ V$ es generado en la etapa k , entonces el **FI** – módulo V^H también es generado en la etapa k .*

A continuación enunciamos el teorema más importante de esta sección:

Teorema 5.5.6. *Sea G un grupo de Lie compacto y conexo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces las sucesiones de S_r - representaciones $r \mapsto H^n(\text{Conf}_r^{\text{ab}}(G))$ son uniformemente estables por representaciones.*

Demostración: Sea W el grupo de Weyl de G y consideremos al espacio $G/T \times \text{Conf}_r(T)$ con la acción de S_r mediante la identidad en la primera coordenada y la permutación de coordenadas en el segundo factor. Con esto, la función inducida por conjugación

$$\Phi : G/T \times \text{Conf}_r(T) \longrightarrow \text{Conf}_r^{\text{ab}}(G)$$

es S_r -equivariante y por lo tanto, el homomorfismo inducido

$$\Phi^* : H^n(\text{Conf}_r^{\text{ab}}(G)) \longrightarrow H^n(G/T \times \text{Conf}_r(T))$$

es S_r -equivariante. Observemos que el **FI** - módulo

$$r \mapsto H^n(G/T \times \text{Conf}_r(T))$$

es finitamente generado, pues de la descomposición en **FI**-módulos:

$$H^n(G/T \times \text{Conf}_r(T)) \cong \bigoplus_{i=0}^n H^{n-i}(G/T) \otimes H^i(\text{Conf}_r(T)),$$

el **FI**-módulo $r \mapsto H^{n-i}(G/T)$ es constante y por lo tanto es finitamente generado y el **FI**-módulo $H^i(\text{Conf}_r(T))$ también lo es por la Proposición 5.5.4. Además, los **FI**-módulos

$$r \mapsto H^{n-i}(G/T) \qquad r \mapsto H^i(\text{Conf}_r(T))$$

son finitamente generados vistos como funtores **FI** \longrightarrow \mathbb{Q} -Mód, así que lo mismo sucede para el **FI** - módulo $r \mapsto H^n(G/T \times \text{Conf}_r(T))$, por lo tanto, usando el Lema 5.5.5, se sigue que el **FI** - módulo

$$r \mapsto H^n(G/T \times \text{Conf}_r(T))^W \cong H^n(\text{Conf}_r^{\text{ab}}(G))$$

es finitamente generado. ■

Podemos considerar ahora a los espacios formados por el cociente de $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)$ sobre la acción de S_k que permuta las coordenadas, con lo

cual tendríamos el espacio de configuraciones de k -tuplas desordenadas que conmutan:

$$B_k^{\text{ab}}(G) := \text{Conf}_k^{\text{ab}}(G)/S_k$$

Ahora bien, generalmente la proyección que olvida la última coordenada $\text{Conf}_k^{\text{ab}}(G) \rightarrow \text{Conf}_{k-1}^{\text{ab}}(G)$ no induce una función entre los cocientes. Así que ahora ya no existen funciones que *conecten* estos espacios. Sin embargo, es posible obtener resultados sobre sus grupos de cohomología. Para ello citamos el siguiente lema:

Lema 5.5.7 (Proposición 4.21 de [24]). *Si V es un \mathbf{FI} -módulo finitamente generado sobre un campo de característica cero, y V tiene rango estable N entonces $V_n^{S_n} \cong V_{n+1}^{S_{n+1}}$ para toda $n \geq N$.*

Teorema 5.5.8. *Sea G un grupo de Lie compacto y conexo. Entonces los grupos de cohomología racional en dimensión n de la sucesión $\{B_r^{\text{ab}}(G)\}_{r \geq 1}$ estabilizan, esto es, existe N tal que si $r \geq N$, entonces*

$$H^n(B_r^{\text{ab}}(G)) \cong H^n(B_{r+1}^{\text{ab}}(G))$$

Demostración: Usando el Teorema 5.5.6 y el lema anterior se tiene que existe N para el cual $H^n(\text{Conf}_r^{\text{ab}}(G))^{S_r} \cong H^n(\text{Conf}_{r+1}^{\text{ab}}(G))^{S_{r+1}}$ para toda $r \geq N$. Recordando que los cocientes $\pi : \text{Conf}_r^{\text{ab}}(G) \rightarrow B_r^{\text{ab}}(G)$ inducen isomorfismos

$$\pi : H^n(B_r^{\text{ab}}(G)) \xrightarrow{\cong} H^n(\text{Conf}_r^{\text{ab}}(G))^{S_r}$$

puede concluirse lo deseado. ■

Bibliografía

- [1] A. Adem, F. Cohen, *Commuting elements and spaces of homomorphisms*, Math. Ann. 338 (2007), no. 3, 587-626.
- [2] A. Adem, J. M. Gómez, *On the structure of spaces of commuting elements in compact Lie groups*, Configuration spaces, 1–26, CRM Series, 14, Ed. Norm., Pisa, 2012.
- [3] T. Baird, *Cohomology of the space of commuting n -tuples in a compact Lie group*, Algebr. Geom. Topol. 7 (2007), 737-754.
- [4] J. S. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Princeton University Press, 1974.
- [5] J. S. Birman, *On Braid Groups*, Comm. Pure Appl. Math. 22 (1969) 41–72.
- [6] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate text in mathematics, Springer - Verlag, New York, 1994.
- [7] T. Church, *Homological stability for configuration spaces of manifolds*, Invent. Math. 188 (2012), no. 2, 465–504.
- [8] T. Church, J. Ellenberg, B. Farb, *FI-modules and stability for representations of symmetric groups*, English summary, Duke Math. J. 164 (2015), no. 9, 1833–1910.
- [9] T. Church, B. Farb, *Representation theory and homological stability*, Advances in Mathematics, 245 (2013) 250-314.
- [10] F. Cohen, *On configuration spaces, their homology, and Lie algebras*, J. Pure Appl. Algebra 100 (1995), no. 1-3, 19–42.
- [11] R. Engelking, *General topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, 6. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

- [12] E. Fadell, S. Husseini, *Geometry and topology of configuration spaces*, Springer Verlag, Berlin, 2001.
- [13] E. Fadell, L. Neuwirth, *Configuration spaces*, Math. Scand., **10** 1962, 111-118.
- [14] W. Fulton, J. Harris, *Representation theory. A first course*, Graduate text in mathematics 129, Springer - Verlag, New York, 1991.
- [15] M. Golasinski, L. Gonçalves, J. Guaschi, *On the homotopy fibre of the inclusion map $F_n(X) \rightarrow \prod_1^n X$ for some orbit spaces X .*, Bol. Soc. Mat. Mex (2017), 23:457-485.
- [16] W. M. Goldman, *Topological components of spaces of representations*, Invent. math. 93, 557-607(1998).
- [17] J. M. Gómez, A. Pettet, J. Souto, *On the fundamental group of $\text{Hom}(\mathbb{Z}^k, G)$* , Math. Z. (2012) 271 : 33 – 44.
- [18] V. L. Hansen, *Braids and coverings: selected topics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [19] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [20] D. Husemoller, *Fibre bundles*, Graduate text in mathematics, Springer - Verlag, New York, 1994.
- [21] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Graduate text in mathematics, Springer - Verlag, New York, 2013.
- [22] M. Mimura; H. Toda, *Topology of Lie Groups, I and II*, American, Mathematical Society, USA, 1991.
- [23] F. Napolitano, *On the cohomology of configuration spaces on surfaces*, J. London Math. Soc. (2) 68 (2003), no. 2, 477–492.
- [24] D. A. Ramras, M. Stafa, *Homological stability for spaces of commuting elements in Lie groups*, 2018, arXiv:math.AT/1805.01368v1.
- [25] E. Torres-Giese, D Sjerve, *Fundamental groups of commuting elements in Lie groups*, Bulletin of the London Mathematical Society, 40(1):65-76, 2008.

-
- [26] B. Totaro, *Configuration spaces of algebraic varieties*, Topology 35 (1996), no. 4, 1057–1067.
- [27] J. Wilson, *\mathbf{FI}_W -modules and stability criteria for representations of classical Weyl groups*, J. Algebra 420 (2014), 269–332.
- [28] E. Witten, *Constraints on supersymmetry breaking*, Nuclear Phys. B 202 (1982) 253 - 316.