SOLUCIONES A LA TAREA 3

1. Sea $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ una sucesión exacta de R–módulos y M un R–módulo. Demuestra que $0 \to \mathrm{Hom}_R(C, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(B, M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(A, M)$ es exacta.

Solución:

Sea $h \in \mathrm{Ker}(g^*)$, es decir, h es un homomorfismo $C \to M$ tal que $g^*(h) = 0$. Esto es, $hg = 0$. Dado $c \in C$, como g es sobreyectiva, existe $b \in B$ con $g(b) = 0$. Entonces

$$h(c) = hg(b) = 0$$

luego $h = 0$. Dado $k \in \mathrm{Hom}_R(C, M)$, se cumple

$$f^*g^*(k) = f^*(kg) = kgf = 0$$

ya que $gf = 0$. Por lo tanto $\mathrm{Im}(g^*) \subseteq \mathrm{Ker}(f^*)$. Sea $\phi \in \mathrm{Ker}(f^*)$, es decir, ϕ es un homomorfismo $B \to M$ tal que $f^*(\phi) = 0$, esto es $\phi f = 0$. Esto nos dice que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(\phi)$ y como la sucesión es exacta $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$. Por la propiedad universal del cociente, existe un homomorfismo $\psi \colon B/\,\mathrm{Ker}(g) \to M$ tal que $\psi\pi = \phi$, donde $\pi \colon B \to B/\,\mathrm{Ker}(g)$ es el cociente. Por el primer teorema de isomorfismo, se tiene $B/\,\mathrm{Ker}(g) \cong \mathrm{Im}(g) = C$, donde la igualdad se tiene porque g es sobreyectiva. El isomorfismo $\omega \colon B/\,\mathrm{Ker}(g) \to C$ es el que manda $b + \mathrm{Ker}(g)$ a $g(b)$, que cumple cumple $\omega\pi = g$. Consideremos $k = \psi\omega^{-1} \colon C \to M$. Cumple

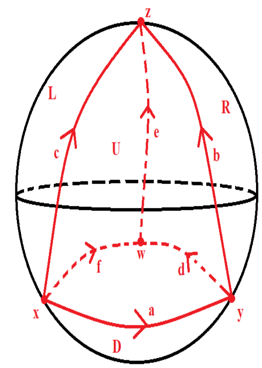
$$g^*(k) = kg = \psi\omega^{-1}g = \psi\omega^{-1}\omega\pi = \psi\pi = \phi$$

Luego $\mathrm{Ker}(f^*) = \mathrm{Im}(g^*)$. $\square$

2. Calcula los grupos de homología simplicial de $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$.

Solución:

Consideremos la estructura de Δ–complejo de S^2 que se observa en el siguiente dibujo.



En caso de que no se aprecie bien, D es el casquete de abajo, L y R los casquetes izquierdo y derecho, respectivamente, y U el casquete frontal. El punto w está en el hemisferio posterior, es decir, no se vería. El complejo simplicial tiene la forma

$$\mathbb{Z}\{U, L, R, D\} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\{a, b, c, d, e, f\} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\{x, y, z, w\}$$

donde

$$\begin{aligned}
\partial_2(L) &= e - c + f \\
\partial_2(U) &= b - c + a \\
\partial_2(D) &= d - f + a \\
\partial_2(R) &= e - b + d
\end{aligned}$$

y la primera diferencial está dada por

$$\begin{aligned}
\partial_1(a) &= y - x \\
\partial_1(b) &= z - y \\
\partial_1(c) &= z - x \\
\partial_1(d) &= w - y \\
\partial_1(e) &= z - w \\
\partial_1(f) &= w - x
\end{aligned}$$

Para empezar ya obtenemos automáticamente que $H_k^\Delta(S^2) = 0$ si $k \geq 3$. Observamos que $\mathrm{Im}(\partial_1) + \mathbb{Z}x = \mathbb{Z}\{x, y, z, w\}$, así que

$$H_0^\Delta(S^2) = \frac{\mathbb{Z}\{x, y, z, w\}}{\mathrm{Im}(\partial_1)} = \frac{\mathrm{Im}(\partial_1) + \mathbb{Z}x}{\mathrm{Im}(\partial_1)} \cong \frac{\mathbb{Z}x}{\mathrm{Im}(\partial_1) \cap \mathbb{Z}x}$$

Sea $z \in \mathrm{Im}(\partial_1) \cap \mathbb{Z}x$. Entonces

$$z = nx = m_1(y-x) + m_2(z-y) + m_3(z-x) + m_4(w-y) + m_5(z-w) + m_6(w-x)$$

de donde

$$\begin{aligned} n &= -m_1 - m_3 - m_6 \\ 0 &= m_1 - m_2 - m_4 \\ 0 &= m_2 + m_3 + m_5 \\ 0 &= m_4 - m_5 + m_6 \end{aligned}$$

Sumando las tres últimas ecuaciones obtenemos $0 = m_1 + m_3 + m_6$, luego $n = 0$ y entonces $z = 0$. Por lo tanto

$$H_0^\Delta(S^2) \cong \frac{\mathbb{Z}x}{0} \cong \mathbb{Z}$$

Sea $m_1a + m_2b + m_3c + m_4d + m_5e + m_6f \in \mathrm{Ker}(\partial_1)$, es decir

$$\begin{aligned} 0 &= m_1(y-x) + m_2(z-y) + m_3(z-x) + m_4(w-y) + m_5(z-w) + m_6(w-x) \\ &= (-m_1 - m_3 - m_6)x + (m_1 - m_2 - m_4)y + (m_2 + m_3 + m_5)z + (m_4 - m_5 + m_6)w \end{aligned}$$

Los cuatro coeficientes deben ser cero, pero como vimos antes el primero es la suma de los otros tres con el signo cambiado. Así que es suficiente igualar los últimos tres a cero, de donde

$$\begin{aligned} m_2 &= -m_3 - m_5 \\ m_4 &= m_5 - m_6 \\ m_1 &= m_2 + m_4 = -m_3 - m_6 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} m_1a + m_2b + m_3c + m_4d + m_5e + m_6f &= (-m_3 - m_6)a + (-m_3 - m_5)b + m_3c + (m_5 - m_6)d + m_5e + m_6f \\ &= m_3(-a - b + c) + m_5(-b + d + e) + m_6(-a - d + f) \end{aligned}$$

Así que el núcleo de ∂_1 está generado por $\{-a - b + c, -b + d + e, -a - d + f\}$. Por otra parte, la imagen de ∂_2 está generada por $\{e - c + f, b - c + a, d - f + a, e - b + d\}$. Pero

$$e - c + f = (e - b + d) + (b - c + a) - (d - f + a)$$

así que está generado por $\{b - c + a, d - f + a, e - b + d\}$. Entonces también está generado por $\{-b + c - a, -d + f - a, e - b + d\}$ Por lo tanto

$$H_1^\Delta(S^2) = 0$$

Por último, sea $n_L L + n_U U + n_D D + n_R R \in \operatorname{Ker}(\partial_2)$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= n_L(e-c+f) + n_U(b-c+a) + n_D(d-f+a) + n_R(e-b+d) \\ &= (n_U+n_D)a + (n_U-n_R)b + (-n_L-n_U)c + (n_D+n_R)d + (n_L+n_R)e + (n_L-n_D)f \end{aligned}$$

de donde $n_U = -n_D = n_R = -n_L$. Es decir

$$n_L L + n_U U + n_D D + n_R R = n_L L - n_L U + n_L D - n_L R = n_L(L - U + D - R)$$

Y también vemos que $L - U + D - R \in \operatorname{Ker}(\partial_2)$. Por lo tanto

$$H_2^\Delta(S^2) \cong \operatorname{Ker}(\partial_2) = \mathbb{Z}(L - U + D - R) \cong \mathbb{Z}$$

Para resumir, hemos obtenido

$$H_k^\Delta(S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, 2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y esto concluye el problema. $\square$

3. Sean $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ homomorfismos de R–módulos. Construye una sucesión exacta

   $$0 \to \operatorname{Ker}(f) \to \operatorname{Ker}(gf) \to \operatorname{Ker}(g) \to \operatorname{Coker}(f) \to \operatorname{Coker}(gf) \to \operatorname{Coker}(g) \to 0$$

   con justificación de que es exacta. **Pista:** Primero usa diagramas apropiados de la forma

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker}(f) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(g) \arrow[r] & B \arrow[r] & C & \end{tikzcd}$$

   Si usaste los dos, asegúrate de que las sucesiones exactas que obtuviste se pueden pegar. Si solo usaste uno, agrégale lo que te falta y usa caza de diagramas.

Solución:

Consideremos primero el diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "gf"] & B \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"] & \operatorname{Coker}(f) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "1_C"'] & C \arrow[r] & 0 & \end{tikzcd}$$

donde q es el homomorfismo cociente y h es el morfismo cero. Claramente los cuadrados conmutan y las dos filas son exactas, así que el lema de la serpiente nos dice que hay una sucesión exacta

$$\mathrm{Ker}(gf) \to \mathrm{Ker}(g) \to \mathrm{Ker}(h) \to \mathrm{Coker}(gf) \to \mathrm{Coker}(g) \to \mathrm{Coker}(h)$$

Pero como h es el morfismo cero, vemos que $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Coker}(f)$ y $\mathrm{Coker}(h) = 0$. Luego nuestra sucesión exacta tiene la forma

$$\mathrm{Ker}(gf) \to \mathrm{Ker}(g) \to \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(gf) \to \mathrm{Coker}(g) \to 0$$

Será conveniente luego saber cómo está definido el morfismo $\mathrm{Ker}(gf) \to \mathrm{Ker}(g)$. Por su construcción en la demostración del lema de la serpiente, este morfismo está dado por $x \mapsto f(x)$.

Ahora hacemos lo mismo con el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] \arrow[d, "k"] & A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "gf"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(g) \arrow[r, "i"'] & B \arrow[r, "g"'] & C &
\end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión y k es el morfismo cero. Las dos filas son exactas y los cuadrados conmutan, así que por el lema de la serpiente, existe una sucesión exacta

$$\mathrm{Ker}(k) \to \mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(gf) \to \mathrm{Coker}(k) \to \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(gf)$$

Como k es el morfismo cero, tenemos $\mathrm{Ker}(k) = 0$ y $\mathrm{Coker}(k) = \mathrm{Ker}(g)$. Así que esta segunda sucesión exacta tiene la forma

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(gf) \to \mathrm{Ker}(g) \to \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(gf)$$

De hecho la única parte que nos interesa es

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(gf) \to \mathrm{Ker}(g)$$

Identifiquemos el morfismo $\mathrm{Ker}(gf) \to \mathrm{Ker}(g)$. Obtuvimos $\mathrm{Ker}(g)$ porque era $\mathrm{Coker}(k)$, así que este morfismo corresponde al morfismo de conexión que se construye en la demostración del lema de la serpiente. Dado $a \in \mathrm{Ker}(gf)$, existe un elemento en A que bajo la identidad se mapea en a, que es el mismo a. Le aplicamos f, y debe existir $x \in \mathrm{Ker}(g)$ tal que $i(x) = f(a)$. Notamos que $f(a) \in \mathrm{Ker}(g)$ pues $gf(a) = 0$ al estar a en $\mathrm{Ker}(gf)$. Y cumple $i(f(a)) = f(a)$. Así que el morfismo de conexión envía a en $f(a)$. Este es el mismo morfismo

$\operatorname{Ker}(gf) \to \operatorname{Ker}(g)$ que obtuvimos en la sucesión exacta de arriba, así que podemos unirlas y obtenemos una sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Ker}(f) \to \operatorname{Ker}(gf) \to \operatorname{Ker}(g) \to \operatorname{Coker}(f) \to \operatorname{Coker}(gf) \to \operatorname{Coker}(g) \to 0$$

como queríamos demostrar. □

De hecho, la demostración también nos permite identificar el resto de morfismos en esta sucesión exacta. La función $\operatorname{Ker}(f) \to \operatorname{Ker}(gf)$ es la inclusión. El morfismo $\operatorname{Ker}(g) \to \operatorname{Coker}(f)$ envía b a su clase. El morfismo $\operatorname{Coker}(f) \to \operatorname{Coker}(gf)$ envía la clase de b a la clase de $g(b)$. Y por último, el morfismo $\operatorname{Coker}(gf) \to \operatorname{Coker}(g)$ envía la clase de c a la clase de c.

4. Sea $C^\infty(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las funciones suaves $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Demuestra que hay una sucesión exacta corta de espacios vectoriales reales

$$0 \to \mathbb{R} \to C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}) \to 0$$

que escinde. **Pista:** Derivada.

Solución:

Consideremos la función

$$\begin{aligned} d\colon C^\infty(\mathbb{R}) &\to C^\infty(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

Puesto que tomar derivada es una transformación $\mathbb{R}$–lineal, la función d es una transformación lineal. La función $\{a\} \to C^\infty(\mathbb{R})$ que manda a a la función constante c_1 igual a 1 nos define por la propiedad universal del $\mathbb{R}$–módulo libre un homomorfismo de $\mathbb{R}$–módulos $c\colon \mathbb{R} \to C^\infty(\mathbb{R})$. Por la demostración de esta propiedad, el homomorfismo c está dado por

$$c(r) = rc_1 = c_r$$

donde c_r es la función constante igual a r. Ahora veamos que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{c} C^\infty(\mathbb{R}) \xrightarrow{d} C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

es exacta. Claramente c es inyectiva y el núcleo de d son las funciones constantes, que forman la imagen de c. Por último d es sobreyectiva porque dado $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, por el teorema fundamental del cálculo, la función

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

cumple $d(g(x)) = f(x)$. Consideremos

$$\begin{aligned} s\colon C^\infty(\mathbb{R}) &\to C^\infty(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto g \end{aligned}$$

Por las propiedades de la integral definida, esta es una transformación $\mathbb{R}$–lineal y cumple $ds = 1$ por el teorema fundamental del cálculo. Por lo tanto la sucesión escinde. $\square$

(b) Usa la parte anterior para dar un isomorfismo explícito $C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$ de espacios vectoriales reales.

Solución:

Como la sucesión exacta que construimos en la parte (a) escinde, por el lema de escisión sabemos que también existe un homomorfismo $r\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $rc = 1_{\mathbb{R}}$. Es más, en la demostración vimos que lo podemos construir a partir de s mediante $r(f) = a$, donde

$$c(a) = f - sd(f) = f - \int_0^x f'(t)dt = f - f + f(0) = f(0)$$

Es decir, $a = f(0)$. De nuevo por la demostración del lema de escisión, sabemos que el morfismo

$$\begin{aligned} C^\infty(\mathbb{R}) &\to C^\infty(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R} \\ f &\mapsto (f', f(0)) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales reales. $\square$

5. Sea $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ una sucesión exacta de grupos abelianos.

(a) Demuestra que $A/3A \xrightarrow{f_*} B/3B \xrightarrow{g_*} C/3C \to 0$ es exacta, donde $f_*(a+3A) = f(a)+3B$ y $g_*(b+3B) = g(b)+3C$.

Solución:

Sea $c + 3C \in C/3C$. Como g es sobreyectiva, existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$ y por lo tanto $g_*(b + 3B) = c + 3C$. También se cumple

$$g_* f_*(a + 3A) = gf(a) + 3C = 0 + 3C = 3C$$

luego $\mathrm{Im}(f_*) \subseteq \mathrm{Ker}(g_*)$. Sea $b + 3B \in \mathrm{Ker}(g_*)$, es decir

$$3C = g_*(b + 3B) = g(b) + 3C$$

y por lo tanto $g(b) \in 3C$. Es decir $g(b) = 3c$ para algún $c \in C$. Como g es sobreyectiva, existe $b' \in B$ tal que $g(b') = c$ y entonces

$$g(b) = 3c = 3g(b') = g(3b')$$

de donde $b - 3b' \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Luego existe $a \in A$ con $f(a) = b - 3b'$.

$$f_*(a + 3A) = f(a) + 3B = b - 3b' + 3B = b + 3B$$

Con esto obtenemos $\mathrm{Ker}(g_*) = \mathrm{Im}(f_*)$. □

(b) Da un ejemplo en el cual $0 \to A/3A \xrightarrow{f_*} B/3B \xrightarrow{g_*} C/3C \to 0$ no es exacta, con justificación.

Solución:

Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{3} \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/3 \longrightarrow 0$$

donde q es el cociente. La sucesión asociado tendría la forma

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/3 \xrightarrow{3_*} \mathbb{Z}/3 \xrightarrow{q_*} \mathbb{Z}/3 \longrightarrow 0$$

ya que $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/3$ y $\mathbb{Z}/3/3\mathbb{Z}/3 = \mathbb{Z}/3$. Por otra parte

$$3_*([m]_3) = 3_*(m + 3\mathbb{Z}) = 3m + 3\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z} = [0]_3$$

$$q_*([m]_3) = q_*(m + 3\mathbb{Z}) = q(m) + 3\mathbb{Z}/3 = q(m) = [m]_3$$

Con lo cual esta sucesión tendría la forma

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/3 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/3 \xrightarrow{1_{\mathbb{Z}/3*}} \mathbb{Z}/3 \longrightarrow 0$$

que no es exacta ya que el morfismo 0 no es inyectivo. □

6. Sea k un campo. Si E es un espacio vectorial sobre k, denotamos por $\dim_k E$ a su dimensión.

(a) Sea $n \geq 0$ y sea $0 \to A_n \to A_{n-1} \to \ldots \to A_0 \to 0$ una sucesión exacta de espacios vectoriales de dimensión finita sobre k. Prueba que

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \dim_k A_j = 0$$

Solución:

Lo haremos por inducción sobre n. Si $n = 0$, tendríamos una sucesión exacta

$$0 \to A_0 \to 0$$

Pero como el núcleo de la función $A_0 \to 0$ es todo A_0 y esto debe ser igual a la imagen de la función $0 \to A_0$, que es 0, obtenemos $A_0 = 0$. En particular

$$\dim_k A_0 = 0$$

Si $n = 1$, tendríamos una sucesión exacta

$$0 \to A_0 \to A_1 \to 0$$

y como vimos en clase, esto implica que $A_0 \cong A_1$ y en particular $\dim_k A_0 = \dim_k A_1$. Entonces

$$\dim_k A_0 - \dim_k A_1 = 0$$

Sea $n \geq 2$ y supongamos por inducción que el resultado es cierto para $n-1$ y sean $f_j \colon A_j \to A_{j-1}$ los morfismos que aparecen en la sucesión exacta. Consideremos la siguiente sucesión

$$0 \to A_n \to A_{n-1} \to \ldots \to A_2 \xrightarrow{\hat{f}_2} \operatorname{Im}(f_2) \to 0$$

donde $\hat{f}_2$ es la restricción de codominio de f_2. Esta nueva sucesión es exacta porque $\hat{f}_2$ es sobreyectiva, y el núcleo de $\hat{f}_2$ es el mismo que el de f_2, que es la imagen de f_3. También $\operatorname{Im}(f_2)$ es un espacio vectorial de dimensión finita porque es un subespacio de A_1, que tiene dimensión finita. Si llamamos $B_0 = \operatorname{Im}(f_2)$ y $B_j = A_{j+1}$ para $j > 0$, por la hipótesis de inducción se tiene

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \dim_k B_i = 0$$

Por otra parte, también tenemos una sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Ker}(f_1) \to A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \to 0$$

de k–módulos. Como k es un campo, todos los k–módulos son libres y por lo tanto la sucesión escinde de donde

$$A_1 \cong A_0 \oplus \operatorname{Ker}(f_1)$$

Por lo tanto

$$\dim_k A_1 = \dim_k[A_0 \oplus \operatorname{Ker}(f_1)] = \dim_k A_0 + \dim_k \operatorname{Ker}(f_1) = \dim_k A_0 + \dim_k \operatorname{Im}(f_2)$$

donde la penúltima igualdad se cumple porque si $A_0 \cong k^m$ y $\operatorname{Ker}(f_1) \cong k^n$, entonces $A_0 \oplus \operatorname{Ker}(f_1) \cong k^{m+n}$. Es decir,

$$\dim_k A_1 = \dim_k A_0 + \dim_k B_0$$

y sustituyendo esto en la suma alternada anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \dim_k B_i \\
&= \dim_k A_1 - \dim_k A_0 + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i \dim_k B_i \\
&= \dim_k A_1 - \dim_k A_0 + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i \dim_k A_{i+1} \\
&= \sum_{i=-1}^{n-1}(-1)^i \dim_k A_{i+1}
\end{aligned}$$

Cambiando $j = i+1$, tenemos

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j-1} \dim_k A_j = 0$$

y multiplicando por -1

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j} \dim_k A_j = 0$$

como queríamos probar. $\square$

(b) Se dice que un complejo C_* es acotado si existe $N > 0$ tal que $C_j = 0$ si $|j| > N$. Si C_* es un complejo acotado de espacios vectoriales de dimensión finita sobre k, definimos su característica de Euler como $\chi(C_*) = \sum_{j=-N}^{N}(-1)^j \dim_k C_j$. Demuestra que $\chi(C_*) = \chi(H_*(C))$, donde $H_*(C)$ es el complejo que tiene a $H_j(C_*)$ en dimensión j, y todas sus diferenciales iguales a 0.

Solución:

Primero notemos que la definición de la característica de Euler no depende del N que escojamos, pues si escogemos otro M tal, podemos suponer que $M > N$ y entonces tendríamos que $C_j = 0$ si $N < |j| \leq M$, y entonces la sumatoria daría lo mismo usando M ó N. Sean $\partial_n \colon C_n \to C_{n-1}$ las diferenciales de C_* con lo que

$$H_n(C_*) = \frac{\operatorname{Ker}(\partial_n)}{\operatorname{Im}(\partial_{n+1})}$$

Como los C_n son espacios vectoriales de dimensión finita, también lo son $\operatorname{Im}(\partial_{n+1})$ y $\operatorname{Ker}(\partial_n)$ pues son subespacios de C_n. Además tenemos una sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Im}(\partial_{n+1}) \to \operatorname{Ker}(\partial_n) \to H_n(C_*) \to 0$$

de espacios vectoriales de dimensión finita para cada n. Por la parte (b), se tiene

$$\dim_k \operatorname{Ker}(\partial_n) = \dim_k H_n(C_*) + \dim_k \operatorname{Im}(\partial_{n+1})$$

Por otra parte, también tenemos una sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Ker}(\partial_n) \to C_n \to \operatorname{Im}(\partial_n) \to 0$$

de espacios vectoriales de dimensión finita para cada n, así que

$$\dim_k C_n = \dim_k \operatorname{Ker}(\partial_n) + \dim_k \operatorname{Im}(\partial_n)$$

Sea N tal que $C_j = 0$ si $|j| > N$. Ahora calculemos

$$\begin{aligned}
\chi(C_*) &= \sum_{i=-N}^{N} (-1)^i \dim_k C_i \\
&= \sum_{i=-N}^{N} (-1)^i [\dim_k \operatorname{Ker}(\partial_i) + \dim_k \operatorname{Im}(\partial_i)] \\
&= \sum_{i=-N}^{N} (-1)^i [\dim_k H_i(C_*) + \dim_k \operatorname{Im}(\partial_{i+1}) + \dim_k \operatorname{Im}(\partial_i)] \\
&= \chi(H_*(C)) + \sum_{i=-N}^{N} (-1)^i [\dim_k \operatorname{Im}(\partial_{i+1}) + \dim_k \operatorname{Im}(\partial_i)] \\
&= \chi(H_*(C)) + (-1)^N \dim_k \operatorname{Im}(\partial_{N+1}) + (-1)^{-N} \dim_k \operatorname{Im}(\partial_{-N}) \\
&= \chi(H_*(C))
\end{aligned}$$

La penúltima igualdad se cumple porque si $-N < j \leq N$, entonces $\dim_k \operatorname{Im}(\partial_j)$ aparece dos veces en esta sumatoria, una con signo $(-1)^j$ y otra con signo $(-1)^{j-1}$. La última igualdad se cumple porque al ser $C_{N+1} = 0$, se tiene $\operatorname{Im}(\partial_{N+1})$ y al ser $C_{-N-1} = 0$, se cumple $\operatorname{Im}(\partial_{-N}) = 0$. □

(c) Sea $0 \to C_* \to D_* \to E_* \to 0$ una sucesión exacta de complejos acotados de espacios vectoriales de dimensión finita sobre k. Demuestra que

$$\chi(D_*) = \chi(C_*) + \chi(E_*)$$

Solución:

Para cada n tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \to C_n \to D_n \to E_n \to 0$$

de espacios vectoriales de dimensión finita. Por la parte (a), tenemos

$$\dim_k D_n = \dim_k C_n + \dim_k E_n$$

y por lo tanto

$$\chi(D_*) = \chi(C_*) + \chi(E_*)$$

como queríamos probar. □

7. Sea P un R–módulo proyectivo. Demuestra que existe un R–módulo libre F tal que $P \oplus F$ es libre. **Pista:** Si $P \oplus Q$ es libre, ¿cómo es $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}(Q \oplus P)$?

Solución:

En esta solución usamos la convención de que $\mathbb{N}$ contiene al 0. Como P es proyectivo, existe un R–módulo Q tal que $P \oplus Q = L$ es libre. Sea $F = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}}(Q \oplus P)$. Notemos que

$$F \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{N}}(P \oplus Q) \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} L$$

donde el primer isomorfismo envía $((q_i, p_i))_i$ a $((p_i, q_i))_i$. Es claro que esto define un isomorfismo de R–módulos, su inversa vuelve a permutar las dos componentes de cada elemento de la tupla. Así que esta suma directa es libre. Por otra parte, también tenemos un isomorfismo

$$P \oplus F = P \oplus \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (Q \oplus P) \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (P \oplus Q) = F$$

donde el isomorfismo envía $(p, ((q_i, p_i))_i)$ a $((p_{i-1}, q_i))_i$, y $p_{-1} = p$. De nuevo es claro que esto define un isomorfismo, su inversa envía $((p_i, q_i))_i$ a $(p_0, ((q_i, p_{i+1}))_i)$. □

8. Sea R el anillo de matrices 5×5 con entradas en $\mathbb{C}$ y consideremos $P = \mathbb{C}^5$ con la estructura de R–módulo dada por multiplicación de matrices por vectores columna. Demuestra que P es un R–módulo proyectivo que no es libre.

Solución:

Sea I la matriz identidad 5×5 y sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Denotamos por e_j al j-ésimo vector de la base estándar de $\mathbb{C}$. Notemos que MA es la matriz cuya primera columna es Me_1 y las otras cuatro columnas son el vector cero. Veamos primero que $P \cong RA$ como R–módulos. Para ello, construimos la función

$$\begin{aligned} \varphi \colon RA &\to P \\ MA &\mapsto Me_1 \end{aligned}$$

Primero hay que ver que está bien definida. Si $MA = M'A$, en particular sus primeras columnas son iguales, y esas son Me_1 y $M'e_1$.

$$\varphi(MA + M'A) = \varphi((M + M')A) = (M + M')e_1 = Me_1 + M'e_1 = \varphi(MA) + \varphi(MA)$$

$$\varphi(M'(MA)) = \varphi((M'M)A) = (M'M)e_1 = M'(Me_1) = M'\varphi(MA)$$

donde la última igualdad se cumple porque la multiplicación de la matriz M' sobre el vector columna Me_1 corresponde al producto escalar de P. Es sobreyectiva, porque dado un vector columna $v \in P$, siempre existe una matriz M en R cuya primera columna es v, es decir $Me_1 = v$. Entonces $\varphi(MA) = v$. Por otra parte, si $Me_1 = M'e_1$, eso quiere decir que la primera columna de M y M' coinciden. Entonces las primeras columnas de MA y $M'A$

coinciden, pero también las otras cuatro porque son vectores cero. Con esto hemos probado que φ es un isomorfismo de R–módulos.

Ahora consideremos

$$\begin{aligned} \psi\colon RA \oplus R(I-A) &\to R \\ (MA, M'(I-A)) &\mapsto MA + M'(I-A) \end{aligned}$$

Es un homomorfismo de R–módulos por la propiedad universal de la suma directa aplicadas a las inclusiones $RA \to R$ y $R(I-A) \to R$. Será útil el hecho de que $A^2 = A$ y por lo tanto

$$A(I-A) = A - A^2 = 0$$

$$(I-A)A = 0$$

$$(I-A)(I-A) = I - 2A + A^2 = I - A$$

Supongamos que $\psi(MA, M'(I-A)) = 0$. Entonces $MA = -M'(I-A)$ y por lo tanto $MA^2 = -M'(I-A)A = 0$. Es decir, $MA = 0$. Pero también obtenemos $0 = MA(I-A) = -M'(I-A)(I-A) = -M'(I-A)$, de donde $M'(I-A) = 0$. Luego ψ es inyectiva. Para la sobreyectividad, dado $M \in R$, calculamos

$$\psi(MA, M(I-A)) = MA + M(I-A) = M$$

Luego ψ es un isomorfismo de R–módulos y por lo tanto

$$R \cong RA \oplus R(I-A) \cong P \oplus R(I-A)$$

Como P es sumando directo de un libre, es proyectivo.

Para ver que no es libre, primero consideremos el subanillo S de R dado por las matrices escalares, es decir

$$S = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$$

Es claro que es un subanillo, pero además la función $\omega\colon \mathbb{C} \to S$ que envía λ a λI es un isomorfismo de anillos. Podemos ver a P como un $\mathbb{C}$–módulo mediante

$$\lambda \cdot v = \omega(\lambda)v = \lambda I v = \lambda v$$

Así que como $\mathbb{C}$–módulo, P es $\mathbb{C}^5$ con su estructura usual de espacio vectorial complejo. Igualmente, podemos ver a R como un $\mathbb{C}$–módulo mediante

$$\lambda \cdot M = \omega(\lambda)M = \lambda I M = \lambda M$$

Así que como $\mathbb{C}$–módulo, R es $\mathbb{C}^{25}$ con su estructura usual de espacio vectorial complejo. Si P fuese un R–módulo libre, sería isomorfo a RJ para algún J como R–módulos, y por lo tanto, como S–módulos, y como $\mathbb{C}$–módulos. Pero $\dim_{\mathbb{C}} P = 5$, mientras que $\dim_{\mathbb{C}} RJ \geq 25$ si $J \neq \emptyset$ o es cero cuando $J = \emptyset$. Concluimos que P no es un R–módulo libre. $\square$