## SOLUCIONES A LA TAREA 2

1. El lema de los cinco. Consideremos el siguiente diagrama de $R$–módulos y homomorfismos

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "t"] & D \arrow[r, "k"] \arrow[d, "u"] & E \arrow[d, "v"] \\
A' \arrow[r, "\alpha"] & B' \arrow[r, "\beta"] & C' \arrow[r, "\gamma"] & D' \arrow[r, "\epsilon"] & E'
\end{tikzcd}$$

en el que los cuadrados son conmutativos y las dos filas son exactas. Supongamos que $s$ y $u$ son isomorfismos, $r$ es sobreyectiva y $v$ es inyectiva. Prueba que $t$ es un isomorfismo.

**Solución:**

**Inyectiva**. Sea $c \in C$ tal que $t(c) = 0$. Entonces $uh(c) = \gamma t(c) = 0$. Como $u$ es inyectiva, $h(c) = 0$, es decir $c \in \operatorname{Ker}(h) = \operatorname{Im}(g)$. Es decir, $c = g(b)$. Ahora $\beta s(b) = tg(b) = 0$, luego $s(b) \in \operatorname{Ker}(\beta) = \operatorname{Im}(\alpha)$. Es decir, $s(b) = \alpha(a)$. Como $r$ es sobreyectiva, existe $a_2 \in A$ tal que $r(a_2) = \alpha(a)$. Ahora

$$sf(a_2) = \alpha r(a_2) = \alpha(a) = s(b)$$

y como $s$ es inyectiva, entonces $b = f(a_2)$ y por lo tanto $c = g(b) = gf(a_2) = 0$.

**Sobreyectiva**. Sea $c \in C'$. Como $u$ es sobreyectiva, existe $d \in D$ tal que $u(d) = \gamma(c)$. Ahora

$$vk(d) = \epsilon u(d) = \epsilon\gamma(c) = 0$$

Como $v$ es inyectiva, $k(d) = 0$, es decir, $d \in \operatorname{Ker}(k) = \operatorname{Im}(h)$. Luego $d = h(c_2)$. Consideremos $t(c_2) - c$. Se tiene

$$\gamma(t(c_2) - c) = \gamma t(c_2) - \gamma(c) = uh(c_2) - u(d) = u(h(c_2) - d) = 0$$

Por lo tanto $t(c_2) - c \in \operatorname{Ker}(\gamma) = \operatorname{Im}(\beta)$, es decir, $t(c_2) - c = \beta(b)$. Como $s$ es sobreyectiva, existe $b_2 \in B$ tal que $b = s(b_2)$. Entonces

$$t(c_2) - c = \beta s(b_2) = tg(b_2)$$

de donde $c = t(c_2 - g(b_2))$ y hemos probado que $t$ es sobreyectiva. $\square$

2. Sea $A \xrightarrow{f} B \to C \to D \xrightarrow{g} E$ una sucesión exacta. Demuestra que existe una sucesión exacta corta $0 \to \mathrm{Coker}(f) \to C \to \mathrm{Ker}(g) \to 0$.

**Solución:**

Le damos nombre a los otros morfismos

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} C \xrightarrow{j} D \xrightarrow{g} E$$

El morfismo $h\colon B \to C$ factoriza a través del cociente $B \to B/\mathrm{Ker}(h)$ por la propiedad universal del cociente. Como $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Im}(f)$, obtenemos un morfismo $\varphi\colon \mathrm{Coker}(f) \to C$. Este morfismo está dado por $\varphi(b + \mathrm{Im}(f)) = h(b)$.

Por otra parte el morfismo $j\colon C \to D$ restringe a un morfismo $C \to \mathrm{Im}(j)$. Como $\mathrm{Im}(j) = \mathrm{Ker}(g)$, así obtenemos un morfismo $\psi\colon C \to \mathrm{Ker}(g)$ que de hecho está dado por $\psi(c) = j(c)$. Veamos que la sucesión

$$0 \to \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{\psi} \mathrm{Ker}(g) \to 0$$

es exacta. En primer lugar, $b + \mathrm{Im}(f)$ pertenece al núcleo de $\varphi$ si y solo si $h(b) = 0$, es decir, $b \in \mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Im}(f)$ y entonces $b + \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f)$. Luego $\varphi$ es inyectiva. Como $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(j)$ y $\psi$ es la restricción de $j$ a su imagen, vemos que $\psi$ es sobreyectiva.

Por último, como $\psi$ es la restricción de $j$ a su imagen, $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Ker}(j) = \mathrm{Im}(h)$. Pero $\varphi(b + \mathrm{Im}(f)) = h(b)$, así que $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(\varphi)$. Es decir, $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Im}(\varphi)$. $\square$

3. Para cada $n \geq 0$, definamos $C_n = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y sea $C_n = 0$ si $n < 0$. Esto define un complejo $C_*$ donde todas las diferenciales $C_n \to C_{n-1}$ con $n \geq 1$ están dadas por $(m, n) \mapsto (m + n, -m - n)$. Demuestra que $C_*$ es homotópicamente equivalente a $\mathbb{Z}[0]_*$.

**Solución:**

Primero definimos $f_*\colon C_* \to \mathbb{Z}[0]_*$ mediante $f_j = 0$ si $j \neq 0$ y

$$\begin{aligned} f_0\colon \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ (m, n) &\mapsto m + n \end{aligned}$$

Similarmente, definimos $g_*\colon \mathbb{Z}[0]_* \to C_*$ mediante $g_j = 0$ si $j \neq 0$ y

$$\begin{aligned} g_0\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ m &\mapsto (m, 0) \end{aligned}$$

Puesto que todas las diferenciales de $\mathbb{Z}[0]_*$ son cero, es obvio que $f_*$ y $g_*$ son morfismos de complejos. Notemos que $f_0 g_0 = 1_{\mathbb{Z}[0]_0}$ y $f_j g_j = 0 = 1_{\mathbb{Z}[0]_j}$ si $j \neq 0$. Así que $f_* g_* = 1_{\mathbb{Z}[0]_*}$. Por otra parte $g_j f_j = 0$ si $j \neq 0$ y

$$g_0 f_0(m, n) = (m + n, 0)$$

Así que $g_* f_*$ no es igual a $1_{C_*}$. Pero veremos que es homótopa a la identidad. Para ello consideremos $h_j = 0$ si $j < 0$ y cuando $j \geq 0$ definimos

$$\begin{aligned} h_j\colon C_j &\to C_{j+1} \\ (m, n) &\mapsto (-n, 0) \end{aligned}$$

Si $j < 0$, tenemos

$$d_{j-1} h_j + h_{j-1} d_j = 0 = 1_{C_j} - g_j f_j$$

Por otra parte

$$(d_1 h_0 + h_{-1} d_0)(m, n) = d_1 h_0(m, n) = d_1(-n, 0) = (-n, n)$$

$$(1_{C_0} - g_0 f_0)(m, n) = (m, n) - (m + n, 0) = (-n, n)$$

Y si $j > 0$, tenemos

$$(d_{j+1} h_j + h_{j-1} d_j)(m, n) = d_{j+1}(-n, 0) + h_{j-1}(m+n, -m-n) = (-n, n) + (m+n, 0) = (m, n)$$

$$(1_{C_j} - g_j f_j)(m, n) = 1_{C_j}(m, n) = (m, n)$$

Con todo esto hemos probado que $g_* f_*$ es homótopa a la identidad. Y como ya teníamos también que $f_* g_* = 1_{\mathbb{Z}[0]_*}$, concluimos que $C_*$ es homotópicamente equivalente a $\mathbb{Z}[0]_*$. $\square$

4. Consideremos la siguiente sucesión exacta de grupos abelianos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/3 \arrow[r] & A \arrow[r] & \mathbb{Z}/4 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[d] \\ & 0 & C \arrow[l] & \mathbb{Z}^2 \arrow[l] & \mathbb{Z}^2 \arrow[l, "f"'] & B \arrow[l] \end{tikzcd}$$

donde $f(x, y) = (3x + 2y, x + y)$. Determina $A$, $B$ y $C$ salvo isomorfismo.

**Solución:**

Le damos nombre a algunos de los morfismos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/3 \arrow[r] & A \arrow[r] & \mathbb{Z}/4 \arrow[r, "g"] & \mathbb{Z}/2 \arrow[r, "h"] & \mathbb{Z} \arrow[d] \\ & 0 & C \arrow[l] & \mathbb{Z}^2 \arrow[l] & \mathbb{Z}^2 \arrow[l, "f"'] & B \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Por el ejercicio 2, hay una sucesión exacta corta

$$0 \to \operatorname{Coker}(f) \to C \to 0 \to 0$$

luego $C \cong \operatorname{Coker}(f)$. Puesto que $(1,0) = f(1,-1)$ y $(0,1) = f(-2,3)$, la función $f$ es sobreyectiva, luego $C = 0$.

De nuevo por el ejercicio 2, hay una sucesión exacta corta

$$0 \to \mathbb{Z}/3 \to A \to \operatorname{Ker}(g) \to 0$$

Hay dos posibilidades para $g([1]_4)$, o bien es $[1]_2$ o bien es $[0]_2$. Notemos que

$$2h([1]_2) = h(2[1]_2) = h([0]_2) = 0$$

Como $h([1]_2) \in \mathbb{Z}$, esto nos dice que $h([1]_2) = 0$. Es decir, $h$ es el homomorfismo cero. Por lo tanto $\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Ker}(h) = \mathbb{Z}/2$ de donde $g$ es sobreyectiva. Luego $g([1]_4) = [1]_2$ y entonces

$$g([m]_4) = g(m[1]_4) = mg([1]_4) = m[1]_2 = [m]_2$$

y entonces $\operatorname{Ker}(g) = \{[0]_4, [2]_4\} \cong \mathbb{Z}/2$. Es decir, hay una sucesión exacta corta

$$0 \to \mathbb{Z}/3 \xrightarrow{h} A \to \mathbb{Z}/2 \to 0$$

y entonces

$$\mathbb{Z}/2 \cong \operatorname{Coker}(h) = A/\operatorname{Im}(h)$$

Pero como $h$ es inyectiva, $\operatorname{Im}(h) \cong \mathbb{Z}/3$. Como $A$ es la unión de las dos clases laterales de $A/\operatorname{Im}(h)$ y cada clase lateral tiene $|\operatorname{Im}(h)| = 3$ elementos, esto nos dice que $A$ es un grupo abeliano de orden seis, es decir, $A \cong \mathbb{Z}/6$.

Finalmente, usando otra vez el ejercicio 2, tenemos una sucesión exacta corta.

$$0 \to \operatorname{Coker}(h) \to B \to \operatorname{Ker}(f) \to 0$$

Ya vimos que $h$ es el homomorfismo cero, así que $\operatorname{Coker}(h) = \mathbb{Z}$. Por otra parte, si $f(x,y) = (0,0)$, entonces

$$x + y = 0 = 3x + 2y$$

y entonces $0 = (3x+2y)-2(x+y) = x$ y por lo tanto también $y = 0$. Por lo tanto $\mathrm{Ker}(f) = 0$ y $B \cong \mathbb{Z}$. $\square$

5. Dado un complejo $(C_*, \partial_*)$, definimos $\mathrm{Cone}(C)_n = C_{n-1} \oplus C_n$ y $d_n \colon \mathrm{Cone}(C)_n \to \mathrm{Cone}(C)_{n-1}$ mediante $d_n(x, y) = (-\partial_{n-1}(x), \partial_n(y) - x)$.

(a) Prueba que $(\mathrm{Cone}(C)_*, d_*)$ es un complejo y que es homotópicamente equivalente al complejo cero.

**Solución:**

Como $\partial_{n-1}$ y $\partial_n$ son homomorfismos, también lo es $d_n$. Para ver que es un complejo, simplemente calculamos

$$\begin{aligned} d_{n-1}d_n(x,y) &= d_{n-1}(-\partial_{n-1}(x), \partial_n(y) - x) \\ &= (\partial_{n-2}\partial_{n-1}(x), \partial_{n-1}(\partial_n(y) - x) - (-\partial_{n-1}(x))) \\ &= (0, \partial_{n-1}\partial_n(y) - \partial_{n-1}(x) + \partial_{n-1}(x)) \\ &= (0, 0) \end{aligned}$$

Sea $D_*$ el complejo cero. Consideremos los morfismos $f_\# \colon \mathrm{Cone}(C)_* \to D_*$ y $g_\# \colon D_* \to \mathrm{Cone}(C)_*$ que son cero en cada dimensión. Como las diferenciales de $D_*$ son todas cero, se sigue que $f_\#$ y $g_\#$ son morfismos de complejos. Claramente $f_\# g_\# = 1_{D_*}$, pero $g_\# f_\#$ es el morfismo $\mathrm{Cone}(C)_* \to \mathrm{Cone}(C)_*$ que es cero en cada dimensión.

Consideremos

$$\begin{aligned} h_n \colon \mathrm{Cone}(C)_n &\to \mathrm{Cone}(C)_{n+1} \\ (x, y) &\to (y, 0) \end{aligned}$$

que es claramente un homomorfismo. Calculamos

$$\begin{aligned} [d_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n](x,y) &= d_{n+1}(y, 0) + h_{n-1}(-\partial_{n-1}(x), \partial_n(y) - x) \\ &= (-\partial_n(y), -y) + (\partial_n(y) - x, 0) \\ &= (-x, -y) \\ &= [g_\# f_\# - 1_{\mathrm{Cone}(C)_n}](x, y) \end{aligned}$$

así que $g_\# f_\# \simeq 1_{\mathrm{Cone}(C)_*}$ y por lo tanto $\mathrm{Cone}(C)_*$ es homotópicamente equivalente al complejo cero. $\square$

(b) Sea $i_n\colon C_n \to \mathrm{Cone}(C)_n$ dada por $i_n(c) = (0, c)$. Prueba que estos homomorfismos definen un morfismo de complejos $i_\#\colon C_* \to \mathrm{Cone}(C)_*$ que es homótopo al morfismo cero.

**Solución:**

Comprobamos

$$d_n i_n(c) = d_n(0, c) = (0, \partial_n(c)) = i_{n-1}\partial_n(c)$$

luego $i_\#$ es un morfismo de complejos. En la parte anterior comprobamos que $1_{\mathrm{Cone}(C)_*}$ es homótopa al morfismo cero 0. Entonces

$$i_\# = 1_{\mathrm{Cone}(C)_*} \circ i_\# \simeq 0 \circ i_\# = 0$$

como queríamos probar. La homotopía en el segundo paso se cumple pues vimos en clase que si $f_\# \simeq f'_\#$, entonces $f_\# g_\# \simeq f'_\# g_\#$. □

(c) Sea $f_\#\colon C_* \to D_*$ un morfismo de complejos. Demuestra que $f_\#$ es homótopa al morfismo cero si y solo si existe $g_\#\colon \mathrm{Cone}(C)_* \to D_*$ tal que $g_\# i_\# = f_\#$.

**Solución:**

Denotaremos por 0 al morfismo cero. Si existe $g_\#\colon \mathrm{Cone}(C)_* \to D_*$ tal que $g_\# i_\# = f_\#$, entonces

$$f_\# = g_\# i_\# \simeq g_\# \circ 0 = 0$$

Por otra parte, si $f_\# \simeq 0$, sea $h_n\colon C_n \to D_{n+1}$ una homotopía de 0 a $f_\#$, es decir

$$\partial'_{n+1} h_n + h_{n-1}\partial_n = -f_n$$

para todo $n$. Definimos

$$\begin{aligned} g_n\colon\ &\mathrm{Cone}(C)_n \to D_n \\ &(x, y) \mapsto h_{n-1}(x) + f_n(y) \end{aligned}$$

Esta función es la que resulta de aplicar la propiedad universal de la suma directa a los homomorfismos $h_{n-1}\colon C_{n-1} \to D_n$ y $f_n\colon C_n \to D_n$, así que es un homomorfismo. Veamos que todas las $g_n$ definen un morfismo de complejos.

$$\partial'_n g_n(x, y) = \partial'_n h_{n-1}(x) + \partial'_n f_n(y) = -f_{n-1}(x) - h_{n-2}\partial_{n-1}(x) + f_{n-1}\partial_n(y)$$

$$\begin{aligned}
g_{n-1}d_n(x,y) &= g_{n-1}(-\partial_{n-1}(x), \partial_n(y) - x) \\
&= h_{n-2}(-\partial_{n-1}(x)) + f_{n-1}(\partial_n(y) - x) \\
&= -h_{n-2}\partial_{n-1}(x) + f_{n-1}\partial_n(y) - f_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

Vemos que $\partial'_n g_n = g_{n-1}d_n$, luego $g_\#$ es un morfismo de complejos. Por último

$$g_n i_n(c) = g_n(0,c) = f_n(c)$$

como se quería probar. $\square$