VI Olimpiada de Informática del estado de Guanajuato
Solución Examen Teórico

I.- En todos los problemas siguientes de esta sección, encuentra qué número (o números) debe seguir según la sucesión, y explica el por qué.

1) 1, 4, 27, 256, ¿? (*5 puntos*)

R = 3125

Solución:

Observa que $1=1^1, 4=2^2, 27=3^3, 256=4^4, 3125=5^5$

2) 2, 5, 10, 17, 28 ¿? (*5 puntos*)

R = 41

Solución:

Observa que $5-2=3, 10-5=5, 17-10=7, 28-17=11$. *Las diferencias son los números primos consecutivos a partir del tres. Por lo tanto, el siguiente número es 41 ya que es 41 – 28 = 13.*

3) 6, 12, 20, 30, 42, ¿? (*5 puntos*)

R = 56

Solución:

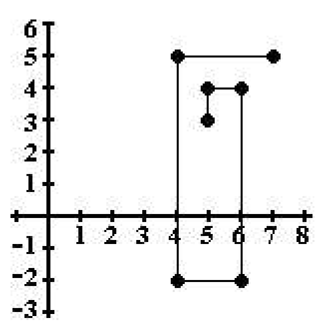
$12-6=6, 20-12=8, 30-20=10, 42-30=12$. *La diferencia entre un par de números consecutivos v aumentando de dos en dos. Por tanto, el siguiente número es 56.*

4) (5,3), (5,4), (6,4), (6,-2), (4,-2), (4,5) ¿? (*5 puntos*)

R = (7,5)

Solución:

Los puntos forman una espiral tal como se muestra en la figura:



5) 1, 3, 6, 10, 15 ¿? (*5 puntos*).

R = 21

Solución:

Observa que: 1 = 1, 3 = 1 + 2, 6 = 1 + 2+ 3, 10 = 1 + 2 + 3 + 4, 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5. Es decir, es la suma de los primeros números consecutivos a partir del uno. Por lo tanto, el siguiente número es 21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6.

6) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{42},$ ¿? (5 *puntos*).

R = $\frac{1}{1806}$

Solución:

$\frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{42} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$. *Por ello, el siguiente número es:* $\frac{1}{1806} = \frac{1}{42} - \frac{1}{43},$

II.- Escribe y justifica la respuesta de los problemas que están planteados a continuación:

7) Un ladrillo pesa medio kilogramo más medio ladrillo. Cuanto pesa un ladrillo y medio. (10 *puntos*).

R = 1.5 kg.

Solución:

Si un ladrillo pesa una cantidad x (en kilogramos). Entonces x = 0.5 + 0.5x. Resolviendo la ecuación se obtiene que x – 0.5x = 0.5 lo que implica que 0.5x = 0.5 para finalmente obtener que x = 1. Por tanto, 1.5 ladrillos es igual a 1.5 (1) = 1.5

8) En un cuarto, hay 65 alumnos. 22 Saben programar en C++, mientras que 48 saben programar en Karel. ¿Cuantos alumnos saben programar tanto en C++ como en Karel? (10 *puntos*).

R = 5.

Solución:

Supongamos que x saben programar solamente C++, y saben programar solamente Karel y z saben programar ambos. Entonces:

x + z = 22 ....Ecuación 1

y + z = 48 ....Ecuación 2

x + y + z = 65 ....Ecuación 3

Sustituyendo la ecuación 1 en la ecuación 3 se obtiene que:

22 + y = 65 Por lo que y = 43 y sustituyendo y en la ecuación se obtiene que:

43 + z = 48 Por lo tanto z = 5.

9) Se tienen dos cajas con 65 canicas de 4 colores y 4 tamaños diferentes. Se desconocen cuantas de cada color y cada tamaño. ¿Cuál de estas afirmaciones es verdadera sin importar como distribuyas las canicas? (15 *puntos*)

a) Hay una caja con 10 canicas idénticas (mismo color y tamaño).

b) Hay 3 canicas idénticas en alguna de las dos cajas.

c) Hay una caja que contiene todas las canicas de un color.

d) Hay una caja con al menos 34 canicas.

R = Inciso b)

Solución:

Primero observemos que hay 16 tipos de canicas (4 tamaños por 4 colores).

La afirmación del inciso a) es falsa; ya que pudiera ser que hubiera 18 canicas del color 1, 18 del color 2, 18 del color 3 y 11 del color 4. Si distribuimos a la mitad las canicas (salvo las de color 4 que tocaría de 6 y 5 canicas), veremos que no hay siempre 10 canicas idénticas en alguna de las dos cajas.

*La afirmación b) es verdadera; puesto que hay 16 tipos de caminas. Por lo tanto, habrá 5 canicas de un mismo tipo (Si hubiera 4 canicas de cada tipo, entonces tendríamos 64 = 4*16 canicas a lo más y no sería posible tener las 65). Como hay 5 de un mismo tipo y tenemos que distribuirlas en 2 cajas, entonces habrá una caja con 3 o más canicas del mismo tipo.*

La afirmación c) es falsa pues podemos colocar las canicas de dos colores en una caja y las otras canicas en la otra.

La afirmación d) es falsa pues podemos colocar 33 y 32 canicas.

10) Se tienen 3 cajas y 80 pelotas, 50 pelotas rojas y 30 pelotas azules. Se desea repartir de alguna forma todas las pelotas entre las tres cajas, al menos 10 pelotas en una caja y a lo más 30. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta? (15 *puntos*)

a) Todas las cajas tienen al menos 27 pelotas

b) Existe alguna caja que tiene al menos 4 pelotas azules y 6 rojas

c) Todas las cajas pueden tener el mismo número de pelotas

d) Todas las cajas tiene al menos 15 pelotas rojas.

R = Ninguna de las afirmaciones es correcta.

Solución:

El inciso a) es falso pues podemos colocar 25, 25 y 30.

El inciso b) es falso pues podemos colocar 25 rojas, 25 rojas y 30 azules en sendas cajas.

El inciso c) es falso pues 3 no es divisor de 80.

El inciso d) es falso con la distribución de 25 rojas, 25 rojas y 30 azules en sendas cajas (La tercera caja no tiene pelotas rojas).

11)Existe una regla curiosa para subir escaleras de un señor X. Si se encuentra en el escalón N entonces Sube el doble de este número y uno más y toma un descanso. Si comenzó en el escalón 1. ¿En qué escalón estará cuando llegue a su descanso 10? (20 *puntos*)

R = *88573*

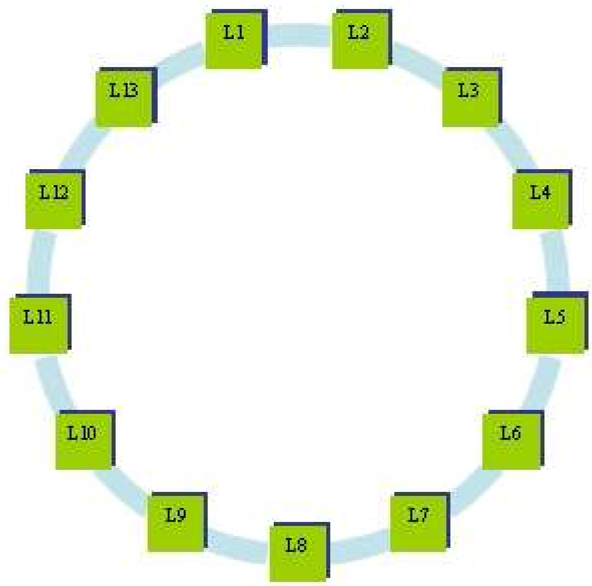
Solución:

Comenzamos en el escalón 1. Por lo tanto, el señor debe subir 2 + 1 escalones. Por lo tanto, llegará al escalón 4(El uno más tres escalones más) y tomará su primer descanso. En general tenemos la siguiente tabla.

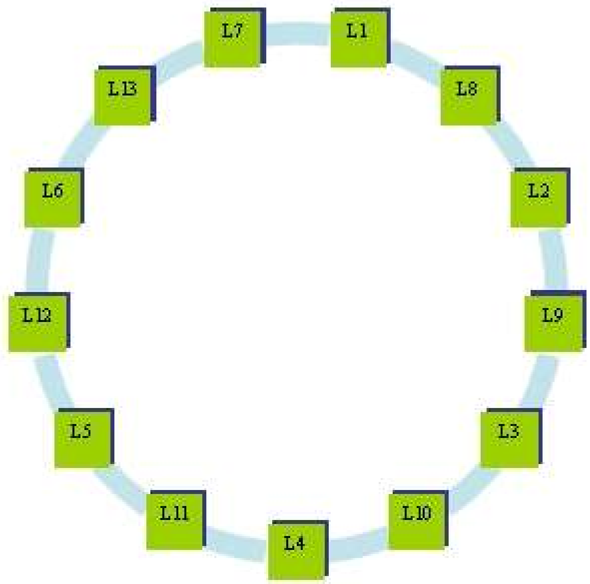
Escalón Original	***Doble más uno***	***Escalón al que llega***
1	*3*	*4*
4	*9*	*13*
13	*27*	*40*
40	*81*	*121*
121	*243*	*364*
364	*729*	*1093*
1093	*2187*	*3280*
3280	*6561*	*9841*
9841	*19683*	*29524*
29524	*59049*	*88573*

12)Y el Trompidueñez dijo: que se hagan los Limogochis y los Limogochis se hicieron. Y los colocó en una mesa circular (cada uno sentado en una silla) y dijo que así estaban bien. En el segundo día dijo: que el Limochi uno se siente una silla adelante, que el segundo Limogochis se siente dos sillas adelante, el tercer limogochi tres sillas adelante y así sucesivamente. Y Trompidueñez vio que todos estaban sentados y pensó que eso estaba bien. A partir de ese día, los Limogochis cambian de silla del mismo modo (el uno avanza una silla, el dos avanza dos sillas, etc.). Hay 13 Limogochis sentados como se muestra en la figura. ¿En que lugar estará cada Limogochi después de 366 días?

(20 *puntos*)



Dibujo 1 Limogochis en el primer día.



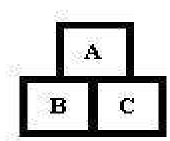
Dibujo 2 Limogochis en el segundo día.

R = Como el segundo día.

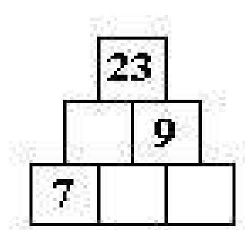
Solución:

Observa que todos los limogochis se coinciden cada 13 saltos en la silla 13. Por tanto en el día 14 todos están en su lugar de origen. De manera análoga,m este ciclo se repite cada 13 saltos. Así pues, los limogochis coinciden en los días, 13, 26, 39, 52, etc. En particular coinciden en el día 364. Por lo tanto en el día 365 estarán cada uno en su lugar y en el día 366 estarán como en el segundo día.

III.- A completa las siguientes pirámides. Cada caja debe ser igual a la suma de las dos cajas inferiores a ella. Por ejemplo: A = B + C

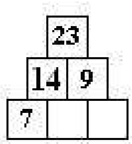


13)

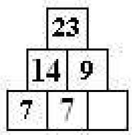


(5 *puntos*)

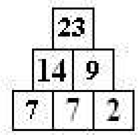
Solución:



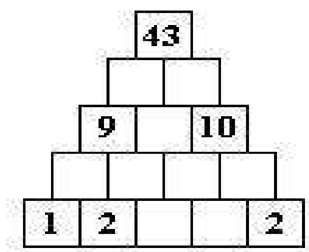
A completando inicialmente al 23.



A completando el 14. y finalizando como:



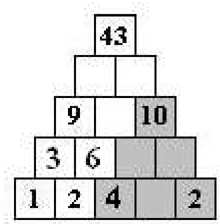
14)



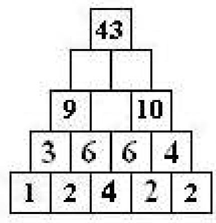
(10 *puntos*)

Solución:

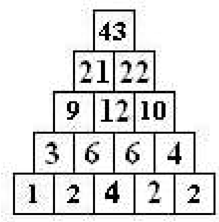
De manera similar al problema 13, construimos la pirámide:



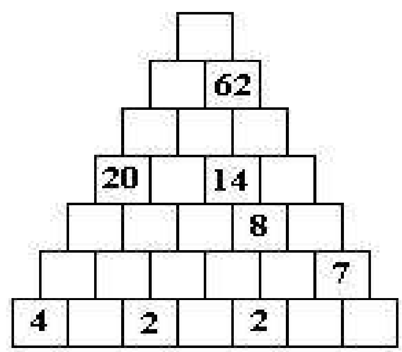
Ahora observa la pirámide sombreada. De ella se pueden obtener algunas ecuaciones como: Suponiendo que el cuadro inferior central sea x, entonces el cuadro izquierdo del segundo nivel se puede expresar como x + 4 y el cuadro de la derecha como x + 2. Entonces 10 = x + 4+ x + 2 = 2x +6. Por lo tanto , x = 2.



Por consiguiente. Sólo nos resta terminar la pirámide con simples restas.



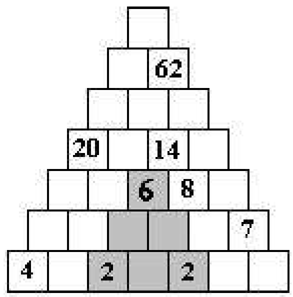
15)



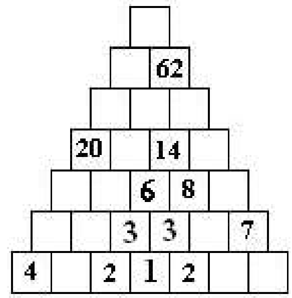
(15 *puntos*)

Solución:

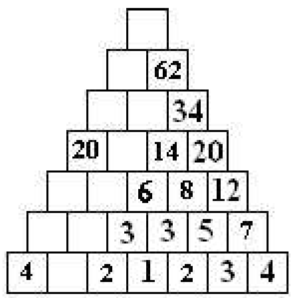
Al igual a la pirámide anterior, podemos a completar y resolver un sistemas en la pirámide sombreada.



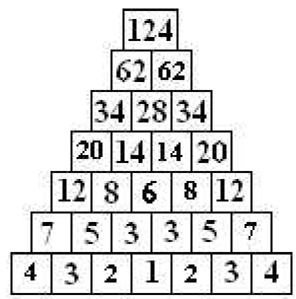
Quedando



Ahora como:



finalizando como:



IV En la programación comúnmente se emplean funciones. Una función f(x,y) puede ser definida en términos de la misma función. En ocasiones, se desconoce cuál es la función explicita y sólo se conocen algunas de sus propiedades.

Una función f(x,y) cumple con las propiedades enlistadas abajo. Ayuda a calcular los valores de la f que se te pida

a) $f(x,x) = x$

b) $f(x \cdot y,y) = y$

c) $f(x,y) = f(x-y,y)$ para $x > y$

d) $f(x,y) = f(y,x)$

Por ejemplo f(3,2) = 1, porque f(3,2) = f(1,2) por la propiedad c. Por otro lado f(1,2) = f(2,1) (propiedad d) y f(2,1) = 1 porque 1 divide a dos (propiedad b).

16)f(26,182) = ¿? (5 *puntos*)

R = 26

Solución:

Apliquemos las propiedades:

f(26,182) = f(182,26) propiedad d

f(182,26) = 26 propiedad b

17)f(18,12) = ¿? (10 *puntos*)

R = 6

Solución:

Apliquemos las propiedades:

f(18,12) = f(6,12) propiedad c

f(6,12) = f(12,6) propiedad d

f(12,6) = f(6,6) propiedad c

f(6,6) = 6 propiedad a

18)f(55,22) = ¿? (15 *puntos*)

R = 11

Solución:

Apliquemos las propiedades:

f(55,22) = f(11,22) aplicando dos veces la propiedad c

f(11,22) = f(22,11) propiedad d

f(22,11) = 11 propiedad b

19)f(25755,1981) = ¿? (20 *puntos*)

R = 1

Solución:

Apliquemos las propiedades:

f(25755,1981) = f(2,1981) aplicando 13 veces la propiedad c

f(2,1981) = f(1981,2) propiedad d

f(1981,2) = f(1,2) aplicando 990 veces la propiedad c.

f(1,2) = f(2,1) propiedad d

f(2,1) = 1 por la propiedad b.