Tarea 6: Sucesiones y Series de Funciones

1. (Marsden #3, p.142) Determina si las siguientes sucesiones de funciones convergen puntualmente y/o uniformemente. Si convergen, averigua la continuidad del límite.

   a) $f_k(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{k}$ donde $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   b) $f_k(x) = \dfrac{1}{kx+1}$ donde $f_k : (0,1) \to \mathbb{R}$

   c) $f_k(x) = \dfrac{x}{kx+1}$ donde $f_k : (0,1) \to \mathbb{R}$

   d) $f_k(x) = \dfrac{x}{1+kx^2}$ donde $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y sean $f_i : A \to \mathbb{R}^m$ funciones uniformemente continuas para cada $i \in \mathbb{N}$. Demuestra que si $f : A \to \mathbb{R}^m$ tal que $f_i \to f$ uniformemente, entonces f es uniformemente continua.

3. (Marsden #5, p. 142) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^m$, sean $f_n : A \to \mathbb{R}$ y $g_n : A \to \mathbb{R}$ funciones para cada $n \in \mathbb{N}$.

   a) Supongamos que $f_n \to f$ y $g_n \to g$ puntualmente, donde $f, g : A \to \mathbb{R}$. Se sigue que $f_n g_n \to fg$ puntualmente? Demuestra que es así o proporcionar un contraejemplo.

   b) Supongamos que $f_n \to f$ y $g_n \to g$ uniformemente, donde $f, g : A \to \mathbb{R}$. Además, supongamos que hay $M > 0$ tal que $||f(x)|| \leq M$ y $||g(x)|| \leq M$ para todo $x \in A$ y $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $f_n g_n \to fg$ uniformemente.

   c) Construye sucesiones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{g_n\}_{i\in\mathbb{N}}$ de funciones $A \to \mathbb{R}$ tales que $f_n \to f$ y $g_n \to g$ uniformemente pero $f_n g_n \not\to fg$ uniformemente.

4. (Marsden #4, p. 142 y gral. enero 2010 #5a) Determina si las siguientes series de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ convergen puntualmente y/o uniformemente y/o absolutamente. Para las que converjan, averigua la continuidad del límite.

   a) $g_k(x) = \begin{cases} 0 & x \leq k \\ (-1)^k & x > k \end{cases}$ donde $g_k : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

   b) $g_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k^2} & |x| \leq k \\ \frac{1}{x^2} & |x| > k \end{cases}$ donde $g_k : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

   c) $g_k(x) = x^k$ donde $g_k : (0,1) \to \mathbb{R}$.

   d) $g_n(x) = a_n \operatorname{sen}(nx)$, donde $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|$ converge.

5. (Marsden #5, p. 121) Considera el conjunto de todas las funciones $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ de la forma
$$h(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{b_j x}, \text{ donde } a_j, b_j \in \mathbb{R}$$
Es un subconjunto denso en $C([0,1], \mathbb{R})$?

6. (Marsden #21, p. 144):

   a) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto. Demuestra que si $B \subseteq C(A, \mathbb{R}^m)$ es compacto, entonces B es cerrado, acotado, y equicontinuo. (En clase demostramos la otra implicación, que si B es cerrado, acotado, y equicontinuo, entonces B es compacto.)

   b) Construye un subconjunto $B \subseteq C([0,1], \mathbb{R})$ que es acotado y cerrado pero no es compacto.

7. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^l$ y $B \subseteq \mathbb{R}^p$. Supongamos que hay funciones $f_n : A \to B$ y $g_n : B \to \mathbb{R}^m$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y también funciones $f : A \to B$ y $g : B \to \mathbb{R}^m$. Determina condiciones de convergencia $f_n \to f$ y $g_n \to g$ (i.e., convergencia puntual o uniforme) y continuidad (i.e., continuidad, continuidad uniforme, equicontinuidad, etc.) que aseguren que $g_n \circ f_n \to g \circ f$ uniformemente.

8. (Marsden #23, p. 144) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f \circ f$ es continua. Se sigue que f es continua?