Tarea 4: Conjuntos Compactos y Funciones Continuas

1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que un punto $x \in A$ es **aislado** si hay una vecindad U de x tal que $U \bigcap A = \{x\}$. (Eso es equivalente a decir que $\{x\}$ es abierto en la topología relativa de A.)

   Decimos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es **discreto** si todos sus puntos son aislados. Demuestra que un conjunto discreto es compacto si y solo si es finito.

2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos conexos por trayectorias. Demuestra que $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ es conexo por trayectorias.

3. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y sean $f, g : A \to \mathbb{R}^m$ funciones continuas. Demuestra que $f + g$ es continua. Demuestra que fg es continua si $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : A \to \mathbb{R}$ son continuas.

4. Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ que converge a $x \in \mathbb{R}^n$. Definamos los conjuntos $A_k = \{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots\}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Demuestra que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k} = \{x\}$$

5. Demuestra el **lema del pegamento**. Es decir, sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos cerrados y sea $f : A \to \mathbb{R}^m$ y $g : B \to \mathbb{R}^m$ funciones continuas tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$. Entonces definimos nueva función $h : A \cup B \to \mathbb{R}^m$ por:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

   Fíjate en que h sólo está bien definida porque f y g están de acuerdo en el solapamiento de A y B. Demuestra que h es continua.

6. Sea

$$F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \subseteq \mathbb{R},$$

   lo que es el conjunto obtenido de $[0, 1]$ por quitarle el tercio central del intervalo. Cuando repetimos el proceso, obtenemos el conjunto:

$$F_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \bigcup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \bigcup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \subseteq \mathbb{R},$$

   En general, F_n es una union de intervalos, y F_{n+1} es el conjunto formado por quitarle a F_n el tercio central de cada intervalo. Finalmente, definimos el conjunto

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq \mathbb{R}$$

   Demuestra que:

a) C es compacto (pista: se puede usar el teorema de Heine-Borel).

b) C contiene una cantidad infinita de puntos (pista: considera los extremos de los intervalos de cada F_n).

c) $\mathrm{int}(C) = \emptyset$ (es decir, C no contiene ningún punto interior).

d) C no contiene ningún punto aislado.