Tarea 3: Resolución del Problema 1

Ejercicio 1: Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subseteq \mathbb{R}^m$ son conexos, entonces $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ es conexo.

Comenzamos con la demostración del siguiente lema:

Lemma 1. *Si $B \subseteq \mathbb{R}^m$ es conexo y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces el conjunto $\{x\} \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ es conexo.*

Demostración (del lema). Precedemos por contradicción. Supongamos que hay una separación de $\{x\} \times B$, es decir, que hay $U, V \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ tales que $U \cap V \cap (\{x\} \times B) = \emptyset$, $U \cap (\{x\} \times B) \neq \emptyset$, $V \cap (\{x\} \times B) \neq \emptyset$, y $\{x\} \times B \subseteq U \cup V$.

Definimos los conjuntos

$$U' = \{y \in B \mid (x, y) \in U\} \text{ y } V' = \{y \in B \mid (x, y) \in V\}$$

Se sigue inmediatamente que $U' \cap V' \cap B = \emptyset$, $U' \cap B \neq \emptyset$, $V' \cap B \neq \emptyset$, y $B \subseteq U' \cup V'$. Sólo queda por demostrar que U' y V' son abiertos en $\mathbb{R}^m$; después de eso tendremos el hecho de que U', V' forman una separación de B, que es conexo por suposición. Esa será una contradicción, y terminaremos.

Demostremos que U' es abierto; la demostración para V' es igual. Sea $y \in U'$. Entonces $(x, y) \in U$. Pero U es abierto, por lo que hay un rectángulo abierto $R \subseteq U$ tal que $x \in R$. Podemos escribir el rectángulo R como $R = S \times T$, donde $S = (a_1, b_1) \times \cdots (a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ y $T = (a_{n+1}, b_{n+1}) \times \cdots \times (a_{n+m}, b_{n+m}) \subseteq \mathbb{R}^m$ son rectángulos abiertos tal que $x \in S$ y $y \in T$. Entonces, se sigue que $\{x\} \times T \subseteq R \subseteq U$. Por lo tanto, $y \in T \subseteq U'$. Como $y \in U'$ era arbitrario, sabemos que U' es abierto.

$\square$

También recordamos el lema que demostramos en clase:

Lemma 2. *Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos conexos de $\mathbb{R}^n$, y sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ otro conjunto conexo. Si $C_i \cap C \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, entonces el conjunto*

$$C \bigcup \left(\bigcup_{i \in I} C_i \right)$$

es conexo.

Demostración (del ejercicio 1). Si A o B es vacío, entonces el producto $A \times B$ es vacío y por lo tanto es conexo. Por eso, supongamos que A y B son no vacíos.

Fijemos $y \in B$. Por Lema 1, sabemos que $A \times \{y\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ es conexo, así como los conjuntos $\{x\} \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ para cada $x \in A$. Además, nos observemos que

$$(x, y) \in (A \times \{y\}) \bigcap (\{x\} \times B)$$

para cada $x \in A$, por lo que la intersección no es vacía.

Finalmente, aplicamos el Lema 2 con $C = A \times \{y\}$ y $C_x = \{x\} \times B$ para cada $x \in A$. Se sigue que el conjunto

$$(A \times \{y\}) \bigcup \left(\bigcup_{x \in A} \{x\} \times B \right) = \left(\bigcup_{x \in A} \{x\} \times B \right) = A \times B$$

es conexo. $\square$