Tarea 3: Series en $\mathbb{R}^n$ y Conjuntos Conexos

1. Demuestra que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ son conjuntos conexos, entonces $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ es conexo.

2. Demuestra que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ **no** es conexo si se puede escribirlo como $A = B \bigcup C$, donde $B, C \subseteq A$ con $B \bigcap C = \emptyset$ y $B, C \neq \emptyset$, y tal que ni B ni C tiene punto de acumulación que está en el otro conjunto (es decir, no hay ningún punto de acumulación de B que está en C, y viceversa).

3. Es el conjunto
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1\} \bigcup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 < x < 2\}$$
conexo? Demuestra tu respuesta.

4. Demuestra que ni $\mathbb{Q}$ ni $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ son conexos como subconjuntos de $\mathbb{R}$.

5. Construye una serie que converge en $\mathbb{R}^2$, pero que no converge absolutamente.

6. Demuestra la siguiente generalización del criterio de proporciones:

   Sea $a_n \geq 0$ para cada n.

   a) Si $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, entonces $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

   b) Si $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, entonces $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

7. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es conexo y $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, entonces B es conexo.

8. Determina (con demostraciones) si las siguientes series convergen:

   a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}(n^{-\alpha})$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$.

   c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} n}{n^2}, \frac{1}{n^2}\right)$