Tarea 12: Fubini, Particiones de la Unidad, y Cambio de Variable

1. (Spivak 3-26) Integración y área: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable y no-negativa. Pongamos
$$A_f = \{(x,y) \in [a,b] \times [0,M] \mid 0 \le y \le f(x)\},$$
donde $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Demuestra que el conjunto A_f es Jordan-medible y tiene área (en el sentido de Jordan) igual a $\int_a^b f$.

2. (Spivak 3-27) Si $f : [a,b] \times [a,b]$ es continuo, demuestra que
$$\int_a^b \int_a^y f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \int_x^b f(x,y)dy\,dx.$$
Pista: Reescribe esas integrales dobles como una integral de la forma $\int_C f$, donde $C \subseteq [a,b] \times [a,b]$ es un subconjunto adecuado. (Recuerda que, por definición, $\int_C f = \int_{[a,b]\times[a,b]} f 1_C$ si C es Jordan-medible.)

3. Teorema Fundamental del Cálculo
   a) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Definimos $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $F(x) = \int_a^x f$. Demuestra que F es de clase C^1 y que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$.
   Pista: Las claves son la continuidad de f y la definición de la derivada para funciones univariables.
   b) Demuestra que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es tal que $F' = f$, entonces $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

4. (Spivak 3-28) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Usa el teorema de Fubini para demostrar que $\partial_{1,2} f = \partial_{2,1} f$.
Pista: Si $\partial_{1,2} f(a) - \partial_{2,1} f(a) > 0$, entonces hay un rectángulo cerrado A que contiene a en su interior tal que $\partial_{1,2} f(x) - \partial_{2,1} f(x) > 0$ para todo $x \in A$.

5. (Spivak 3-32) Sea $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ es continua y que $\partial_2 f$ existe y es continua sobre $[a,b] \times [c,d]$. Definimos $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$. Demuestra **la regla de Liebniz**, que dice que
$$F'(y) = \int_a^b \partial_2 f(x,y)dx.$$
Pista: Por el teorema fundamental del cálculo, tenemos lo siguiente:
$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \int_c^y \partial_2 f(x,y)dy + f(x,c)dx.$$

6. (Spivak 3-37)

   a) Supongamos que $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ es una función no-negativa y continua. Demuestra que $\int_{(0,1)} f$ existe (en el sentido de particiones de la unidad) si y sólo si el límite
   $$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} f$$
   existe.

   b) Sea $A_n = [1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}]$. Supongamos que $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ satisface
   $$\int_{A_n} f = \frac{(-1)^n}{n}$$
   y que $f(x) = 0$ si x no está en ningún A_n. Demuestra que $\int_{(0,1)} f$ no existe, pero
   $$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} f = -\log 2$$

7. (Spivak 3-41) La integral más bonita del mundo:
   Define $f : \mathbb{R}^{>0} \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ por $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$.

   a) Demuestra que f es inyectiva y computa $f'(r, \theta)$. Demuestra que $\det f'(r, \theta) \neq 0$ para todo (r, θ). Demuestra que su imagen es el conjunto
   $$f(\mathbb{R}^{>0} \times (0, 2\pi)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, \text{ o ambos } x \geq 0 \;\&\; y \neq 0\}.$$

   b) Si $P = f^{-1}$, demuestra que $P(x, y) = (r(x, y), \theta(x, y))$, donde
   $$\begin{aligned} r(x,y) &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta(x,y) &= \begin{cases} \tan^{-1} \frac{y}{x}, & x > 0 \;\&\; y > 0 \\ \pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}, & x < 0 \\ 2\pi + \tan^{-1} \frac{y}{x}, & x > 0 \;\&\; y < 0 \\ \pi/2, & x = 0 \;\&\; y > 0 \\ 3\pi/2, & x = 0 \;\&\; y < 0. \end{cases} \end{aligned}$$
   Encuentra $P'(x, y)$ donde existe. La función P se llama **el sistema polar de coordinadas en A**.

   c) Sea $C \subset A$ la región entre los círculos de radios r_1 y r_2 (centrados en 0) y las media-rectas que pasan por 0 y hacen ángulos de θ_1 y θ_2 con el eje x. Si $h : C \to \mathbb{R}$ es integrable y se define la función g por $h(x, y) = g(r(x, y), \theta(x, y))$, demuestra que
   $$\int_C h = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} g(r, \theta) r d\theta \, dr.$$

Demuestra que

$$\int_{B_r(0)} h = \int_0^r \int_0^{2\pi} g(r,\theta) r \, d\theta \, dr.$$

d) Si $C_r = [-r, r] \times [-r, r]$, demuestra que

$$\int_{B_r(0)} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \pi(1 - e^{-r^2})$$

y que

$$\int_{C_r(0)} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \left(\int_{-r}^{r} e^{-x^2} dx \right)^2 .$$

e) Demuestra que

$$\lim_{r \to \infty} \int_{B_r(0)} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \lim_{r \to \infty} \int_{C_r(0)} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy,$$

y concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$