Tarea 10: Analitícidad, Suavidad, y Integrabilidad

1. El comportamiento local de una función analítica determina su comportamiento global:

   a) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto conexo, y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función analítica sobre A. Demuestra que si $f|_B = 0$, donde $B \subseteq A$ es abierto, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in A$.

   Pista: Considera el conjunto de los puntos $a \in A$ donde $D^k f(a) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

   b) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto conexo y $B \subseteq \mathbb{A}$ un subconjunto abierto. Demuestra que si $f, g : A \to \mathbb{R}$ son analíticas y $f|_B = g|_B$, entonces $f = g$.

   c) Decimos que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene **soporte compacto** si hay un conjunto compacto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = 0$ para $x \notin C$. Demuestra que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es analítica y tiene soporte compacto, entonces $f = 0$

2. (Spivak 2-26) Existencia de funciónes suaves con soporte compacto (o más bien, el comportamiento local de una función suave **no** determina su comportamiento global):

   a) Define $f : R \to \mathbb{R}$ por:

   $$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)^{-2}} e^{-(x+1)^{-2}} & x \in (-1, 1), \\ 0 & x \neq (-1, 1). \end{cases}$$

   Demuestra que $f : R \to \mathbb{R}$ es de clase C^∞. Observe que es positiva sobre $(-1, 1)$ y 0 afuera.

   Pista: Demuestra que la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^∞ y que $g^{(i)}(0) = 0$ para todo i, donde

   $$g(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

   Puedes usar la regla de L'Hospital sin demostrarla.

   b) Sea $\epsilon > 0$. Demuestra que hay una función $g : \mathbb{R} \to [0, 1]$ de clase C^∞ tal que $g(x) = 0$ para $x \leq 0$ y $g(x) = 1$ para $x \geq \epsilon$.

   Pista: A través del ejemplo en la parte (a), puedes construir una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ que es positiva sobre el intervalito $(0, \epsilon)$ pero igual a cero afuera. Después puedes definir g por

   $$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\int_0^\epsilon f} \int_0^x f, & x \in (0, \epsilon) \\ 1, & x \geq \epsilon \end{cases}$$

   Puedes usar el teorema fundamental del cálculo para verificar que g es de clase C^∞. Además puedes usar el hecho de que la integral de una función continua y estrictamente positiva sobre un intervalo siempre es mayor que 0.

c) Si $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, define $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$f\left(\frac{x_1 - a_1}{\epsilon}\right) \cdots f\left(\frac{x_n - a_n}{\epsilon}\right),$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$ y donde f es la función definida en la parte (a) de este problema.

Demuestra que g es de clase C^∞ y que $g(x) > 0$ para todo

$$x \in (a_1 - \epsilon, a_1 + \epsilon) \times \cdots \times (a_n - \epsilon, a_n + \epsilon).$$

d) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y sea $C \subseteq A$ compacto. Demuestra que hay una función nonnegativa (es decir, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in A$) $f : A \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $f(x) > 0$ para $x \in C$ y tal que $f = 0$ fuera de algún subconjunto cerrado de A (es decir, hay un subconjunto abierto de A donde $f = 0$).

Pista: Fíjate en cubiertas abiertas de C y sus subcubiertas finitas.

e) Otra vez, sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y sea $C \subseteq A$ compacto. Demuestra que hay una función $f : A \to [0, 1]$ de clase C^∞ tal que $f(x) = 1$ para $x \in C$ pero $f(x) = 0$ para x fuera de algún subconjunto cerrado de A.

Pista: Si la función f construida en parte (d) satisface $f(x) \geq \epsilon$ para todo $x \in C$, puedes considerar la función $g \circ f$, donde g es la función construida en parte (b).

3. (Spivak 3-2) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo, y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función integrable sobre A. Demuestra que si $g : A \to \mathbb{R}$ tal que g difiere de f en una cantidad finita de puntos, entonces g es integrable y $\int_A f = \int_A g$.

4. (Spivak 3-4) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo, y sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ integrables. Demuestra que si $f \leq g$, entonces $\int_A f \leq \int_A g$.

5. (Spivak 3-6) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo, y sea $f : A \to \mathbb{R}$ integrable. Demuestra que $|f|$ es integrable y que $|\int_A f| \leq \int_A |f|$.

6. (Spivak 3-7) Define $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x \text{ irracional}, \\ 0 & x \text{ racional}, y \text{ irracional} \\ 1/q & x \text{ racional}, \ y = p/q \text{ en términos reducidos} \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable y que $\int_{[0,1]\times[0,1]} f = 0$.

7. (Spivak 3-3) Linealidad de la integral:

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo, y sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ integrables.

a) Para cualquier partición P de A y subrectángulo S de A, demuestra que

$$m_S(f) + m_S(g) \leq m_S(f+g) \quad \text{y} \quad M_S(f+g) \leq M_S(f) + M_S(g)$$

y que eso implica que

$$L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P) \quad \text{y} \quad U(f+g,P) \leq U(f,P) + U(g,P).$$

b) Demuestra que $f+g$ es integrable y que

$$\int_A f + g = \int_A f + \int_A g.$$