Examen Final: Soluciones Surtidas

Somete 6 de los 7 problemas. Por favor marca el problema que no quieres someter para calificación.

1. En cada caso, decide si la familia de funciones A es densa o no densa en el espacio $C([0,1])$ bajo la topología dada por la norma uniforme (es decir, la infinito-norma $||\cdot||_\infty$). Demuestra tu respuesta.

   a) $A = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{2i}x^{2i} \text{ donde } n \in \mathbb{N} \text{ y cada } a_{2i} \in \mathbb{R} \right\}$

   b) $A = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{2i+1}x^{2i+1} \text{ donde } n \in \mathbb{N} \text{ y cada } a_{2i+1} \in \mathbb{R} \right\}$

   Demostración (b). La familia en inciso (b) **no** es densa en $C([0,1])$. Se puede ver fácilmente que A es un álgebra que no contiene las funciones constantes, por lo que no satisface las condiciones del Teorema de Stone-Weierstrass. Pero el Teorema de Stone-Weierstrass sólo nos da condiciones *suficientes* y **no** nos da condiciones *necesarias* para que una familia de funciones A sea denso en $C([0,1])$. Para demostrar la no densidad de A, tenemos que usar otro método.

   El chiste es que si escogemos $f \in A$ con $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{2i+1}x^{2i+1}$, entonces $f(0) = 0$, ya que f es un polinomio con sólo términos impares. Es decir, $f(0) = 0$ para todo $f \in A$. Entonces si consideramos la función constante $g \equiv 1$ en $C([0,1])$, nos damos cuenta de que

   $$||f - g||_\infty = \sum_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| \geq |f(0) - g(0)| = |1 - 0| = 1$$

   para todo $f \in A$, lo que implica que A no es densa en $C([0,1])$. □

2. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto, y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $C(X)$ que converge puntualmente a otra función continua $f \in C(X)$. Supongamos además que f_n es una sucesión creciente, es decir que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$.

   Demuestra que $f_n \to f$ uniformemente sobre X. La afirmación todavía es cierta en general si $f_n \to f$ puntualmente donde $f : X \to \mathbb{R}$ no es continua? Demuestra o da un contraejemplo.

   Demostración. Ya que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ y $f_n \to f$ puntualmente, sabemos que $f_n(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $|f_{n+1}(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)|$ para todo $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $||f_{n+1} - f||_\infty \leq ||f_n - f||_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Ya que $\{||f_n - f||_\infty\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de números en $\mathbb{R}^{\geq 0}$, sabemos que converge a algún $d \geq 0$ por el axioma de completitud de $\mathbb{R}$. Si $d = 0$, entonces $||f_n - f||_\infty \to 0$; es decir, $f_n \to f$ uniformemente. Por lo tanto, basta demostrar que $d = 0$.

   Supongamos que $d > 0$. Entonces $||f_n - f||_\infty \geq d$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, hay por lo menos un punto $x_n \in X$ tal que $|f_n(x_n) - f(x)| \geq d$. Ya que X es compacto, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que converge a un punto $x \in X$. Es decir, para cada $r > 0$ y $N \in \mathbb{N}$, hay $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ y $||x_n - x|| < r$.

Ya que $f_n \to f$ puntualmente, sabemos que hay $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < d/3$ para todo $n \geq N$. Pero el hecho de que f_N y f son continuas nos dice que hay $\delta > 0$ tal que $|f_N(y) - f_N(x)| < d/3$ y $|f(y) - f(x)| < d/3$ para todo $y \in X$ tal que $||y - x|| < \delta$.

Entonces, para $n \geq N$ y $y \in X$ tal que $||y - x|| < \delta$, sabemos que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_N(x) - f(x)| \\ &\leq |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| + |f(y) - f(x)| \\ &< d/3 + d/3 + d/3 = d. \end{aligned}$$

Pero ya hemos visto que hay $n \geq N$ tal que $||x_n - x|| < \delta$. Por lo tanto, tenemos una contradicción, ya que $|f(x_n) - f(x)| \geq d$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que $d = 0$ y que $f_n \to f$ uniformemente. $\square$

Contraejemplos Observemos ambos criterios (el de la monotonicidad de la sucesión y el de la continuidad de f) son obligatorios para poder concluir en general que $f_n \to f$.

¡Ojo! Observa bien que esto **no** quiere decir que el Problema 2 provee condiciones **necesarias** para que $f_n \to f$ uniformemente, sino que si le quitamos uno de los criterios del Problema 2, luego ya no tenemos condiciones **suficientes**.

Les dejo la chamba de verificar que estos contraejemplos sirven:

- $f_n(x) = 1 - x^n$ para $x \in [0, 1]$: Esta sucesión de funciones continuas es creciente y converge puntualmente pero no uniformemente.
- $f_n(x) = \begin{cases} nx & x \in [0, 1/n] \\ 2 - nx & x \in [1/n, 2/n] \\ 0 & x \in [2/n, 1] \end{cases}$

  Esta sucesión de funciones continuas converge puntualmente a una función continua (en particular, a la función constante cero) y además es uniformemente acotada, pero sin embargo no converge uniformemente.

3. Demuestra que

   a) $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} [x^n(1 - x)]$ converge puntualmente pero no uniformemente en $[0, 1]$.

   b) $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n x^n(1 - x)]$ converge uniformemente en $[0, 1]$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pongamos $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ con $g_n(x) = x^n(1 - x)$, y sea $x \in [0, 1]$.

a) Observamos que $g_n(1) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(1) = 0$. Fijemos $x \in [0, 1)$. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Ya que $1 - x$ es una constante mientras se varia $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1 - x) = \frac{1}{1-x}(1 - x) = 1$.

Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1) \\ 0 & x = 1. \end{cases}$

Se sigue que $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ converge puntualmente a una función no continua sobre $[0,1]$. Además, cada suma parcial $\sum_{n=0}^{i} g_n$ es continua. Pero un límite uniforme de funciones continuas es continuo, por lo que $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ no converge uniformemente.

Observación Hay una trampa aquí, porque a pesar de que $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ converge puntualmente pero no uniformemente, la sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sí converge uniformemente a cero. Observamos que $g_n(x) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [0,1]$ y que cada g_n es diferenciable sobre $(0,1)$ y $g_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n$, y vemos que $g_n'(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ o $x = \frac{n}{n+1}$ (pues, técnicamente, no tiene sentido hablar de $g_n'(0)$, ya que 0 no yace en el interior del dominio de g_n). Ya que $g_n(0) = g_n(1) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se sigue que g_n alcanza su máximo en el punto $x = \frac{n}{n+1}$, donde

$$g_n(x) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Por lo tanto, $0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [0,1]$. Se sigue que $g_n \to 0$ uniformemente.

b) Hay que mostrar que $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n g_n$ converge uniformemente. Aquí no podemos usar la M-prueba de Weierstrass para mostrar la convergencia uniforme, ya que $||g_n||_\infty = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n}$ y, como se puede verificar, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} = \infty$.
Tenemos que usar otro truco. Lo que vamos a usar es el hecho de que tenemos una suma alternante. De hecho, se puede mostrar lo siguiente:

Lema 1. *Si $X \subseteq \mathbb{R}^p$ es compacto y $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C([0,1])$ tal que (a) $g_n \geq 0$, (b) $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, y (c) $g_n \to 0$ uniformemente, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n g_n$ converge uniformemente.*

Demostración. Ya que cada $\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una serie alternante con $0 \leq g_{n+1} \leq g_n(x)$ y $g_n(x) \to 0$ para todo $x \in X$, sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n g_n$ converge puntualmente a una función en $C([0,1])$.
Pongamos $s_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i g_i : X \to \mathbb{R}$. En la demostración de la prueba de la serie alternante, se demuestra que $|s_n(x) - s_m(x)| \leq g_n(x)$ para todo $n \leq m$ (les dejo la tarea de demostrar esto). Ya que $g_n(x) \to 0$ uniformemente, se sigue que para cada $\epsilon > 0$ hay $N \in \mathbb{N}$ tal que $g_n(x) < \epsilon$ para todo $n \geq N$ y $x \in X$. Por lo tanto, si $n, m \geq N$, se tiene que $|s_n(x) - s_m(x)| < \epsilon$ para todo $x \in X$, es decir, $||s_n - s_m||_\infty < \epsilon$. Eso quiere decir que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en la topología de convergencia uniforme en $C([0,1])$ y por lo tanto converge uniformemente a algo en $C([0,1])$. □

En nuestro caso, $g_n(x) = x^n(1-x)$. Observamos que $0 \leq x^{n+1}(1-x) \leq x^n(1-x)$ para todo $x \in [0,1]$. Además, ya demostramos en la observación después del inciso (a) que $g_n \to 0$ uniformemente. Por lo tanto, podemos aplicar nuestro Lema y concluir que $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n g_n$ converge uniformemente a algo.

□

4. Demuestra que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2, entonces $\partial_{1,2} f(x) = \partial_{2,1} f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

Pista: Supón que hay $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $\partial_{1,2} f(x) \neq \partial_{2,1} f(x)$. Usa el Teorema de Fubini y la continuidad de las segundas derivadas parciales para llegar a una contradicción.

Observación: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo. Muchos dijeron (sin demostrarlo) que si una función $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable y cumple el criterio que $f(x) > 0$ para $x \in A$, entonces $\int_A f > 0$. Es algo cierto, pero realmente requiere demostración.

Lema 2. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo. Si una función $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable y cumple el criterio que $f(x) > 0$ para $x \in A$, entonces $\int_A f > 0$.*

Demostración. Ya que f es integrable, sabemos por el teorema de Lebesgue que hay un punto x en el interior de A donde f es continua. Entonces $f(x) > 0$. Debido a que f es continua en x, hay $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subseteq A$ y tal que $|f(x) - f(y)| < f(x)/2$ para todo $y \in B_\delta(x)$. En particular, $f(y) > f(x)/2$ para todo $y \in B_\delta(x)$. Escogemos una partición P de A tal que uno de sus rectángulos B está contenido en $B_\delta(x)$. Entonces $\int_A f \geq L(f,P) \geq m_B(f)\nu(B) \geq f(x)/2\nu(B) > 0$. □

5. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función integrable en el sentido de Riemann. A partir de particiones de A (no uses el Teorema de Lebesgue), demuestra que la función $|f| : A \to \mathbb{R}$ dada por $|f|(x) = |f(x)|$ es integrable sobre A y que $|\int_A f| \leq \int_A |f|$.

6. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función lipschitziana (es decir, hay $M > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq M||x - y||$ para todo $x, y \in [a,b]$). Demuestra que si $B \subseteq [a,b]$ tiene medida cero, entonces $f(B) \subset \mathbb{R}$ tiene medida cero.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Entonces, hay una cubierta de B por una familia contable de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ para $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \epsilon/2M$. Ya que la intersección de $[a_n, b_n]$ con $[a,b]$ es un (posiblemente vacío) intervalo cerrado, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $[a_n, b_n] \subseteq [a,b]$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Pongamos $c_n = b_n - a_n$. Observa que si $x \in [a_n, b_n]$, entonces $|x - a_n| < c_n$, por lo que $|f(x) - f(a_n)| < Mc_n$. Es decir, $f(x) \in [f(a_n) - Mc_n, f(a_n) + Mc_n]$. Ya que $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, se sigue que $f(B) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(f(a_n) - Mc_n, f(a_n) + Mc_n)$. Pero

$$\sum_{n=1}^{\infty}((f(a_n) + Mc_n) - (f(a_n) - Mc_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2Mc_n < \epsilon.$$

□

Observación Observa que no tuvimos que usar el hecho de que $f([a_n, b_n])$ es *igual* a un intervalo cerrado, sino sólo que $f([a_n, b_n])$ está **contenido** en cierto pequeño intervalo cerrado. De hecho, se puede generalizar el resultado a funciones Lipschitzianas entre rectángulos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, y en general la imagen de un rectángulo no será otro rectángulo, pero estará contenido en un rectángulo de cierto tamaño como en nuestra demostración.

7. Sea (X, d) un espacio métrico conexo y no-acotado. Demuestra que el conjunto

$$S_r(a) = \{x \in X \mid d(x,a) = r\}$$

es no vacío para todo $r \geq 0$ y $a \in X$.