Examen Final

Somete 6 de los 7 problemas. Por favor marca el problema que no quieres someter para calificación.

1. En cada caso, decide si la familia de funciones A es densa o no densa en el espacio $C([0,1])$ bajo la topología dada por la norma uniforme (es decir, la infinito-norma $||\cdot||_\infty$). Demuestra tu respuesta.

   a) $A = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{2i} x^{2i} \text{ donde } n \in \mathbb{N} \text{ y cada } a_{2i} \in \mathbb{R} \right\}$

   b) $A = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{2i+1} x^{2i+1} \text{ donde } n \in \mathbb{N} \text{ y cada } a_{2i+1} \in \mathbb{R} \right\}$

2. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto, sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $C(X)$ que converge puntualmente a otra función continua $f \in C(X)$. Supongamos además que f_n es una sucesión creciente, es decir que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$.

   Demuestra que $f_n \to f$ uniformemente sobre X. La afirmación todavía es cierta en general si $f_n \to f$ puntualmente donde $f : X \to \mathbb{R}$ no es continua? Demuestra o da un contraejemplo.

3. Demuestra que

   a) $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} [x^n(1-x)]$ converge puntualmente pero no uniformemente en $[0,1]$.

   b) $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n x^n(1-x)]$ converge uniformemente en $[0,1]$.

4. Demuestra que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2, entonces $\partial_{1,2} f(x) = \partial_{2,1} f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

   Pista: Supón que hay $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $\partial_{1,2} f(x) \neq \partial_{2,1} f(x)$. Usa el Teorema de Fubini y la continuidad de las segundas derivadas parciales para llegar a una contradicción.

5. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función integrable en el sentido de Riemann. A partir de particiones de A (no uses el Teorema de Lebesgue), demuestra que la función $|f| : A \to \mathbb{R}$ dada por $|f|(x) = |f(x)|$ es integrable sobre A y que $|\int_A f| \leq \int_A |f|$.

6. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funcion lipschitziana (es decir, hay $M > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq M||x-y||$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$). Demuestra que si $B \subseteq [a,b]$ tiene medida cero, entonces $f(B) \subset \mathbb{R}$ tiene medida cero.

7. Sea (X,d) un espacio métrico conexo y no-acotado. Demuestra que el conjunto

   $$S_r(a) = \{x \in X \mid d(x,a) = r\}$$

   es no vacío para todo $r \geq 0$ y $a \in X$.