Examen 3

Somete 5 de los 6 problemas. Por favor marca el problema que no quieres someter para calificación.

1. a) Enuncia los teoremas de la función inversa y la función implícita.

   b) Demuestra el teorema de la función implícita a través del teorema de la función inversa.

2. Encontra el máximo y el mínimo de la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = \ln(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 1)$$

   sobre el conjunto $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. ¿Cómo sabes que alcanza un máximo y mínimo?

3. Para la función f que aparece en el Problema 2, escribe la serie de Taylor para f alrededor del punto $0 \in \mathbb{R}^3$ hasta el orden 2.

4. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y, u, v) = (u^3 + vx + y, uy + v^3 - x).$$

   ¿Alrededor de cuales puntos $(x_0, y_0, u_0, v_0) \in \mathbb{R}^4$ podemos resolver $f(x, y, u, v) = f(x_0, y_0, u_0, v_0)$ para u, v en términos de x, y?

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f(x, y) = x^3y + Ax^2 - By^2 + Cxy$, donde $A, B, C \in \mathbb{R}$.

   a) Da condiciones suficientes para que f tenga máximo local en el punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

   b) Da condiciones suficientes para que f tenga mínimo local en el punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

6. A través de la definición de la derivada de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, demuestra que:

   a) Si f tiene una derivada en el punto $a \in \mathbb{R}^n$, entonces es única.

   b) Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son diferenciables en el punto $a \in \mathbb{R}^n$, entonces $f + g$ también es diferenciable en el punto a, y $D(f + g)(a) = Df(a) + Dg(a)$.