Examen 2

Somete 5 de los 6 problemas. Por favor marca el problema que no quieres someter para calificación.

1. Sea $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Demuestra que f es acotada.
2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto conexo que contiene más que un punto. Demuestra que cada punto en A es punto de acumulación de A.
3. Sea $B_1(0) = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \mid ||f||_\infty < 1\}$. Construye una sucesión en $\overline{B_1(0)}$ que no tiene ninguna subsucesión que converge en la topología de $C([0, 1])$.
4. Demuestra que la siguiente serie define una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} x^3 \right)$$

5. Determina (con demostración) si las sucesiones convergen en los siguientes sentidos: (1) puntualmente, (2) uniformemente, (3) uniformemente sobre subconjuntos compactos.
   a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f_n(x) = x + \frac{\operatorname{sen}(x)}{n}$
   b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f_n(x) = x + \frac{x^2}{n}$
   c) $f_n : (0, 1] \to \mathbb{R}$ con $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & x \in \left(0, \frac{1}{n^2}\right) \\ \frac{1}{x^2}, & x \in \left[\frac{1}{n^2}, 1\right] \end{cases}$
6. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto no vacío. Para cada punto $x \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$f(x) = \inf_{y \in A} ||x - y||.$$

   Demuestra que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua.