Análisis de Fourier Discreto

y el triunfo de la teoría de representaciones

Matthew Dawson (CIMAT)

Samana del Estudiante
Xalapa 2016

Lemas Metamatemáticos

"...entre deux vérités du domaine réel, le chemin le plus facile et le plus court passe bien souvent par le domaine complexe."
("...entre dos verdades del dominio real, la ruta más facil y más corta pasa a menudo por el dominio complejo")

—Jacques Hadamard

Dios creó la teoría de representaciones de grupos; todo lo demás es obra del ser humano.

—Yo

Las Series de Fourier

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)

- Ingeniero, matemático, revolucionario, asesor científico en Egipto durante las guerras Napoleónicas.
- Resolvió una ecuación de calor para cuerpos sólidos.
- Afirmó que "todas las funciones" $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, ya sean continuas o discontinuas, admiten una serie convergente:

$$f(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \operatorname{sen}(2\pi kx) + b_k \cos(2\pi kx))$$

- No es cierto en general: hay muchas funciones para las cuales la serie no converge.

Teorema

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *una función continua tal que* f'' *existe sobre* $[0,1]$ *y* $f(0) = f(1)$, *entonces existen números únicos* $\{a_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ *y* $\{b_k\}_{k\geq 0}$ *tal que*

$$f(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen}(2\pi kx) + b_k \cos(2\pi kx)$$

para todo $x \in [0,1]$. *Además, se tiene que*

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2$$

¿Qué pasa si tomamos una función

$$f : \left\{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\} \to \mathbb{R}?$$

Ejemplo: Tomar n muestras discretas de un sonido que dura un segundo.
Ejemplo con $n = 8$:

Las Sumas Finitas de Fourier

Teorema

Sea

$$f : \left\{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\} \to \mathbb{R}$$

una función. Entonces existen números únicos $a_1, a_2, \dots, a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \in \mathbb{R}$ *y* $b_0, b_1, \dots, b_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$ *tales que*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_k \operatorname{sen}(2\pi kx) + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_k \cos(2\pi kx)$$

para todo $x \in \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\}$.

¡Qué feo!

Las Sumas Finitas de Fourier

Equivalentemente, podemos considerar funciones

$$f : \{0, 1, \ldots, n-1\} \to \mathbb{R}.$$

Ejemplo con $n = 8$:

Las Sumas Finitas de Fourier

Con la conversión $i \mapsto \frac{i}{n}$, tenemos otra versión de las sumas de Fourier:

Teorema

Sea

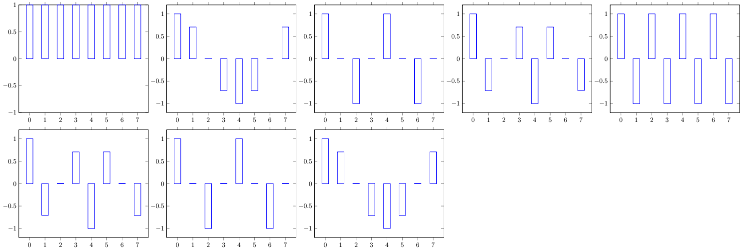
$$f : \{0, 1, \ldots, n-1\} \to \mathbb{R}$$

una función. Entonces números únicos $a_1, a_2, \ldots, a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \in \mathbb{R}$ *y* $b_0, b_1, \ldots, b_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$ *tales que*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n} kx\right) + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_k \cos\left(\frac{2\pi}{n} kx\right)$$

para todo $x \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Para $n = 8$, las funciones $x \mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{8}kx\right)$ para $k = 0, \ldots, 7$ son:



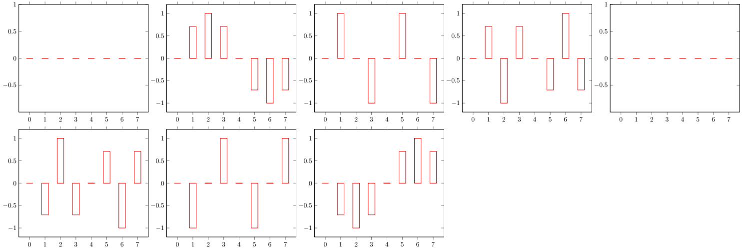
Vemos que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{8}kx\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{8}(n-k)x\right)$$

Entonces nada más necesitamos las funciones con $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Las Buenas Ondas

Para $n = 8$, las funciones $x \mapsto \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{8}kx\right)$ para $k = 0, \ldots, 7$ son:



Vemos que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{8}kx\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{8}(n-k)x\right)$$

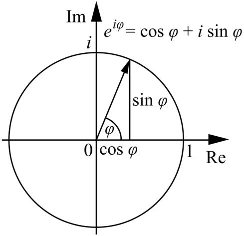
Entonces nada más necesitamos las funciones con $k = 1, 2, 3$.

¡Exigimos más belleza en nuestras teorías matemáticas!

Recordatorio de Números Complejos

- $\mathbb{C} := \{a + ib \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$
- $|a + ib|^2 := a^2 + b^2$ (si $a, b \in \mathbb{R}$)
- $\overline{a + ib} = a - ib$ (si $a, b \in \mathbb{R}$)
- $\mathrm{Re}(a + ib) := a$; $\mathrm{Im}(a + ib) = b$ (si $a, b \in \mathbb{R}$)

- $e^{ib} = \cos b + i \operatorname{sen} b$ (si $b \in \mathbb{R}$)
- $|e^{ib}| = 1$
- $e^{i\pi} + 1 = 0$
- $e^{i(x+2\pi n)} = e^{ix}$ (si $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$)
- $\overline{e^{ib}} = \cos b - i \operatorname{sen} b = e^{-ib}$ (si $b \in \mathbb{R}$).



(Imagen de Wikipedia)

Grupo Cíclico

Definimos el grupo

$$\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$$

donde $[k] = \{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv k \pmod{n}\}$ para $k \in \mathbb{N}$.
Se tiene que:$[k] = [k-n] = [k+n], \ldots$ Se define la adición por

$$[k] + [m] = [k+m]$$

para todo $[k], [m] \in \mathbb{Z}_n$. En particular:

$$-[k] = [-k] = [n-k]$$

Las Funciones

En vez de considerar funciones

$$f : \{0, 1, \ldots, n-1\} \to \mathbb{R},$$

vamos a considerar el espacio

$$C(\mathbb{Z}_n) := \{f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}\}$$

de funciones complejas sobre el *grupo* $\mathbb{Z}_n$.

Las Funciones

$C(\mathbb{Z}_n)$ es un espacio vectoral *sobre* $\mathbb{C}$. Para $f, g \in C(\mathbb{Z}_n)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos

$$(f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x)$$

para $x \in \mathbb{Z}_n$.
Además tiene pruducto interno:

$$\langle f, g \rangle := \sum_{k=0}^{n-1} f([k])\overline{g([k])} \in \mathbb{C},$$

donde $f, g \in C(\mathbb{Z}_n)$, y definimos

$$||f|| := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} |f([k])|^2}$$

El Producto Interno: Un Recordatorio

El producto interno satisface las propiedades:

- $\langle \lambda f + g, h \rangle = \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$
- $\langle f, \lambda g + h \rangle = \overline{\lambda} \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$
- $\langle f, f \rangle \geq 0$, y $\langle f, f \rangle = 0$ si y solo si $f = 0$
- $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$,

donde $f, g, h \in C(\mathbb{Z}_n)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Una Base Ortonormal

Para cada $[k] \in \mathbb{Z}_n$, definimos la función $\delta_{[k]} \in C(\mathbb{Z}_n)$ por:

$$\delta_{[k]}([x]) = \begin{cases} 1 & \text{si } [k] = [x] \\ 0 & \text{si } [k] \neq [x] \end{cases}$$

Si $f \in C(\mathbb{Z}_n)$, tenemos que:

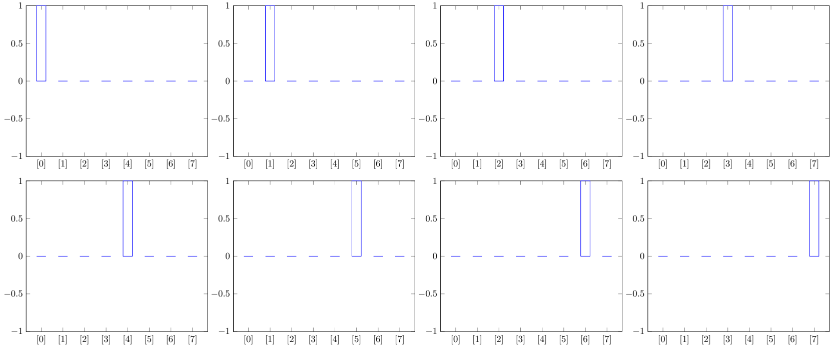
$$f([y]) = \sum_{x=0}^{n-1} f([x])\delta_{[x]}([y]).$$

Es decir:

$$f = \sum_{x=0}^{n-1} f([x])\delta_{[x]}$$

Una Base Ortonormal

Las funciones $\delta_{[k]} \in C(\mathbb{Z}_8)$



Una Base Ortonormal

- $\langle \delta_{[x]}, \delta_{[y]} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } [k] = [x] \\ 0 & \text{si } [k] \neq [x] \end{cases}$
- $\{\delta_x \mid x \in \mathbb{Z}_n\}$ es base ortonormal para $C(\mathbb{Z}_n)$.
- Nos da información *espacial*.
- Queremos una base que nos dé información de *frecuencias*.

El Toro


(*Un* Toro)

El **toro** de dimensión uno es el subconjunto

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$$

Observen que:

- $1 \in \mathbb{T}$.
- Si $z, w \in \mathbb{T}$, entonces $zw \in \mathbb{T}$.
- Si $z \in \mathbb{T}$, entonces $z^{-1} = \overline{z} \in \mathbb{T}$.

Entonces $\mathbb{T}$ es un grupo bajo la multiplicación de números complejos.

Definición

Sea G un grupo. Un **caracter** *de G us un homomorfismo $\chi : G \to \mathbb{T}$.*

Example: $G = \mathbb{Z}_n$. Un caracter de $\mathbb{Z}_n$ es una función $\chi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$ tal que

$$\chi([k] + [m]) = \chi([k])\chi([m])$$

para todo $[k], [m] \in \mathbb{Z}_n$.

Ejemplos de Caracteres

Para $[k] \in \mathbb{Z}_n$, definimos $\chi_{[k]} : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{T}$ por:

$$\chi_{[k]}([x]) = e^{\frac{2\pi i}{n} kx}.$$

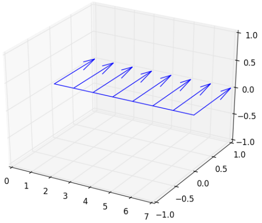
Entonces

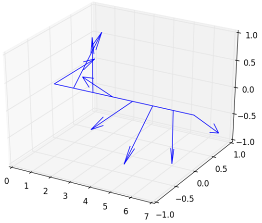
- $\chi_{[k]}$ está bien definida:

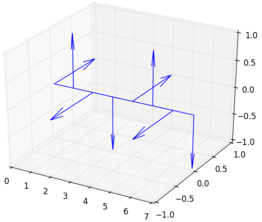
$$e^{\frac{2\pi i}{n} kx} = e^{\frac{2\pi i}{n} k(x+n)} = e^{\frac{2\pi i}{n} (k+m)x}$$

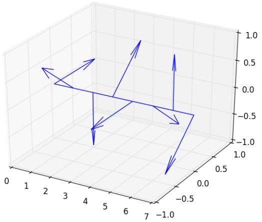
  para todo $n, m \in \mathbb{N}$.
- $\chi_{[k]}([x] + [y]) = e^{\frac{2\pi i}{n} k(x+y)} = e^{\frac{2\pi i}{n} kx} e^{\frac{2\pi i}{n} ky} = \chi_{[k]}([x])\chi_{[k]}([y])$
- Por ende, $\chi_{[k]}$ es un caracter de $\mathbb{Z}_n$.

Para $\mathbb{Z}_8$, los caracteres $\chi_{[0]}, \ldots \chi_{[7]}$ son:



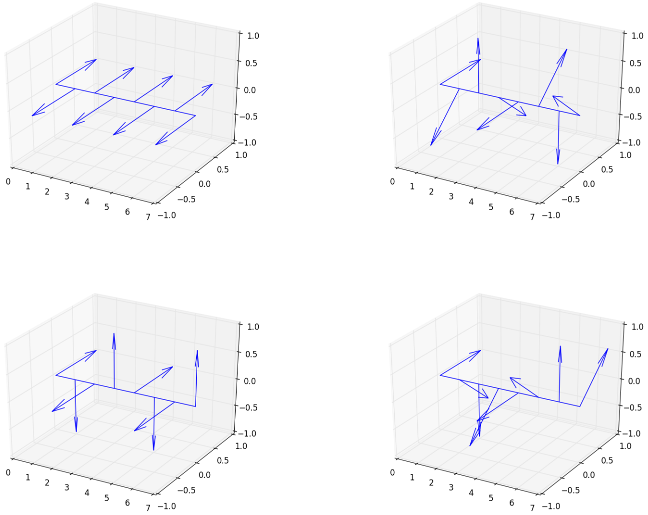






Visualización de Caracteres de $\mathbb{Z}_8$

Para $\mathbb{Z}_8$, los caracteres $\chi_{[0]}, \ldots \chi_{[7]}$ son:



Ortogonalidad de Caracteres

Teorema

Si $\chi, \rho \in C(\mathbb{Z}_n)$ *son caracteres de* $\mathbb{Z}_n$*, entonces*

$$\langle \chi, \rho \rangle = \begin{cases} n & \textit{si } \chi = \rho \\ 0 & \textit{si } \chi \neq \rho \end{cases}$$

Demostración.

Sea $\chi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{T}$ un caracter. Entonces $|\chi([k])| = 1$ para todo $[k] \in \mathbb{Z}_n$ y se sigue que:

$$\langle \chi, \chi \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \chi([k])\overline{\chi([k])} = \sum_{k=1}^{n-1} |\chi([k])|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} 1 = n.$$

$\square$

Demostración (Cont.)

Supongamos que hay $[h] \in \mathbb{Z}_n$ tal que $\chi([h]) \neq \rho([h])$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle \chi, \rho \rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} \chi([k])\overline{\rho([k])} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \chi([k]+[h])\overline{\rho([k]+[h])} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \chi([h])\chi([k])\overline{\rho([h])\rho([k])} \\
&= \chi([h])\overline{\rho([h])} \sum_{k=0}^{n-1} \chi([k])\overline{\rho([h])} \\
&= \frac{\chi([h])}{\rho([h])} \langle \chi, \rho \rangle
\end{aligned}$$

Ortogonalidad de Caracteres

Demostración (Cont.)

Entonces

$$\langle \chi, \rho \rangle = \frac{\chi([h])}{\rho([h])} \langle \chi, \rho \rangle$$

pero $\frac{\chi([h])}{\rho([h])} \neq 1$. Entonces

$$\langle \chi, \rho \rangle = 0.$$

$\square$

Una Base Ortonormal

- Ya tenemos distintos caracteres $\chi_{[0]}, \chi_{[1]}, \ldots, \chi_{[n-1]}$.
- $\dim_{\mathbb{C}} C(\mathbb{Z}_n) = 8$
- $\langle \chi_{[k]}, \chi_{[m]} \rangle = \begin{cases} n & \text{si } [k] = [m] \\ 0 & \text{si } [k] \neq [m] \end{cases}$
- Por lo tanto,
$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \chi_{[0]}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}} \chi_{[n-1]} \right\}$$
es una base ortonormal para $C(\mathbb{Z}_n)$.

La Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Si $f \in C(\mathbb{Z}_n)$, entonces:

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{n}}\chi_{[k]} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{n}}\chi_{[k]}$$

Definition

Si $f \in C(\mathbb{Z}_n)$, definimos $\widehat{f} \in C(\mathbb{Z}_n)$ por:

$$\widehat{f}([k]) = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{n}}\chi_{[k]} \right\rangle$$

para $[k] \in \mathbb{Z}_n$.

Si $f \in C(\mathbb{Z}_n)$ y $[k] \in \mathbb{Z}_n$, entonces

$$f([x]) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}([k]) e^{\frac{2\pi i}{n} kx}$$

pero

$$\widehat{f}([k]) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=0}^{n-1} f([x]) e^{-\frac{2\pi i}{n} kx}$$

Bonitas Simetrías

- El mapeo
$$C(\mathbb{Z}_n) \to C(\mathbb{Z}_n)$$
$$f \mapsto \widehat{f}$$
es un isomorfismo lineal.
- $\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \langle f, g \rangle$ (es decir la transformada de Fourier es *unitaria*)
- $\widehat{\widehat{f}}([x]) = f(-[x])$
- $\widehat{\delta_{[m]}} = \chi_{[-m]}$
- $\widehat{\chi_{[m]}} = \delta_{[m]}$

Las Funciones Con Valores Reales

Supongamos que $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} f([x]) &= \operatorname{Re} f(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re}\left(\widehat{f}([k]) e^{\frac{2\pi i}{n} kx}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\operatorname{Re} \widehat{f}([k]) \cos\left(\frac{2\pi}{n} kx\right) - \operatorname{Im} \widehat{f}([k]) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n} kx\right)\right) \end{aligned}$$

Ya tenemos los senos y cosenos!

Un Mundo Con Solo Cosenos

¿Qué pasa si $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{R}$ es par (es decir, $f([k]) = f(-[k])$)? Pues,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \widehat{f}([k]) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=0}^{n-1} \operatorname{Im}\left(f([k]) e^{-\frac{2\pi i}{n} kx} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=0}^{n-1} f([k]) \operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{n} kx \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=0}^{n-1} f([-k]) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n} (-k) x \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=0}^{n-1} f([k]) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n} kx \right) \\
&= -\operatorname{Im} \widehat{f}[k]
\end{aligned}$$

Entonces $\operatorname{Im} \widehat{f}[k] = 0$!

Un Mundo Con Solo Cosenos

¿Qué pasa si $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{R}$ es par (es decir, $f([k]) = f(-[k])$)? Pues,

$$f([x]) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}([k]) \cos\left(\frac{2\pi}{n} kx\right)$$

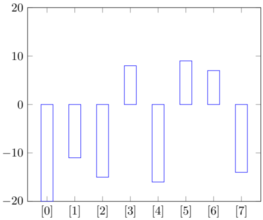
pero

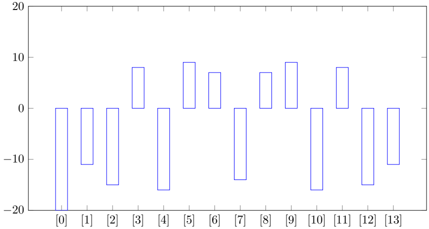
$$\widehat{f}([k]) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x=0}^{n-1} f([x]) \cos\left(\frac{2\pi}{n} kx\right)$$

Dada cualquier función $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{R}$, se puede construir una función par $\widetilde{f} : \mathbb{Z}_{2n-2} \to \mathbb{R}$ así: (para $0 \leq m < 2n-2$)

$$\widetilde{f}([m]) = \begin{cases} f([m]) & \text{si } 0 \leq m \leq n-1 \\ f([(2n-2)-m]) & \text{si } n \leq m < 2n-2 \end{cases}$$

Ejemplo donde $f : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{R}$, $\widetilde{f} : \mathbb{Z}_{14} \to \mathbb{R}$:





Entonces, si $0 \leq x \leq n-1$, tenemos:

$$f([x]) = \widetilde{f}([x]) = \frac{1}{\sqrt{2n-2}} \sum_{k=0}^{2n-3} \widehat{\widetilde{f}}([k]) \cos\left(\frac{2\pi}{2n-2} kx\right)$$

donde

$$\begin{aligned}
\widehat{\widetilde{f}}([k]) =& \frac{1}{\sqrt{2n-2}} \sum_{x=0}^{2n-3} \widetilde{f}([x]) \cos\left(\frac{2\pi}{2n-2} kx\right) \\
=& \frac{1}{\sqrt{2n-2}} \Bigg(f([0]) + (-1)^k f([n-1]) + \\
& + 2 \sum_{x=1}^{n-2} f([x]) \cos\left(\frac{2\pi}{2n-2} kx\right)\Bigg)
\end{aligned}$$

La Transformada Discreta Del Coseno (DCT)

De hecho, tenemos, para $0 \leq x \leq n-1$:

$$f([x]) = \frac{1}{\sqrt{2n-2}} \left(\widehat{\widetilde{f}}([0]) + (-1)^x \widehat{\widetilde{f}}([n-1]) + \right.$$
$$\left. +2 \sum_{x=1}^{n-2} \widehat{\widetilde{f}}([k]) \cos\left(\frac{2\pi}{2n-2} kx \right) \right)$$

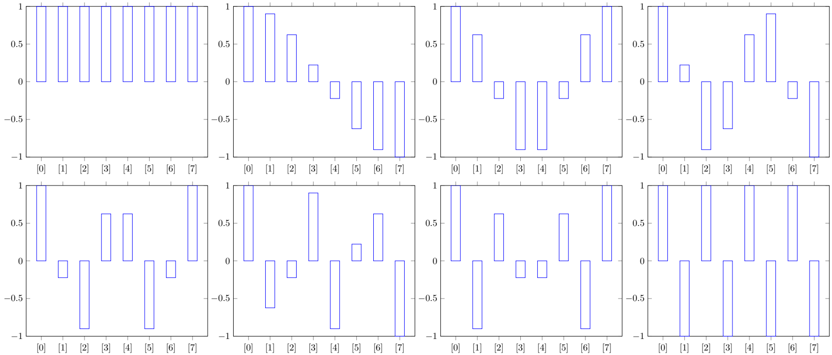
donde

$$\widehat{\widetilde{f}}([k]) = \frac{1}{\sqrt{2n-2}} \left(f([0]) + (-1)^k f([n-1]) + \right.$$
$$\left. +2 \sum_{x=1}^{n-2} f([x]) \cos\left(\frac{2\pi}{2n-2} kx \right) \right)$$

para $0 \leq k \leq n-1$.

Base de Cosenos Para $C(\mathbb{Z}_8)$

Las funciones $[x] \mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{14}kx\right)$ para $0 \leq k \leq 7$:



Considera el grupo $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$, donde $n, n \in \mathbb{N}$ y el espacio vectorial:

$$C(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m) = \{f : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{C}\}$$

Le damos el producto interno:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} f([j],[k])\overline{g([j],[k])}$$

Ejemplo: Imagen 2D con $n \times m$ pixeles.

Para $([j],[k]) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$, definimos un caracter $\chi_{([k],[m])} : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{T}$ por:

$$\chi_{([j],[k])}([x],[y]) = e^{\frac{2\pi i}{n} jx} e^{\frac{2\pi i}{m} ky}$$

Otra vez,

$$\langle \chi_{([j_1],[k_1])}, \chi_{([j_2],[k_2])} \rangle = \begin{cases} nm & \text{si } j_1 = j_2 \text{ y } k_1 = k_2 \\ 0 & \text{si } j_1 \neq j_2 \text{ o } k_1 \neq k_2 \end{cases}$$

DFT Dos-Dimensional

Definimos una transformada lineal

$$C(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m) \to C(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m)$$
$$f \mapsto \widehat{f}$$

por:

$$\widehat{f}([j],[k]) = \frac{1}{\sqrt{nm}} \left\langle f, \chi_{([j],[k])} \right\rangle$$

DFT Dos-Dimensional

Si $f \in C(\mathbb{Z}_n)$ y $[k] \in \mathbb{Z}_n$, entonces

$$f([x],[y]) = \frac{1}{\sqrt{nm}} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \widehat{f}([j],[k]) e^{\frac{2\pi i}{n} jx} e^{\frac{2\pi i}{m} ky}$$

pero

$$\widehat{f}([j],[k]) = \frac{1}{\sqrt{nm}} \sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{m-1} f([x],[y]) e^{-\frac{2\pi i}{n} jx} e^{-\frac{2\pi i}{m} ky}$$

DCT Dos-Dimensional

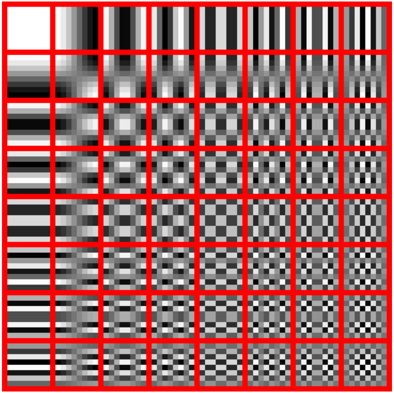
Se puede mostrar que las funciones:

$$([x],[y]) \mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{2n-2}jx\right)\cos\left(\frac{2\pi}{2m-2}kx\right)$$

donde $0 \leq j \leq n-1$ y $0 \leq k \leq m-1$, forman una base ortogonal para $C(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m)$.

Base de Cosenos Para $C(\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8)$

Las funciones $([x],[y]) \mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{14} jx\right) \cos\left(\frac{2\pi}{14} ky\right)$ para $0 \le j, k \le 7$:



(Fuente: Wikipedia)

JPEG

Los archivos JPEG hacen lo siguiente:

- Dividimos la imagen en bloques de pixels 8×8.
- Para cada bloque 8×8, tenemos funciones $f_{\text{verde}}, f_{\text{rojo}}, f_{\text{azul}} : \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{R}$ de intensidad.
- Para cada función de intensidad, calculamos la DCT.
- Echamos los datos que corresponden a altas frequencias (según un algoritmo).
- Aplicamos el inverso de la DCT.
- Suposición: que las altas frequencias no aportan mucho a la imagen.
- Los contrastes contundentes se pueden borrar un poco.

Las mismas ideas se puede aplicar a:

- Archivos mp3.
- Grupos no abelians.
- Grupos de Lie.
- Ecuaciones diferenciales parciales.
- La física cuántica.