Tarea I: La Estructura de $\mathrm{SU}(p,q)$

La meta principal de esta tarea es calcular los datos de raíces para el grupo semisimple no-compacto $\mathrm{SU}(p,q)$. Como un recordatorio, el grupo $\mathrm{SU}(p,q)$ es definido de ser el grupo de isometrías para el producto escalar de $\mathbb{R}^{p,q}$, es decir que

$$\mathrm{SU}(p,q) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \mid A^* J A = J, \det A = 1\},$$

donde $J = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. También, el algebra de Lie está dada por:

$$\mathfrak{su}(p,q) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid A^* J + JA = 0, \operatorname{Tr} A = 0\}.$$

De hecho, si piensas de matrices en $\mathfrak{su}(p,q)$ como matrices con cuatro bloques (con dimensiones $p \times p$, $p \times q$, $q \times p$, y $q \times q$), entonces puedes hallar una descripción de $\mathfrak{su}(p,q)$ que es muy explícita y sencilla.

Como siempre, el grupo $G = \mathrm{SU}(p,q)$ tiene una involución de Cartan dada por $\theta : g \mapsto (g^*)^{-1}$. En el nivel del algebra de Lie, la involución es $\theta : X \mapsto -X^*$. Puedes checar que $\mathrm{SU}(p,q)$ y $\mathfrak{su}(p,q)$ son invariantes bajo esta involución.

1. Escribe $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ como siempre. ¿Cuáles son $\mathfrak{k}$ y $\mathfrak{p}$ en este caso? ¿Además, cuál es el subgrupo compacto maximal K de G?
2. Halla una subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a}$ en $\mathfrak{p}$.
3. Determina el conjunto de raíces $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ y los espacios de raíces $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}$ para cada $\alpha \in \Sigma$.
4. Elige un subconjunto $\Sigma^+ \subseteq \Sigma$ de raíces *positivas*.
5. Halla el conjunto $\Pi \subseteq \Sigma^+$ de raíces simples positivas (es decir, las raíces positivas que no se puede escribir como una suma no-trivial de raíces).
6. ¿Cuáles son las álgebras $\mathfrak{n} = \oplus_{\alpha\in\Sigma^+}\mathfrak{g}_\alpha$ y $\mathfrak{m} = Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$?
7. ¿Cuáles son los grupos $N = \exp \mathfrak{n}$, $A = \exp \mathfrak{a}$, y $M = Z_K(\mathfrak{a})$?
8. ¿Cuál es el grupo parabólico minimal MAN?