Probabilidad

Lista de Problemas 3

Los cuatro primeros problemas son para entregar el martes 28/08/18.

Por favor, entrega por separado los problemas pares y los impares.

1. En una bolsa hay cinco boletos que corresponden a un premio de \$1,000 y cuatro premios de \$20. Cinco personas sacan, sucesivamente, un boleto al azar y sea X_i el premio que le corresponde a la i-ésima persona en sacar un boleto. Calcule $\mathrm{E}(X_1)$ y $\mathrm{Var}(X_1)$, (b) $\mathrm{E}(X_3)$ y $\mathrm{Var}(X_5)$, (c) $\mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_5)$ y $\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_5)$.

2. Se considera el siguiente juego de azar entre dos jugadores. El primero elige un punto X al azar en el intervalo $(0, 2)$ mientras que el segundo elige un punto Y en el intervalo $(1, 3)$, también con distribución uniforme. Suponemos que X e Y son variables aleatorias independientes. Entonces

   – Si $X < Y$, el primer jugador paga $a(Y - X)$ unidades al segundo.

   – Si $X \geq Y$, el segundo jugador paga $b(X - Y)$ unidades al primero,

   donde a y b son constantes positivas.

   a) Hallar la relación b/a para que el juego sea equitativo (esto significa que la esperanza matemática de la ganancia de cada jugador es igual a cero).

   b) Con la relación b/a calculada en la parte anterior, calcular la varianza de la ganancia del primer jugador.

3. Escogemos n puntos al azar en $[0, 1]$ con distribución uniforme. Sea $m_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$, $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, $R_n = M_n - m_n$. Halle el valor esperado de estas tres variables aleatorias.

4. **Distribución Beta** Sea X una variable aleatoria con densidad

   $$f(x) = Cx^{a-1}(1 - x)^{b-1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

   Halle el valor de C y calcule $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

5. a) Si X es una variable discreta con valores en el conjunto $0, 1, 2, \dots$ demuestre que $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$.

   b) Si X es una variable continua no-negativa con densidad $f(x)$ y f.d. F, demuestre que

   $$\mathrm{E}[X] = \int_0^\infty [1 - F(t)]\, dt = \int_0^\infty P(X > t)\, dt.$$

6. De ejemplos de variables aleatorias que satisfagan las siguientes propiedades

   a) $\mathrm{E}(X)$ no existe.

   b) $\mathrm{E}(X)$ existe pero $\mathrm{Var}(X)$ no existe.

   c) $\mathrm{E}(X^p)$ existe para $p = 1, 2, \dots k$ pero no para $p > k$.

7. Sean X, Y variables aleatorias independientes, ambas con distribución de Bernoulli con probabilidad de éxito $1/2$. Demuestre que $X + Y$ y $|X + Y|$ son dependientes pero no están correlacionadas.

8. Sea X una variable con distribución exponencial. (a) Halle $P(\operatorname{sen} X > 1/2)$, (b) $\mathrm{E}(X^n)$ para $n \geq 1$.

9. Extraemos al azar cartas de un juego de barajas con reposición hasta obtener un as y sea X el número de cartas extraídas. Halle $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

10. Sea X una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro λ. Halle el valor esperado de la variable $Y = e^X$.

11. Lanzamos dos dados, si el lanzamiento es un *doble* (dos caras iguales) los dados se vuelven a lanzar y así hasta que las dos caras que se obtienen sean distintas. Sea X el número de lanzamientos necesarios para que esto ocurra. Halle el valor esperado y la varianza de X. Halle también el valor esperado y la varianza de 2^X

12. Lanzamos un par de dados, sea X_1 el número que aparece en el primero y X_2 el del segundo. Definimos $Y = X_1 + X_2$, $Z = XY$. Halle (a) $\mathrm{E}(X_1)$, (b) $\mathrm{E}(X_2^2)$, (c) $\mathrm{E}(Y)$, (d) $\mathrm{E}(Z)$, (e) $\mathrm{E}(YZ)$, (f) $\mathrm{E}(Y^2)$, (g) $\mathrm{E}(Z^2)$.

13. En un concurso hay cinco cajas idénticas cerradas. En una de ellas hay \$100,000, otra contiene \$10,000, una tercera \$1,000, la cuarta \$100 y la última tiene un signo de ALTO. El concursante escoge una caja y gana el contenido. Este proceso se repite hasta que salga el signo de ALTO, momento en el cual el concurso termina. Halle el valor esperado de la cantidad que gana el concursante.

14. a) Se lanza una moneda balanceada repetidamente. Sea ν la variable aleatoria que indica el número de veces seguidas que ocurre lo mismo que en el primer lanzamiento. (Por ejemplo, si A es águila y S es sol, con la sucesión de resultados $AAASSAS\dots$ se tiene $\nu = 3$ mientras que con la sucesión $SSSSSASAS\dots$ se tiene $\nu = 5$). Calcular $\mathrm{E}(\nu)$ y $\mathrm{Var}(\nu)$.

    b) Rehacer el cálculo de la parte (a) suponiendo que, en lugar de una moneda perfecta, se dispone de una moneda tal que la probabilidad de águila en un lanzamiento es igual a p. ¿Qué ocurre si $p = 0$ ó $p = 1$?

15. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Calcular $\mathrm{E}(Y)$ cuando (a) $Y = \operatorname{sen} X$. (b) $Y = \cos X$ (c) $Y = 3X^2 + 2$ (d) $Y = 1/|X|^\alpha$ En el último caso, ¿para cuáles valores de α se tiene que $\mathrm{E}(Y) < \infty$?

16. Calcular la esperanza y la varianza de las distribuciones cuyas densidades se indican a continuación:

$$(a)\ f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \qquad (b)\ f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

17. Sea X una variable con distribución exponencial. (a) Halle $P(\operatorname{sen} X > 1/2)$, (b) $\mathrm{E}(X^n)$ para $n \geq 1$.

18. La duración T de cierto tipo de llamadas telefónicas satisface la relación

$$P(T > t) = ae^{-\lambda t} + (1 - a)e^{-\mu t}, \quad t \geq 0,$$

    donde $0 \leq a \leq 1, \lambda > 0, \mu > 0$ son constantes. Halle media y varianza para T.

19. Sea X una variable aleatoria con densidad $f(x) = 6x(1 - x)$ para $0 < x < 1$. Compruebe que f es una densidad y obtenga media y varianza para esta distribución.

20. La proporción de tiempo por día en que todas las cajas registradoras están ocupadas a la salida de cierto supermercado es una variable aleatoria X con una densidad $f(x) = Cx^2(1 - x)^4$ para $0 \leq x \leq 1$. Determine el valor de C y $\mathrm{E}(X)$.

21. **Distribución de Pareto** La distribución de Pareto con parámetros r y A, $r > 0$, $A > 0$, es aquella que tiene la densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{rA^r}{x^{r+1}} & \text{si } x \geq A, \\ 0 & \text{si } x < A. \end{cases}$$

    (a) Calcular la esperanza y la varianza de esta distribución de probabilidad.

    (b) Calcular y graficar la función

$$Q(y) = F(\mu + y\sigma) - F(\mu - y\sigma)$$

    para $y \geq 0$ donde μ es la esperanza y σ^2 la varianza halladas en a, y F es la función de distribución de probabilidad de Pareto, en el caso $A = 1$, $r = 3$.

22. **Distribución de Rayleigh** Una variable tiene distribución de Rayleigh si su densidad es

$$f(x) = \frac{2x}{\theta} e^{-x^2/\theta}$$

    para $x > 0$. Calcule $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ y obtenga la densidad de $Y = X^2$.

23. **Distribución de Laplace** Una variable X tiene distribución de Laplace si su densidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\beta} \exp\Big(- \frac{|x - \alpha|}{\beta} \Big), \quad x \in \mathbb{R},$$

    para ciertas constantes α y $\beta > 0$. Halle media y varianza para una variable con esta distribución.