Probabilidad

Lista de Problemas 14

1. Considere dos cajas y $2N$ bolas de las cuales la mitad son negras y la otra mitad blancas. Inicialmente se colocan N bolas en cada caja, al azar. En cada paso se selecciona una bola de cada caja al azar y se intercambian. Sea X_n el número de bolas blancas en la primera caja en el instante n. Halle la matriz de transición para esta cadena y su distribución estacionaria.

2. Un sistema de producción tiene tres estados posibles: 1, 2, y 3: En el estado 1 opera de manera eficiente. En el estado 2 continua funcionando pero su eficiencia es menor. El estado 3 requiere que el proceso se detenga y se haga mantenimiento o se repare la maquinaria. Si X_n denote el estado del sistema en el instante n, entonces suponemos que $X_0, X_1, \dots$ es una cadena de Markov matriz de transición P.

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

   (a) Halle la distribución estacionaria para este proceso. (b) La ganancia que el proceso genera por unidad de tiempo en cada estado es, respectivamente, \$1,000; \$ 600 y \$ -200. Halle la ganancia media por unidad de tiempo a largo plazo.

3. Demuestre usando las funciones generadoras de momentos que una variable X con densidad $e^{-|x|}/2,\ x \in \mathbb{R}$ se puede escribir como $X = Y_1 - Y_2$, con Y_1, Y_2 v.a.i. con distribución exponencial.

4. En cierta sociedad las familias escogen el número de hijos que van a tener de acuerdo a la siguiente regla: Si el primer hijo es una niña, tienen exactamente un hijo más. Si el primer hijo es un niño, continúan teniendo hijos hasta tener la primera niña y allí se detienen. Sea ξ el número de hijos varones en una familia particular. ¿Cuál es la función generadora de ξ? Determine la media de ξ directamente y diferenciando la función generadora.

5. Una persona tiene tres paraguas, algunos en su oficina y otros en su casa. Si al salir de su casa en la mañana, o del trabajo en la noche, está lloviendo, toma un paraguas, si hay uno disponible. Si no hay, se moja. Suponga que, independientemente del pasado, la probabilidad de que llueva en cada viaje es de 0.2. Sea X_n el número de paraguas en el sitio en cual se encuentra en ese instante. a) Halle la matriz de transición para esta cadena de Markov. b) Calcule la fracción del tiempo que la persona se moja (asintóticamente).

6. A fin de mes, una tienda clasifica las cuentas de sus clientes según estén al día (estado 0), tengan entre 30 y 60 días de atraso (1), tengan entre 60 y 90 días de atraso (2) y tengan mas de 90 días de atraso (3). Por experiencia previa saben que las cuentas se mueven de un estado a otro según una cadena de Markov con matriz de transición P_5.

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}$$

   A largo plazo, ¿qué fracción de la cuentas está en cada categoría?

7. Considere dos cadenas de Markov con matrices de transición

$$i)\ P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \qquad ii)\ P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

   Halle la distribución estacionaria concentrada en cada uno de los conjuntos cerrados irreducibles.

8. Sea $X \sim \mathcal{U}[0,a]$. Halle la función generadora de momentos de X y determine para qué valores de t existe.

9. Sea $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Halle la función generadora de momentos y los dos primeros momentos de X^2.

10. Sea X una v.a. con función de probabilidad $p_X(k) = \frac{1}{2}q^{|k|-1}p$, con $0 < q = 1-p < 1$. Halle la f.g.p. y la f.g.m para esta variable aleatoria.

11. Sea $Z = \sum_{n=0}^{\infty} X_n$ el tamaño total de una familia en un proceso de ramificación en el cual el número de descendientes por individuo tiene media $\mu = \mathrm{E}(\xi) < 1$. Suponiendo que $X_0 = 1$, demuestre que $\mathrm{E}(Z) = 1/(1-\mu)$.

12. Sea X_n un proceso de ramificación que inicia con un sólo individuo. Halle la probabilidad de extinción en los siguientes casos: (a) $P(\xi = 0) = 1/2$, $P(\xi = 1) = P(\xi = 2) = 1/4$. (b) $P(\xi = 0) = P(\xi = 1) = 1/4$, $P(\xi = 2) = 1/2$. En cada caso halle también la probabilidad de extinción si la población inicia con k individuos.

13. En el instante inicial un cultivo de células comienza con una célula de tipo A. Al final de un minuto esta célula muere y da origen a alguna de las siguientes combinaciones con las probabilidades indicadas: 2 células tipo A con probabilidad $1/4$, una célula tipo A y una tipo B con probabilidad $2/3$ y dos células tipo B con probabilidad $1/12$. Las células tipo A viven por 1 minuto y se reproducen como hemos descrito. Las células tipo B mueren al cabo de 1 minuto sin reproducirse y todas las células actúan de manera independiente. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que no hayan aparecido células tipo B al cabo de n minutos y medio? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el cultivo de células se extinga en algún momento?

14. Considere un proceso de ramificación con $\phi(s) = as^2 + bs + c$ con $a > 0, b > 0, c > 0$, $\phi(1) = 1$. Halle la probabilidad de extinción y dé una condición para que esta probabilidad valga 1.

15. Considere un proceso de ramificación en el cual la descendencia se genera de acuerdo a una distribución de Bernoulli con función generadora de probabilidad $\phi(s) = q + ps$ y sea $T = \inf\{n : X_n = 0\}$. (a) Halle $P(T = n)$ para $n \geq 1$. (b) Halle $P(T = n)$ si la población inicial tiene k individuos.

16. Considere un proceso de ramificación y sea X_n el tamaño de la n-ésima generación si $X_0 = 1$. Sea ξ una v.a. con valores en $\{0, 1, 2, \dots\}$ que representa el número de descendientes de un individuo con ley dada por $P(\xi = k) = C(2/3)^k$ para $k = 1, 2, \dots$. (a) Determine una condición sobre C para que la probabilidad de extinción sea menor que 1. (b) Halle una fórmula para $\mathrm{E}(X_n)$ en términos de C y n. (c) Suponiendo que C es tal que la probabilidad de extinción es 1, sea N el número total de todos los individuos de la población, sumando todas las generaciones. Demuestre que $E(N)$ satisface $\mathrm{E}(N) = 1 + \mathrm{E}(\xi)\,\mathrm{E}(N)$ y en consecuencia determine $\mathrm{E}(N)$. Haga una gráfica de $\mathrm{E}(N)$ contra C.

17. Sea $(X_n)_n$ una sucesión de variables aleatorias que converge c.s. a 0. Probar que $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ converge c.s. a 0. Dar un ejemplo que demuestre que el resultado no es cierto para la convergencia en probabilidad.

18. Probar que si $(X_n)_n$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con distribuciones $U(a,b)$, entonces $M_n = \sup_{k<n} X_k$ converge c.s..

19. Sea $(X_n)_n$ una sucesión de variables aleatorias que converge en probabilidad a la variable aleatoria X. Probar que si para cada n, $X_n \leq X_{n+1}$ c.s., entonces la sucesión converge c.s..

20. Sea $(X_n)_n$ una sucesión de variables aleatorias que converge en probabilidad a la variable aleatoria X, y f una función uniformemente continua. Probar a partir de la definición de convergencia en probabilidad que la sucesión $(f(X_n))_n$ converge en probabilidad. (El resultado también es cierto si f es continua, pero es un poco más difícil de probar).

21. Probar que si $(X_n)_n$ es una sucesión de variables aleatorias independientes que converge en probabilidad, entonces la variable límite ha de ser constante c.s..

22. Sean $(X_n)_n$ v.a.i.i.d. con función de distribución

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - (1-x)^{\lambda} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Probar que si $M_n = \text{máx}\{X_1, \dots, X_n\}$ entonces $n^{1/\lambda} M_n - n^{1/\lambda} \xrightarrow{L} X$, donde X es una v.a. con función de distribución $F(x) = e^{-(-x)^\lambda}$ si $x \leq 0$ y $F(x) = 1$ para $x > 0$.

23. Dar un ejemplo que pruebe que $X_n \xrightarrow{d} X$ y $Y_n \xrightarrow{d} Y$ no implica $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y$.

24. Dar ejemplos de: a) Variables que converjan en ley y sus densidades no converjan.

    b) Sucesiones de variables con densidad que converjan a una variable sin densidad.

    c) Variables con distribución discreta que converjan a una que tenga densidad.

25. Demuestre que una sucesión $(X_n)_{n\geq 1}$ converge c.s. si y solo si es de Cauchy c.s.

26. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables i.i.d. con

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

    y sea $Y_n = \sum_1^n (X_i/2^i)$. Demuestre que Y_n converge débilmente e identifique la distribución límite.

27. Determine si las siguientes sucesiones de variables independientes satisfacen la LDGN y el TCL.

    - $P(X_k = 2^k) = P(X_k = -2^k) = \frac{1}{2}$.
    - $P(X_k = 2^k) = P(X_k = -2^k) = \frac{1}{2^{2k+1}}, P(X_k = 0) = 1 - \frac{1}{2^k}$.
    - $P(X_k = 2^{-k}) = P(X_k = -2^{-k}) = \frac{1}{2}$.

28. Determine si las siguientes sucesiones de variables independientes satisfacen la LFGN.

    - $P(X_k = 2^k) = P(X_k = -2^k) = \frac{1}{2}$.
    - $P(X_k = k) = P(X_k = -k) = \frac{1}{2\sqrt{k}}, P(X_k = 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{k}}$.

29. Sea $X_1, \dots, X_n$ v.a.i. con media μ y varianza $\sigma^2 > 0$.A partir de la desigualdad de Chebychef demuestre que para $\varepsilon > 0$ se tiene

$$P\Big(\Big|\frac{n^{1/4}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}\Big| > \varepsilon\Big) \leq \frac{1}{\varepsilon^2\sqrt{n}}.$$

30. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de v.a.i. con distribución $\mathcal{N}(0,1)$. Para $n \geq 1$ definimos

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

    Halle media y varianza para las variables X_i^2 y use el Teorema Central de Límite para aproximar $P(Y_{100} > 110)$.