Probabilidad

Lista de Problemas 12

Los cuatro primeros problemas son para entregar el martes 12/11/17.

Por favor, entrega por separado los problemas pares y los impares.

1. Considere un paseo al azar simple y simétrico: $P_{ii+1} = P_{ii-1} = 1/2$ para $0 < i < N$, con estados absorbentes en los extremos: $P_{00} = P_{NN} = 1$. Sea $T = \min\{n : X_n = 0 \text{ ó } X_n = N\}$, el instante en el cual la cadena entra a un estado absorbente. Calcule $\mathrm{E}_i(T)$, el valor esperado del intervalo de tiempo hasta que la cadena es absorbida si comienza de i. Calcule este valor esperado en los siguientes casos particulares: $N = 25,\ i = 15$; $N = 50,\ i = 30$; $N = 250,\ i = 150$; $N = 2500,\ i = 1500$. Obtenga una ecuación para $\mathrm{E}_i(T)$ en el caso asimétrico $P_{ii+1} = p$, $P_{ii-1} = q$, $p + q = 1$, y compruebe que la siguiente función es solución de esta ecuación:
$$\frac{i}{q-p} - \frac{N}{q-p}\frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^N}.$$

2. Halle la distribución estacionaria para las cadenas de Markov con las siguientes matrices de transición $P_i, i = 1, 2, 3$.
$$P_1 = \begin{pmatrix} .5 & .5 & 0 & 0 \\ 0 & .6 & .4 & 0 \\ .1 & 0 & .4 & .5 \\ .6 & 0 & 0 & .4 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} .8 & .2 & 0 & 0 \\ 0 & .6 & .4 & 0 \\ .2 & 0 & .4 & .4 \\ .5 & 0 & 0 & .5 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$
Verifique que la distribución que halló satisface la condición $\pi P_i = \pi$.

3. Considere un paseo al azar $S_n, n \geq 0$ con $S_0 = 0$ y sea $T_k = \min\{n \geq 1 : S_n = k\}$. Demuestre que para $b > 0$
$$P_0(T_b = n) = \frac{b}{n} P_0(S_n = b).$$
Generalice este resultado para cualquier b y demuestre que $\mathrm{E}_0(T_b) = \sum_{n\geq 1} |b| P_0(S_n = b)$. Usando esta fórmula halle $\mathrm{E}_0(T_1)$ para un paseo al azar simétrico.

4. Demuestre que para una cadena de Markov irreducible con n estados es posible ir de cualquier estado i a cualquier otro estado j en $n - 1$ pasos o menos.

5. Sean π_0 y π_1 dos distribuciones estacionarias distintas para una cadena de Markov. Demuestre que para $0 \leq \alpha \leq 1$, la función π_α definida por
$$\pi_\alpha(i) = (1-\alpha)\pi_0(i) + \alpha\pi_1(i), \quad i \in \mathcal{S},$$
es una distribución estacionaria y que distintos valores de α producen distintas distribuciones estacionarias.

6. Un jugador dispone de un capital de 2 pesos y necesita incrementarlo a 10. Puede jugar un juego con las siguientes reglas: se lanza una moneda balanceada, si el jugador apuesta correctamente ganará una suma igual a la suma apostada; si no, pierde el dinero apostado. El jugador decide usar la siguiente estrategia: a cada paso decide apostar todo su dinero si tiene 5 pesos o menos; en otro caso sólo apuesta lo necesario para incrementar su capital a 10 pesos, en caso de ganar. Sea $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, el proceso que denota el capital del jugador después de n lanzamientos. (a) Justificar que el proceso es una cadena de Markov, determinar su espacio de estados y su matriz de transición. (b) Pruebe que la probabilidad de que el jugador logre juntar 10 pesos es 1/5. (c) ¿Cuál es el tiempo esperado de la duración del juego? o dicho de otro modo ¿Cuál es el número esperado de lanzamientos necesarios para que el jugador logre alcanzar su objetivo o perder todo su capital? Indicación: se puede usar R, o Matlab en el cálculo de la solución.

7. Sea $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$ un paseo al azar simétrico ($P(\xi_j = 1) = 1/2 = P(\xi = -1)$) que comienza en 0: $S_0 = 0$. Sea $M_n = \max_{0\leq j\leq n} S_j$ y N un entero positivo. Demuestre que
$$P(M_n \geq N) = 2P(S_n \geq N) - P(S_n = N)$$
$$P(M_n = N) = P(S_n = N) + P(S_n = N + 1) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\left[\frac{n-N}{2}\right]}$$

8. Usando el resultado anterior demostrar que

$$P(S_j \neq 0, 1 \leq j \leq n+1) = P(M_n \leq 0) = P(S_n = 0) + P(S_n = 1) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{[n/2]}$$
$$P(S_1 S_2 \cdots S_n \neq 0, S_{n+1} = 0) = P(M_{n-1} \leq 0, S_n > 0)$$

9. Usando el Teorema Central de Límite de DeMoivre-Laplace demuestre que $\lim_{n\to\infty} P(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x) = 2\Phi(x) - 1$ donde $\Phi(x)$ es la función de distribución de una variable normal de media cero y varianza 1.

10. Sea $T_k = \min\{n \geq 1 : S_n = k\}$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} P(\frac{T_n}{n^2} \leq x) = 2(1 - \Phi(1/\sqrt{x})), \quad$ para $x > 0$. Ayuda: Use el resultado del ejercicio anterior.

11. Sea $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i,\ n \geq 1$ un paseo al azar simple con $P(\xi = 1) = p = 1 - P(\xi_i = -1)$, con $p \leq 1/2$. Demuestre que para cualquier entero k
$$P\Big(\cup_{n\geq 1} \{S_n \geq k\}\Big) = \Big[P\Big(\cup_{n\geq 1} \{S_n \geq 1\}\Big)\Big]^k$$
Ayuda: Dado que el paseo llega al nivel 1, considere un nuevo paseo que inicia en ese momento y explore la probabilidad de que el paseo llegue a un nivel que sea una unidad mayor que su nivel de inicio.

12. En las condiciones del ejercicio anterior, halle una ecuación cuadrática para $y = P\big(\cup_{n\geq 1} \{S_n \geq 1\}\big)$ haciendo un análisis de la primera transición. Para $p < 1/2$ demuestre que las raíces de esta ecuación son $p/(1-p)$ y 1. Dé un argumento para desechar la solución 1 y por lo tanto la probabilidad debe valer $p/(1-p)$. Para $p = 1/2$ demuestre que la ecuación tiene una raíz doble que vale 1. Para $p < 1/2$ demuestre que $p/(1-p) = \exp(-r^*)$ donde r^* es la única raíz positiva de $g(s) = 1$, donde $g(s) = \mathrm{E}(e^{s\xi})$.

13. Haga un programa en `R` para simular cadenas de Markov finitas que satisfaga las siguientes condiciones:
    - El programa debe poder simular cadenas con espacio de estados de cualquier tamaño finito.
    - El espacio de estados de la cadena es $\{1, 2, \ldots, n\}$ con $n \in \mathbb{N}$.
    - Las entradas del programa son el número de pasos k que se quiere simular, la distribución inicial π y la matriz de transición P.
    - El programa debe verificar que P es una matriz cuadrada y que su dimensión es compatible con la dimensión de π. Debe dar un mensaje de alerta si esto no se cumple.
    - El valor por defecto de la distribución inicial debe ser la distribución uniforme sobre el espacio de estados.
    - La salida es un vector de dimensión k con los estados sucesivos de la trayectoria simulada.

    Pruebe el programa simulando trayectorias de longitud 100 con distribución inicial uniforme y con las matrices de transición de la pregunta 12 de la lista de problemas 11. Haga 10 simulaciones para cada matriz de transición. Presente sus resultados en forma gráfica, usando una gráfica para los resultados de cada matriz.

14. Considere cadenas de Markov con matrices de transición $P_i, i = 4, 5, 6$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad P_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Demuestre que estas cadenas tienen infinitas distribuciones estacionarias.