Probabilidad

Lista de Problemas 10

Los cuatro primeros problemas son para entregar el martes 30/10/18.

Por favor, entrega por separado los problemas pares y los impares.

Las siguientes matrices de Markov se usan en algunos de los problemas listados a continuación:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$$

1. Una cadena de Markov de tres estados: 0, 1 y 2 tiene matriz de transición P_3 y su distribución inicial es $\pi(0) = P(X_0 = 0) = 0.2$; $\pi(1) = P(X_1 = 1) = 0.4$; $\pi(2) = P(X_0 = 2) = 0.4$. Calcule:

   a) $P(X_3 = 2|X_2 = 0)$, b) $P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2)$ c) $P(X_2 = 1, X_3 = 2|X_1 = 0)$

   d) $P(X_1 = 1)$ e) $P(X_{45} = 0|X_{44} = 1, X(1) = 0)$ f) $P(X_3 = 1|X_1 = 0)$.

2. Suponga que la probabilidad de que llueva hoy es 0.3 si ninguno de los dos días anteriores llovió, pero es 0.6 si al menos en uno de los dos días anteriores llovió. Llamemos T_n al estado del tiempo en el día n, donde T_n vale 1 si llueve y 0 si no. T_n no es una cadena de Markov, pero el estado del tiempo para los últimos dos días $X_n = (T_{n-1}, T_n)$ si lo es, con espacio de estados $E = \{00, 01, 10, 11\}$. Halle la matriz de transición para esta cadena. ¿Cuál es la probabilidad de que llueva el miércoles dado que no llovió ni el domingo ni el lunes?

3. Considere el problema de enviar un mensaje binario, 0 ó 1, a través de un canal que tiene varias etapas. La transmisión en cada etapa está sujeta a una probabilidad de error fija α. Suponga que $X_0 = 0$ es la señal que que se envía y sea X_n la señal que se recibe en la n-ésima etapa. Suponga que (X_n) es una cadena de Markov con probabilidades de transición $P_{00} = P_{11} = 1 - \alpha$ y $P_{01} = P_{10} = \alpha$, con $0 < \alpha < 1$.

   a) Determine la probabilidad de que no haya errores en las dos primeras etapas: $P(X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0)$. b) Determine la probabilidad de que se reciba la señal correcta en la etapa 2 (¡no es la misma que la probabilidad anterior!). c) Determine $P(X_5 = 0|X_0 = 0)$.

4. Cinco bolas blancas y cinco negras se distribuyen en dos cajas de modo que cada caja contenga cinco bolas. En cada paso sacamos una bola de cada caja y las intercambiamos. Sea X_n el número de bolas blancas en la caja de la izquierda en el instante n. Obtenga la matriz de transición para X_n.

5. Una cadena de Markov de tres estados: 1, 2 y 3 tiene distribución inicial $\pi = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ y matriz de transición P_1 Calcule las siguientes probabilidades (a) $P(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 2, X_4 = 1, X_5 = 3|X_0 = 1)$, (b) $P(X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 3, X_4 = 1, X_5 = 2|X_0 = 3)$, (c) $P(X_1 = 2, X_3 = 1, X_4 = 3, X_6 = 2|X_0 = 1)$, (d) $P(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1)$, (e) $P(X_2 = 2, X_5 = 2, X_6 = 2)$.

6. Sea (X_n) una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{1, 2, 3, 4\}$, distribución inicial uniforme en este espacio y matriz de transición P_2 Calcule las siguientes probabilidades (a) $P(X_5 = 3, X_6 = 1, X_7 = 3, X_8 = 3|X_4 = i)$ para todo $i \in E$. (b) $P(X_5 = 3, X_6 = 1, X_7 = 3, X_8 = 3)$.

7. Sea $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias de Bernoulli independientes con probabilidad de éxito p. Para $n \geq 1$ definimos $X_n = Y_n + Y_{n-1}$. ¿Es $(X_n)_{n\geq 1}$ una cadena de Markov?

8. Un modelo simplificado para el desarrollo de una enfermedad es el siguiente: El tamaño de la población es $N = 5$, de los cuales algunos tienen la enfermedad y el resto está sano. Durante cada período de tiempo se seleccionan dos personas al azar de la población y se supone que ellas interactúan. La selección se hace al azar, de modo que cualquier par de personas en la población tiene igual probabilidad de ser escogido. Si una de estas personas está enferma y la otra no, con probabilidad 0.1 la enfermedad se transmite a la persona sana. En otro caso no hay transmisión. Sea X_n el número de personas enfermas en la población al final del período n. ¿Es este proceso una cadena de Markov? Si su respuesta es afirmativa, halle la matriz de transición de la cadena.

9. Una cadena de Markov de tres estados: 0, 1 y 2 tiene matriz de transición P_4. (a) Halle $P(X_2 = 1, X_3 = 1|X_1 = 0)$, $P(X_1 = 1, X_2 = 1|X_0 = 0)$ (b) Si sabemos que $X_0 = 1$, halle $P(X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 2)$. (c) Si la distribución inicial es $\pi(0) = \pi(1) = 0.5, \pi(2) = 0$, halle $P(X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0)$ y $P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0)$.

10. Las variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots$ son independientes y tienen función de probabilidad $P(\xi_i = 0) = 0.1;\ P(\xi_i = 1) = 0.3;\ P(\xi_i = 2) = 0.2;\ P(\xi_i = 3) = 0.4$. Sea $X_0 = 0$ y $X_n = \text{máx}\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ la mayor observación hasta el instante n. Determine la matriz de transición para la cadena de Markov (X_n).

11. Un taxista presta servicio entre el aeropuerto A y dos hoteles B y C, según las siguientes reglas. Si está en el aeropuerto, se dirige a cualquiera de los dos hoteles con igual probabilidad. Si está en un hotel, regresa al aeropuerto con probabilidad 3/4 y va al otro hotel con probabilidad 1/4.

    a) Obtenga la matriz de transición para la cadena.

    b) Suponga que el taxista comienza en el aeropuerto en el instante 0. Halle la probabilidad de que se encuentre en cada una de las tres posibles ubicaciones en el instante 2 y la probabilidad de que esté en el hotel B en el instante 3.

12. Demuestre que la propiedad de Markov no implica que para cualesquiera conjuntos A, B y C,

$$P(X_{n+1} \in C|X_n \in A, X_{n-1} \in B) = P(X_{n+1} \in C|X_n \in A)$$

    (este resultado no es cierto en general si A tiene más de un elemento).

13. Sea X_n una cadena de Markov con dos estados y matriz de transición P_1. Demuestre que $Z_n = (X_{n-1}, X_n)$ es una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. Halle la matriz de transición de esta cadena.

$$P_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix}$$

14. Sea X_n una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{1, 2\}$, distribución inicial $\pi = (1/3, 2/3)$ y matriz de transición P_2. Calcule (a) $P(X_1 = 2, X_4 = 1, X_6 = 1, X_{18} = 1|X_0 = 1)$ (b) $P(X_2 = 1, X_7 = 2, X_5 = 2|X_0 = 1)$; (c)$P(X_2 = 1, X_7 = 2)$.

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

15. Sea X_n el estado de un objeto producido en una fábrica, donde $X_n = 0$ significa que el objeto es bueno y $X_n = 1$ que el objeto es defectuoso. Suponga que X_n evoluciona como una cadena de Markov con matriz de transición P_3 (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el cuarto objeto sea defectuoso dado que el primero también lo es? (b) Si el primer objeto es bueno ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo sea defectuoso y el tercero bueno?

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.12 & 0.88 \end{pmatrix}$$

16. Sea (X_n) una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{1, 2, 3\}$ y matriz de transición P_4. (a) Calcule $P(X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 1, X_4 = 3X_5 = 1, X_6 = 3, X_7 = 2|X_0 = 3)$ (b) Calcule, para todo n, $P(X_{n+2} = 3|X_n = 2)$.

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 3/5 & 2/5 & 0 \end{pmatrix}$$