Probabilidad

Lista de Problemas 10

Los cuatro primeros problemas son para entregar el martes 23/10/18.

Por favor, entrega por separado los problemas pares y los impares.

1. Un submarino tiene tres instrumentos de navegación pero sólo puede permanecer en alta mar si al menos dos de ellos están trabajando. Suponga que los tiempos de vida de los instrumentos son exponenciales con medias 1 año, 1.5 años y 3 años. ¿Cuál es el tiempo promedio que el submarino puede permanecer en alta mar?

2. Los clientes llegan a un banco según un proceso de Poisson con intensidad de 10 por hora. Dado que dos clientes llegaron en los primeros 5 minutos, (a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos hayan llegado en los primeros dos minutos? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno haya llegado en los primeros dos minutos?

3. (Cómo generar variables Poisson.) Sean $U_1, U_2, \dots$ v.a.i. con distribución uniforme en $(0, 1)$.

   (a) Si $X_i = (-\log U_i)/\lambda$, muestre que X_i tiene distribución exponencial de parámetro λ.

   (b) Use el resultado anterior para demostrar que si definimos N como el valor de n que satisface $\prod_{i=1}^{n} U_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{n+1} U_i$, entonces N tiene distribución de Poisson con media λ.

   (c) Presenta un pseudo-código para la implementación de este método en una computadora.

4. El tráfico en una cierta carretera se distribuye de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad 2/3 de vehículo por minuto. 10 % de los vehículos son camiones y el resto son autos. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un camión pase en una hora? (b) Dado que 10 camiones han pasado en una hora, ¿Cuál es el valor esperado del número de vehículos que han pasado? (c) Dado que 50 vehículos han pasado en una hora, ¿Cuál es la probabilidad de que hayan sido exactamente 5 camiones y 45 autos?

5. En una oficina de correo los paquetes llegan según un proceso de Poisson de intensidad λ. Hay un costo de almacenamiento de c pesos por paquete y por unidad de tiempo. Los paquetes se acumulan en el local y se despachan en grupos cada T unidades de tiempo (es decir, se despachan en T, $2T$, $3T, \dots$). Hay un costo por despacho fijo de K pesos (es decir, el costo es independiente del número de paquetes que se despachen). (a) ¿Cuál es el costo promedio por paquete por almacenamiento en el primer ciclo $[0, T]$? (b) ¿Cuál es el costo promedio por paquete por almacenamiento y despacho en el primer ciclo? (c) ¿Cuál es el valor de T que minimiza este costo promedio?

6. Dos correctores de prueba leen un manuscrito de 300 páginas. El primero encuentra 100 errores, el segundo 120 y sus listas contienen 80 errores en común. Suponga que los errores del autor siguen un proceso de Poisson con tasa desconocida λ por página mientras que los correctores de prueba tienen probabilidad de éxito p_1 y p_2 de encontrar los errores. Sea X_0 el número de errores que ninguno encontró. Sean X_1 y X_2 el número de errores que sólo encontró 1 o sólo encontró 2, respectivamente, y sea X_3 el número de errores que ambos encontraron. (a) Encuentre la distribución conjunta de (X_0, X_1, X_2, X_3). (b) Use la respuesta anterior para encontrar estimadores de p_1 y p_2 y luego del número de errores no descubiertos.

7. Con la notación usada en clase, ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas y por qué ?

   a) $N(t) < k$ si y sólo si $\tau_k > t$.

   b) $N(t) \leq k$ si y sólo si $\tau_k \geq t$.

   c) $N(t) > k$ si y sólo si $\tau_k < t$.

8. Una sustancia radioactiva emite partículas α de acuerdo a un proceso de Poisson homogéneo con intensidad de $\lambda = 3$ por segundo.

   a) Si en los primeros cinco segundos se han emitido 12 partículas, ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos de ellas fuesen emitidas en el primer segundo?

   b) Las partículas emitidas son registradas por un contador Geiger con probabilidad 3/4. Si al cabo de 3 segundos el contador ha registrado 6 partículas, ¿Cuál es la probabilidad de que en realidad hayan sido emitidas 9?

   A esta fuente radioactiva se le une otra que emite partículas α con intensidad de $\mu = 5$ por segundo.

c) ¿Cuál es la distribución del tiempo de espera hasta que se emita la primera partícula?

d) ¿Cuál es la distribución del tiempo de espera hasta que el contador registre la primera partícula?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera partícula detectada por el contador provenga de la segunda fuente radioactiva?

9. Considere dos procesos de Poisson independientes $N_1(t)$ y $N_2(t)$ con intensidades λ_1 y λ_2. ¿Cuál es la probabilidad de que el proceso bidimensional $(N_1(t), N_2(t))$ visite el punto (i, j)?

10. Se transmiten señales a través de un canal de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad λ. Cada señal se transmite exitosamente con probabilidad p y se pierde con probabilidad $1-p$ y esto ocurre de manera independiente para cada señal. Para $t \geq 0$ sea $N_1(t)$ el número de señales que se han transmitido con éxito y $N_2(t)$ el número que se han perdido hasta el instante t. (a) Halle la distribución de $(N_1(t), N_2(t))$. (b) ¿Cuál es la distribución de $L =$ número de señales perdidas antes de transmitir una exitosamente?