Probabilidad

Lista de Problemas 1

Los problemas 9 y 22 son para entregar el martes 14/08/18

1. Demuestre que una σ-álgebra es cerrada bajo intersecciones numerables, diferencias y diferencias simétricas ($A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$).

2. Sean $A,\ B$ y C tres eventos. Demuestre las siguientes propiedades:
   a. $P(A \cap B) + P((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) + P(A^c \cap B^c) = 1$. b. $P(A^c \cap B^c) + P(A) + P(A^c \cap B) = 1$.
   c. $P(A^c \cap B^c \cap C^c) + P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C) = 1$. d. $P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A^c \cap B^c) - P(A^c)P(B^c)$.

3. Demuestre que si $A \cap B \cap C = \emptyset$, entonces $P((A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)) = P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A)$.

4. Demuestre que a) $\min\{1, P(A) + P(B)\} \geq P(A \cup B) \geq \max\{P(A), P(B)\}$
   b) $\min\{P(A), P(B)\} \geq P(A \cap B) \geq \max\{0, P(A) + P(B) - 1\}$ c) $P(\cap_1^n A_i) \geq \sum_1^n P(A_i) - (n-1)$.

5. Describa en detalle un espacio muestral para los siguientes experimentos: (a) Tres lanzamientos de un dado. (b) Calificaciones de una clase de 20 estudiantes en un examen. (c) Medición de la temperatura a mediodía en una estación meteorológica. (d) Medición de las velocidades de carros pasando por un punto dado. (e) Una sucesión infinita de lanzamientos de una moneda.

6. Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de eventos en un espacio finito. Demuestre que $\mathcal{F}$ no puede contener exactamente 6 eventos. ¿Qué enteros pueden ser el cardinal de $\mathcal{F}$?

7. Sean: $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{B}$ la familia de conjuntos de Borel y P la probabilidad uniforme en este espacio (medida de Lebesgue). a. Probar que $P(\{\omega\}) = 0$, donde $\{\omega\}$ es el subconjunto de Ω que consta sólo del punto ω. (Verificar previamente que $\{\omega\} \in \mathcal{B}$). b. Sean $Q = \{\omega : \omega \in [0, 1] \text{ es racional}\}$ e $I = \{\omega : \omega \in [0, 1] \text{ es irracional}\}$. Probar que $P(Q) = 0$ y $P(I) = 1$.

8. Sea $\Omega = [0, 1]$. Demuestre las siguientes proposiciones: a) La σ-álgebra de Borel es la σ-álgebra generada por los intervalos cerrados. b) La σ-álgebra de Borel es la σ-álgebra generada por los intervalos abiertos. c) La σ-álgebra de Borel es la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos. d) La σ-álgebra de Borel es la σ-álgebra generada por los conjuntos de la forma $[0, x)$ para $x \in [0, 1]$.

9. Sean Ω un espacio muestral cualquiera y $\mathcal{C} = \{A_i, 1 \leq i \leq n\}$ una partición de Ω, es decir los conjuntos A_i son disjuntos dos a dos y su unión es igual a Ω. Describa explícitamente la σ-álgebra generada por $\mathcal{C}$. ¿Qué tamaño tiene $\sigma(\mathcal{C})$?.

10. Una caja contiene n bolas rojas y n bolas blancas. Se extraen dos bolas al azar. ¿Cuál es el espacio muestral para este experimento? ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas tengan colores distintos. Halle la probabilidad p_n de que las bolas sean del mismo color y evalúe $\lim_{n\to\infty} p_n$.

11. Para comenzar un cierto juego es necesario lanzar un 6 con un dado. a) ¿Cuál es la probabilidad de lanzar el primer 6 en el tercer intento? b) ¿Cuál es la probabilidad de necesitar más de tres intentos? c) ¿Cuántos lanzamientos hacen falta para que la probabilidad de haber lanzado un 6 sea al menos 0.95? d. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer 6 ocurra en un número par de lanzamientos?

12. Se lanzan cuatro dados y se multiplican los números que se obtienen. ¿Cuál es la probabilidad de que este producto sea divisible por 5? ¿Cuál es la probabilidad de que el último dígito en el producto sea 5?

13. Sea $A,\ B$ y C eventos con probabilidad estrictamente positiva. Demuestre las siguientes relaciones:
    a) $P(A^c \cup B^c) = 1 - P(B)P(A|B)$ b) $P(A \cap B|B \cup C) = P(A \cap B|B)P(B|B \cup C)$
    c) $P(B \cap C|A) = P(C|A)P(B|A \cap C)$ si $P(A \cap C) \neq 0$ d) $P(A|B)P(B|C)P(C|A) = P(B|A)P(C|B)P(A|C)$
    e) $\frac{P(A|A\cup B)}{P(B|A\cup B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$

14. Demuestre: $\frac{P(B^c|A)}{P(B)} + \frac{P(A^c)}{P(A)} = \frac{P(A^c|B)}{P(A)} + \frac{P(B^c)}{P(B)}$.

15. Un detector de mentiras muestra una señal positiva (indicando una mentira) 10 % de las veces que el sujeto dice la verdad y 94 % de las veces que miente. Si dos personas son sospechosas de un crimen que se sabe ha cometido uno solo de ellos, y ambos dicen ser inocentes, ¿cuál es la probabilidad de que una señal positiva del detector corresponda al culpable?

16. Tres sucursales de una tienda tienen 8, 12, y 14 empleados de los cuales 4, 7 y 10 son mujeres, respectivamente. a) Se escoge una sucursal al azar y de ella se escoge un empleado. Si éste es una mujer, ¿cuál es la probabilidad de que ella trabaje en la sucursal con 12 empleados? b) Si se escoge un segundo empleado de la misma sucursal, ¿cuál es la probabilidad de que se escoja una mujer?

17. Se extrae una bola de una caja que contiene cuatro blancas y dos negras. Si la bola es blanca se deja fuera de la bolsa, mientras que si es negra se vuelve a colocar dentro. Extraemos luego otra bola. Sea A el evento "la primera bola es blanca" y $B =$ "la segunda bola es blanca". Diga si las siguientes proposiciones son ciertas o falsas: a) $P(A) = 2/3$ b) $P(B) = 3/5$ c) $P(B|A) = 3/5$ d) $P(A|B) = 9/4$ e) Los eventos A y B son disjuntos.

18. Lanzamos una moneda tres veces y consideramos los siguientes eventos: A: el primer lanzamiento es águila, B: el segundo lanzamiento es sol, C: el tercer lanzamiento es águila, D: los tres lanzamientos son iguales, E: hay exactamente un águila en los tres lanzamientos. ¿Cuáles de los siguientes grupos de eventos son independientes?

    (i) A, B (ii) A, D (iii) A, E (iv) D, E. (v) A, B, C (vi) A, B, D (vii) C, D, E.

19. Sean $G = \{1, 2, 3\}$, $H = \{4, 5, 6\}$ Lanzamos dos dados y sean los eventos A : 'el primer dado cae en H, B :'El segundo dado cae en H, C : un dado cae en G y el otro en H, D : el total es cuatro, E : el total es cinco y F : el total es siete. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas?

    a. A y F son independientes.
    b. A y D son independientes.
    c. A y E son independientes.
    d. $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.
    e. A y C son independientes.
    f. C y E son independientes.
    g. $P(A \cap C \cap E) = P(A)P(C)P(E)$.
    h. A, C y E son independientes.

20. a) De un ejemplo de tres eventos A, B y C tales que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ pero $P(A^c \cap B^c \cap C^c) \neq P(A^c)P(B^c)P(C^c)$.

    b) Demuestre que si $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$; $P(A^c \cap B \cap C) = P(A^c)P(B)P(C)$; $P(A \cap B^c \cap C) = P(A)P(B^c)P(C)$ y $P(A \cap B \cap C^c) = P(A)P(B)P(C^c)$ entonces A, B y C son independientes.

21. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad con $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}, \Omega\}$, determine cuáles de las siguientes funciones definidas en Ω son variables aleatorias sobre este espacio de probabilidad:

$$U(\omega) = 5\omega + 32, \qquad V(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } \omega \text{ es impar,} \end{cases} \qquad W(\omega) = \omega^2.$$

22. Sea X una variable aleatoria discreta con valores en el conjunto $\{x_i = 1 - 2^{-i}, i \geq 1\}$, con probabilidades respectivas $p_i = 2^{-i}$. Describa la función de distribución asociada. Calcule la probabilidad de que la variable tome valores en los intervalos $(1/2, 7/8]$ y $(3/4, 1]$.

23. En un grupo grande de objetos una fracción θ son defectuosos. Si el número de extracciones (con reposición) necesarias para obtener el primer objeto defectuoso es una variable aleatoria X con función de probabilidad $P(X = j) = A(0{,}95)^{j-1}$, $\quad j = 1, 2, \ldots$. a) Calcule el valor de A. b) ¿Cuál es la proporción θ de defectuosos? c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario examinar más de 20 objetos antes de obtener el primer defectuoso?

24. Una caja tiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. Seleccionamos dos bolas al azar con reposición de la caja. Sea X el mayor de los dos números, calcule la función de probabilidad de X. Resuelva el problema anterior para el caso de muestreo sin reposición.

25. Extraemos al azar cartas de un juego de barajas con reposición hasta obtener un as y sea X el número de cartas extraídas. Halle $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

26. Lanzamos dos dados, si el lanzamiento es un *doble* (dos caras iguales) los dados se vuelven a lanzar y así hasta que las dos caras que se obtienen sean distintas. Sea X el número de lanzamientos necesarios para que esto ocurra. Halle el valor esperado y la varianza de X. Halle también el valor esperado y la varianza de 2^X

27. Sea X una variable aleatoria con $\mathrm{E}(X) = 2$, $\mathrm{Var}(X) = 1$, $\mathrm{E}(X^4) = 34$. Calcular media y varianza para las siguientes variables aleatorias: $U = 2X + 1$, $V = X^2$, $Z = -X^2 + 2$.

28. Suponga que X, Y tienen igual varianza. Demuestre que $\mathrm{E}((X + Y)(X - Y)) = \mathrm{E}(X + Y)\,\mathrm{E}(X - Y)$. ¿Es cierto que $X + Y$ y $X - Y$ son independientes?

29. Demuestre que $\mathrm{Var}(X + Y) + \mathrm{Var}(X - Y) = 2\,\mathrm{Var}(X) + 2\,\mathrm{Var}(Y)$.