4

Cadenas de Markov

4.1. Introducción

Sea $T \subset \mathbb{R}$ y $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Un *proceso aleatorio* es una función

$$X : T \times \Omega \to \mathbb{R}$$

tal que para cada $t \in T$, $X(t, \cdot)$ es una variable aleatoria.

Si fijamos $\omega \in \Omega$ obtenemos una función $X(\cdot, \omega) : T \to \mathbb{R}$ que se conoce como una *trayectoria* del proceso.

En general interpretamos el parámetro t como el tiempo aunque también se pueden considerar procesos con índices en espacios más generales. En este curso T será un subconjunto de $\mathbb{R}$. Los casos más comunes serán

- T discreto (Procesos a tiempo discreto): $T = \mathbb{N}$, $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, $T = \mathbb{Z}$.
- T continuo (Procesos a tiempo continuo): $T = [0, 1]$, $T = [0, \infty)$, $T = \mathbb{R}$.

En cuanto a los valores del proceso llamaremos $\mathcal{E}$ al *espacio de estados* y consideraremos también dos casos:

- Valores discretos, por ejemplo $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathcal{E} = \mathbb{N}$ o $\mathcal{E} = \mathbb{Z}$
- Valores continuos, por ejemplo $\mathcal{E} = [0, \infty)$, $\mathcal{E} = \mathbb{R}$, etc.

4.2. Definiciones

Hablando informalmente, un proceso de Markov es un proceso aleatorio con la propiedad de que dado el valor actual del proceso X_t, los valores futuros X_s para $s > t$ son independientes de los valores pasados X_u para $u < t$. Es decir, que si tenemos la información del estado presente del proceso, saber cómo llegó al estado actual no afecta las probabilidades de pasar a otro estado en el futuro. En el caso discreto la definición precisa es la siguiente.

Definición 4.1 Una *Cadena de Markov* a tiempo discreto es una sucesión de variables aleatorias X_n, $n \geq 1$ que toman valores en un conjunto finito o numerable $\mathcal{E}$, conocido como espacio de estados, y que satisface la siguiente propiedad

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n) \tag{4.1}$$

para todo n y cualesquiera estados $i_0, i_1, \dots, i_n, j$ en $\mathcal{E}$. La propiedad (4.1) se conoce como la *propiedad de Markov*.

Resulta cómodo designar los estados de la cadena usando los enteros no-negativos $\{0, 1, 2, \dots\}$ y diremos que X_n está en el estado i si $X_n = i$.

La probabilidad de que X_{n+1} esté en el estado j dado que X_n está en el estado i es la *probabilidad de transición* en un paso de i a j y la denotaremos P_{ij}^{nn+1}:

$$P_{ij}^{nn+1} = P(X_{n+1} = j | X_n = i). \tag{4.2}$$

En general, las probabilidades de transición dependen no sólo de los estados sino también del instante en el cual se efectúa la transición. Cuando estas probabilidades son independientes del tiempo (o sea, de n) decimos que la cadena tiene probabilidades de transición *estacionarias* u *homogéneas en el tiempo*. En este caso $P_{ij}^{nn+1} = P_{ij}$ no depende de n y P_{ij} es la probabilidad de que la cadena pase del estado i al estado j en un paso. A continuación sólo consideraremos cadenas con probabilidades de transición estacionarias.

Podemos colocar las probabilidades de transición en una matriz

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & P_{i3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

que será finita o infinita según el tamaño de $\mathcal{E}$. P se conoce como la *matriz de transición* o la *matriz de probabilidades de transición* de la cadena. La i-ésima fila de P para $i = 0, 1, \dots$ es la distribución condicional de X_{n+1} dado que $X_n = i$. Si el número de estados es finito, digamos k entonces P es una matriz cuadrada cuya dimensión es $k \times k$. Es inmediato que

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \geq 0, \quad \text{para } i, j = 0, 1, 2, \dots \tag{4.3}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} P(X_{n+1} = j | X_n = i) = 1, \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots \tag{4.4}$$

de modo que cada fila de la matriz representa una distribución de probabilidad. Una matriz con esta propiedad se llama una *matriz estocástica* o *de Markov*.

Ejemplo 4.1 (Línea telefónica)

Consideremos una línea telefónica que puede tener dos estados, libre (0) u ocupada (1), y para simplificar vamos a considerar su comportamiento en los intervalos de tiempo de la forma $[n, n+1)$. Para cualquiera de estos períodos la probabilidad de que llegue una llamada es $\alpha \in [0, 1]$. Si una nueva llamada llega cuando la línea está ocupada, ésta no se registra, mientras que si la línea esta libre, se toma la llamada y la línea pasa a estar ocupada. La probabilidad de que la línea se desocupe es $\beta \in [0, 1]$. En cada intervalo de tiempo puede llegar una llamada o se puede desocupar la línea, pero no ambas cosas.

Esta situación se puede modelar por una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E} = \{0, 1\}$. Las probabilidades de transición están dadas por

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) &= 1 - \alpha = P_{00} \\ P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) &= \alpha = P_{01} \\ P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) &= 1 - \beta = P_{11} \\ P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) &= \beta = P_{10} \end{aligned}$$

Por lo tanto la matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

Un caso un poco más complicado es el siguiente. Supongamos ahora que si la línea esta ocupada y llega una llamada, ésta se guarda y permanece en espera hasta que la línea se desocupa. Pero si hay una llamada en espera no se registran las siguientes llamadas. En cada período entra a lo sumo una llamada a la cola. Cuando en un período se desocupa la línea, se identifica el fin del período con el momento de colgar, de modo tal que después de haber colgado ya no se registran más llamadas en ese período. Como en el ejemplo anterior $\alpha \in [0,1]$ denota la probabilidad de que llegue una llamada y $\beta \in [0,1]$ la probabilidad de que la línea se desocupe. Suponemos además que en un mismo período no puede ocurrir que el teléfono esté ocupado con llamada en espera, cuelgue, entre la llamada que estaba en espera y entre otra llamada en espera.

Para este caso consideramos un espacio de estados con tres elementos: 0 denota que la línea está libre, 1 cuando la línea está ocupada y no hay llamada en espera y 2 cuando la línea está ocupada y hay una llamada en espera. Para simplificar las expresiones vamos a usar la notación $\alpha' = 1-\alpha,\ \beta' = 1-\beta$. Las probabilidad de transición para $n \in \mathbb{N}$ son

$$\begin{array}{lll} P(X_{n+1}=0|X_n=0)=\alpha', & P(X_{n+1}=1|X_n=0)=\alpha, & P(X_{n+1}=2|X_n=0)=0, \\ P(X_{n+1}=0|X_n=1)=\beta, & P(X_{n+1}=1|X_n=1)=\alpha'\beta', & P(X_{n+1}=2|X_n=1)=\alpha\beta', \\ P(X_{n+1}=0|X_n=2)=0, & P(X_{n+1}=1|X_n=2)=\beta, & P(X_{n+1}=2|X_n=2)=\beta'. \end{array}$$

▲

Ejemplo 4.2 (Paseo al Azar o Caminata Aleatoria)
Sean $\{Y_i, i \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}; P)$ y que toman valores en los enteros $\mathcal{E} = \mathbb{Z}$; denotaremos por p_Y la distribución de Y_i, es decir $p_Y(x) = P(Y_i = x), x \in \mathbb{Z}$. Consideremos la sucesión

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} Y_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Veamos que esta sucesión es una cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{Z}$ y determinemos sus probabilidades de transición.

Es evidente que el espacio de estados del proceso X es $\mathbb{Z}$ ya que la suma de dos enteros es un entero. Para demostrar la propiedad de Markov bastará con probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera $x_0, \dots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n). \tag{4.5}$$

Para ver esto comenzamos por calcular

$$P(X_k = x_k, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0), \qquad x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{Z} \text{ y } k \in \mathbb{N}.$$

Teniendo en cuenta que $X_n = \sum_{i=0}^{n} Y_i,\ n \in \mathbb{N}$ se obtiene que

$$\begin{aligned} P(X_k = x_k, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) &= P(Y_0 = x_0, Y_1 = x_1 - x_0, \dots, Y_k = x_k - x_{k-1}) \\ &= p_Y(x_0)p_Y(x_1 - x_0)\cdots p_Y(x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Usando este cálculo es inmediato que

$$P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = p_Y(x_{n+1} - x_n).$$

Un cálculo similar muestra que

$$P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n) = \frac{P(Y_{n+1} = x_{n+1} - x_n, X_n = x_n)}{P(X_n = x_n)} = p_Y(x_{n+1} - x_n) \tag{4.6}$$

y por lo tanto (4.5) se satisface. Las probabilidades de transición están dadas por la ecuación (4.6). ▲

Una cadena de Markov está completamente determinada si se especifican su matriz de transición y la distribución de probabilidad del estado inicial X_0. Veamos esto: Sea $P(X_0 = x_i) = \pi(x_i)$ para $i \geq 1$. Es suficiente mostrar como se calculan las probabilidades

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \tag{4.7}$$

ya que cualquier probabilidad que involucre a $X_{j_1}, \dots, X_{j_k}$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ se puede obtener usando la Ley de la Probabilidad Total y sumando términos como (4.7). Tenemos

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) =& P(X_n = x_n | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \\ & \times P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}), \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} P(X_n = x_n | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) &= P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &= P_{x_{n-1} x_n} \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) &= P_{x_{n-1} x_n} P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &= P_{x_{n-1} x_n} P_{x_{n-2} x_{n-1}} P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-2} = x_{n-2}) \\ &= P_{x_{n-1} x_n} P_{x_{n-2} x_{n-1}} \cdots P_{x_0 x_1} \pi(x_0). \end{aligned} \tag{4.8}$$

■

Un cálculo similar muestra que (4.1) es equivalente a

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = y_1, \dots, X_{n+m} = y_m | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) \\ = P(X_{n+1} = y_1, \dots, X_{n+m} = y_m | X_n = x_n). \end{aligned}$$

4.2.1. Ejemplos

Ejemplo 4.3
Sea $\xi_i, i \geq 1$ v.a.i.i.d. con valores sobre los enteros positivos: $P(\xi_i = j) = p_j$ para $j \geq 0$. Construiremos varios ejemplos con base en esta sucesión.
a) El primer ejemplo es la sucesión (ξ_i) con ξ_0 fijo. La matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

El hecho de que todas las filas sea idénticas refleja la independencia de las variables.
b) Sea $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n = 1, 2, \dots$ y $S_0 = 0$ por definición. Este proceso es una cadena de Markov:

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = j | S_1 = i_1, \dots, S_n = i_n) &= P(S_n + \xi_{n+1} = j | S_1 = i_1, \dots, S_n = i_n) \\ &= P(i_n + \xi_{n+1} = j | S_1 = i_1, \dots, S_n = i_n) \\ &= P(i_n + \xi_{n+1} = j | S_n = i_n) \\ &= P(S_{n+1} = j | S_n = i_n). \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = j | S_n = i) &= P(S_n + \xi_{n+1} = j | S_n = i) \\ &= P(\xi_{n+1} = j - i | S_n = i) \\ &= \begin{cases} p_{j-i}, & \text{para } j \geq i, \\ 0, & \text{para } j < i, \end{cases} \end{aligned}$$

y la matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

c) Si las variables ξ_i pueden tomar valores positivos y negativos entonces las sumas S_n toman valores en $\mathbb{Z}$ y la matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & p_{-1} & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots \\ \cdots & p_{-2} & p_{-1} & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ \cdots & p_{-3} & p_{-2} & p_{-1} & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

(d) Máximos Sucesivos.

Sea $M_n = \text{máx}\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, para $n = 1, 2, \dots$ con $M_0 = 0$. El proceso M_n es una cadena de Markov y la relación

$$M_{n+1} = \text{máx}\{M_n, \xi_{n+1}\}$$

nos permite obtener la matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} Q_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & Q_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & 0 & Q_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & Q_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

donde $Q_k = p_0 + p_1 + \cdots + p_k$ para $k \geq 0$.

▲

Ejemplo 4.4 (El Paseo al Azar Simple)

Consideremos una sucesión de juegos de azar en los que en cada juego ganamos \$1 con probabilidad p y perdemos \$1 con probabilidad $1 - p = q$. Supongamos que decidimos dejar de jugar si nuestro capital llega a N o si nos arruinamos. El capital inicial es X_0 y X_n es nuestro capital al cabo de n juegos. Sea ξ_i el resultado del i-ésimo juego:

$$\xi_i = \begin{cases} +1, & \text{con probabilidad } p, \\ -1, & \text{con probabilidad } q, \end{cases}$$

entonces

$$X_n = X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$$

y estamos en la situación del ejemplo anterior,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1) \\ &= P(X_n + \xi_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1) \\ &= P(X_n + \xi_{n+1} = j | X_n = i) = P(\xi_{n+1} = j - i | X_n = i) \\ &= P(\xi_{n+1} = j - i) = \begin{cases} p, & \text{si } j = i + 1, \\ q, & \text{si } j = i - 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

La matriz de transición en este caso es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con mayor generalidad podemos pensar que una partícula describe el paseo al azar cuyos estados son un conjunto de enteros finito o infinito, por ejemplo $a, a+1, \dots, b-1, b$. Si la partícula se encuentra en el estado i, en una transición puede quedarse en i o pasar a los estados $i+1$ o $i-1$. Supongamos que las probabilidades de transición son estacionarias y llamémoslas r, p y q, respectivamente, con $r+p+q=1$. Hay dos casos especiales en los extremos de la cadena. Si ponemos $a=0$ y $b=N$ entonces

$$\begin{aligned} P(X_n = 0|X_{n-1} = 0) &= r_0, & P(X_n = N|X_{n-1} = N) &= r_N, \\ P(X_n = 1|X_{n-1} = 0) &= p_0, & P(X_n = N-1|X_{n-1} = N) &= q_N, \\ P(X_n = -1|X_{n-1} = 0) &= 0, & P(X_n = N+1|X_{n-1} = N) &= 0, \end{aligned}$$

y la matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & r & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & r & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & r & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & r & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q_N & r_N \end{pmatrix}$$

El paseo al azar simétrico corresponde al caso $r=0$, $p=q=1/2$ y representa una aproximación discreta de un Movimiento Browniano. Si $p_0=0$, $r_0=1$ decimos que el estado 0 es *absorbente* o que 0 es una *barrera absorbente*. Si en cambio $p_0=1$, $r_0=0$, al llegar al estado 0 la partícula regresa inmediatamente al estado 1. Decimos en este caso que 0 es un *estado reflector* o que es una *barrera reflectora*. Algo similar ocurre para el estado N. Si $0 < p_0, q_0 < 1$ el estado 0 es un *reflector parcial* o una *barrera parcialmente reflectora*. ▲

Ejemplo 4.5 (El Modelo de Ehrenfest)
Este modelo, propuesto inicialmente por Paul y Tatiana Ehrenfest, representa una descripción matemática simplificada del proceso de difusión de gases o líquidos a través de una membrana. El modelo consiste de dos cajas A y B que contienen un total de N bolas. Seleccionamos al azar una de las N bolas y la colocamos en la otra caja. Sea X_n el número de bolas en la caja A después de la n-ésima transición; X_n es una cadena de Markov:

$$P(X_{n+1} = i+1|X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \frac{N-i}{N},$$

ya que para aumentar el número de bolas en A hay que escoger una de las bolas en B. Similarmente,

$$P(X_{n+1} = i-1|X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \frac{i}{N}.$$

Resumiendo, las probabilidades de transición son

$$P_{ii+1} = \frac{N-i}{N}, \qquad P_{ii-1} = \frac{i}{N}.$$

Para el caso $N = 5$, por ejemplo, la matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

▲

Ejemplo 4.6 (Modelo de Inventario)
Una tienda de aparatos electrónicos vende un sistema de juegos de video y opera bajo el siguiente esquema: Si al final del día el número de unidades disponibles es 1 ó 0, se ordenan nuevas unidades para llevar el total a 5. Para simplificar supondremos que la nueva mercancía llega antes de que la tienda abra al día siguiente. Sea X_n el número de unidades disponibles al final del n-ésimo día y supongamos que el número de clientes que quieren comprar un juego en un día es 0, 1, 2, ó 3 con probabilidades $0.3; 0.4; 0.2$ y 0.1 respectivamente. Tenemos entonces la siguiente matrix de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Esta cadena es un ejemplo de una política de control de inventarios (s, S) con $s = 1$ y $S = 5$: cuando el stock disponible cae a s o por debajo de s, se ordena suficiente mercancía para llevar el stock a $S = 5$. Sea D_n la demanda en el n-ésimo día. Tenemos

$$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n - D_{n+1})^+ & \text{si } X_n > s, \\ (S - D_{n+1})^+ & \text{si } X_n \leq s. \end{cases} \tag{4.9}$$

La descripción general de este esquema de inventario es la siguiente: se tiene un inventario de cierto producto con el fin de satisfacer la demanda. Suponemos que el inventario se repone al final de períodos que etiquetamos $n = 0, 1, 2, \dots$ y suponemos que la demanda total durante un período n es una v.a. X_n cuya distribución es independiente del período (es decir, es estacionaria):

$$P(D_n = k) = p_k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

donde $p_k \geq 0$, $\sum_k p_k = 1$.

El nivel del inventario se verifica al final de cada período y la política (s, S) de reposición $(s < S)$ estipula que si el nivel de inventario no está por encima de s, se ordena una cantidad suficiente para llevar el inventario a S. Si, en cambio, el inventario disponible es mayor que s, no se produce una orden. Llamemos X_n al inventario disponible al final del n-ésimo período.

Hay dos situaciones posibles cuando la demanda excede al inventario:

1. La demanda no satisfecha se pierde.

   En este caso el nivel del inventario nunca puede ser negativo y vale la relación (4.9).

2. La demanda no satisfecha en un período se satisface inmediatamente después de renovar el inventario.

   En este caso el nivel del inventario puede ser negativo y satisface

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - D_{n+1} & \text{si } X_n > s, \\ S - D_{n+1} & \text{si } X_n \leq s. \end{cases}$$

La sucesión $(X_n)_{n\geq 1}$ es una cadena de Markov con probabilidades de transición

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} P(D_{n+1} = i - j) & \text{si } s < i < S, \\ P(D_{n+1} = S - j) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

▲

Ejemplo 4.7 (Rachas)
Realizamos una sucesión de juegos en idénticas condiciones con probabilidad de éxito (E) p y de fracaso (F) $q = 1-p$. Decimos que ocurre una racha de longitud k en el juego n si han ocurrido k éxitos sucesivos en el instante n luego de un fracaso en el instante $n-k$

$$\underset{n\text{-}k}{\underline{F}} \quad \underset{n\text{-}k+1}{\underline{E}} \quad \underset{n\text{-}k+2}{\underline{E}} \quad \underset{n\text{-}k+3}{\underline{E}} \quad \cdots \quad \underset{n}{\underline{E}}$$

Para estudiar este proceso como una cadena de Markov definimos los siguientes estados: Si el ensayo resulta en fracaso, el estado es 0. Si resulta en éxito, el estado es el número de éxitos que han ocurrido en sucesión. Por lo tanto, desde cualquier estado i puede haber una transición al estado 0 (si hay un fracaso en el próximo juego) con probabilidad $1-p$, mientras que si hay un éxito la racha continua y la transición es de i a $i+1$. La matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & 0 & p & 0 & \dots \\ q & 0 & 0 & 0 & p & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

▲

Ejemplo 4.8
Sean X_0 una variable aleatoria que toma valores en $\mathcal{E}$, $\{Y_n : \Omega \to S, n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes entre sí y de X_0, con valores en un conjunto S y $F : \mathcal{E} \times S \to \mathcal{E}$. En general, cualquier fenómeno descrito por una relación en recurrencia aleatoria de la forma

$$X_{n+1} = F(X_n, Y_{n+1}), \qquad n \in \mathbb{N},$$

es una cadena de Markov. Verifiquemos la propiedad de Markov

$$P(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) = P(X_{n+1} = y | X_n = x)$$

para $n \in \mathbb{N}$ y $x_0, \dots, x_{n-1}, x, y \in \mathcal{E}$. Para ello observemos que existe una sucesión de funciones deterministas $g_n : \mathcal{E} \times S^n \to \mathcal{E}$, tal que $X_n = g_n(X_0, Y_1, \dots, Y_n)$. En efecto, estas pueden ser definidas por la recurrencia $g_0(x) = x, x \in \mathcal{E}$, y para $x \in \mathcal{E}$ y $z_1, \dots, z_n \in S$

$$g_n(x, z_1, \dots, z_n) = F(g_{n-1}(x, z_1, \dots, z_{n-1}), z_n), \quad n \geq 1.$$

Usando esto se tiene que

$$\begin{aligned}
&P(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) \\
&= \frac{P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x, X_{n+1} = y)}{P(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x)} \\
&= \frac{P(X_0 = x_0, g_1(x_0, Y_1) = x_1, \dots, g_n(x_0, \widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_{n-1}, Y_n) = x, F(x, Y_{n+1}) = y)}{P(X_0 = x_0, g_1(x_0, Y_1) = x_1, \dots, g_n(x_0, \widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_{n-1}, Y_n) = x)} \\
&= \frac{P(X_0 = x_0, g_1(x_0, Y_1) = x_1, \dots, g_n(x_0, \widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_{n-1}, Y_n) = x) P(F(x, Y_{n+1}) = y)}{P(X_0 = x_0, g_1(x_0, Y_1) = x_1, \dots, g_n(x_0, \widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_{n-1}, Y_n) = x)} \\
&= P(F(x, Y_{n+1}) = y),
\end{aligned}$$

donde $\widetilde{x}_i$ representa los valores tales que $F(x_{i-1}, \widetilde{x}_i) = x_{i+1}$. Por otro lado, usando la independencia se tiene que

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = y | X_n = x) &= \frac{P(F(X_n, Y_{n+1}) = y, X_n = x)}{P(X_n = x)} \\ &= \frac{P(F(x, Y_{n+1}) = y, X_n = x)}{P(X_n = x)} \\ &= \frac{P(F(x, Y_{n+1}) = y) P(X_n = x)}{P(X_n = x)} \\ &= P(F(x, Y_{n+1}) = y). \end{aligned}$$

▲

4.3. Matrices de Transición

Una herramienta fundamental en el estudio de las cadenas de Markov lo constituyen las matrices de transición en n pasos: $P^{(n)} = (P_{ij}^{(n)})$, donde $P_{ij}^{(n)}$ denota la probabilidad de que el proceso pase del estado i al estado j en n pasos:

$$P_{ij}^{(n)} = P(X_{m+n} = j | X_m = i).$$

Recordamos que estamos trabajando con procesos cuyas matrices de transición son estacionarias.

Teorema 4.1 (Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov) *Si $P = (P_{ij})$ es la matriz de transición (en un paso) de una cadena de Markov, entonces*

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in \mathcal{E}} P_{ik}^{(r)} P_{kj}^{(s)} \tag{4.10}$$

para cualquier par fijo de enteros no-negativos r y s que satisfagan $r + s = n$, donde definimos

$$P_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Demostración.

Para calcular $P_{ij}^{(n)}$ hacemos una partición según los valores posibles de la cadena en el instante r:

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j | X_0 = i) \\ &= \sum_k P(X_n = j, X_r = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k \frac{P(X_n = j, X_r = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\ &= \sum_k \frac{P(X_n = j, X_r = k, X_0 = i)}{P(X_r = k, X_0 = i)} \frac{P(X_r = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\ &= \sum_k P(X_n = j | X_r = k, X_0 = i) P(X_r = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k P(X_n = j | X_r = k) P(X_r = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k P_{ik}^{(r)} P_{kj}^{(s)}. \end{aligned}$$

■

La relación (4.10) representa la multiplicación de las matrices $P^{(r)}$ y $P^{(s)}$, de modo que $P^{(n)}$ es simplemente la n-ésima potencia de P. Por lo tanto $P_{ij}^{(n)}$ es el elemento ij de la n-ésima potencia de la matriz P.

Si la probabilidad de que el proceso esté inicialmente en j es $\pi(j)$:

$$P(X_0 = j) = \pi(j)$$

entonces la probabilidad de que el proceso esté en el estado k en el instante n es

$$P(X_n = k) = \sum_{j \in \mathcal{E}} \pi(j) P_{jk}^{(n)}.$$

Notación. $P_i(A) = P(A|X_0 = i)$ y $\mathrm{E}_i[\,\cdot\,] = \mathrm{E}[\,\cdot\,|X_0 = i]$.

4.4. Clasificación de los Estados

Definición 4.2 Sea $\mathcal{E}$ el espacio de estados de una cadena de Markov y $A \subset \mathcal{E}$. El *tiempo de llegada* a A se define como

$$T_A = \min\{n \geq 1 : X_n \in A\} \tag{4.11}$$

si $X_n \in A$ para algún n y $T_A = \infty$ si $X_n \notin A$ para todo $n > 0$. Es decir, es el primer instante luego del inicio de la cadena, en el que la cadena visita al conjunto A. Si $A = \{a\}$ para algún $a \in \mathcal{E}$ escribimos T_a.

Una relación importante asociada a los tiempos de llegada es la siguiente:

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} P_i(T_j = m) P_{jj}^{(n-m)}, \qquad n \geq 1. \tag{4.12}$$

Veamos cómo se demuestra esta relación. Descomponemos el evento de interés según el instante de la primera visita al estado j:

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(n)} &= \sum_{m=1}^{n} P_i(X_n = j|T_j = m) P_i(T_j = m) \\
&= \sum_{m=1}^{n} P(X_n = j|X_m = j, X_m \neq j, \dots, X_1 \neq j, X_0 = i) P_i(T_j = m) \\
&= \sum_{m=1}^{n} P(X_n = j|X_m = j) P_i(T_j = m) \\
&= \sum_{m=1}^{n} P_i(T_j = m) P_{jj}^{(n-m)}.
\end{aligned}$$

Observamos que

$$P_i(T_j = 1) = P_i(X_1 = j) = P_{ij}$$

y además

$$P_i(T_j = 2) = \sum_{k \neq j} P_i(X_1 = k, X_2 = j) = \sum_{k \neq j} P_{ik} P_{kj}.$$

Para valores mayores de n tenemos

$$P_i(T_j = n+1) = \sum_{k \neq j} P_{ik} P_k(T_j = n), \qquad n \geq 1. \tag{4.13}$$

Definición 4.3 Definimos

$$\rho_{ij} = P_i(T_j < \infty) = P(T_j < \infty | X_0 = i), \tag{4.14}$$

la probabilidad de que una cadena que comienza en i visite el estado j. En particular, ρ_{jj} es la probabilidad de que una cadena que comienza en j, regrese a j.

Observamos que

$$\rho_{ij} = P_i(T_j < \infty) = \sum_{m=1}^{\infty} P_i(T_j = m). \tag{4.15}$$

Definición 4.4 Decimos que un estado j es *recurrente* si $\rho_{jj} = 1$ y *transitorio* si $\rho_{jj} < 1$.

Si j es recurrente y la cadena comienza en j, entonces regresa a j con probabilidad 1. Si, en cambio, j es transitorio, hay una probabilidad positiva e igual a $1 - \rho_{jj}$ de que si la cadena comienza en j, nunca regrese a ese estado. Si j es un estado absorbente, $P_j(T_j = 1) = 1$ y por lo tanto $\rho_{jj} = 1$, de modo que un estado absorbente es necesariamente recurrente.

Ejemplo 4.9 (Paseo al Azar con N=4)
La matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los estados 0 y 4 son absorbentes, y por lo tanto son recurrentes. Veamos que los otros estados, 1, 2 y 3, son transitorios.

Si estamos en 1 y la cadena pasa a 0, nunca regresará a 1, de modo que la probabilidad de nunca regresar a 1 es

$$P_1(T_1 = \infty) = P(T_1 = \infty | X_0 = 1) \geq P_{10} = q > 0.$$

De manera similar, comenzando en 2, la cadena puede ir a 1 y luego a 0, de modo que

$$P_2(T_2 = \infty) = P(T_2 = \infty | X_0 = 2) \geq P_{21}P_{10} = q^2 > 0.$$

Finalmente, si comenzamos en 3 observamos que la cadena puede ir inmediatamente a 4 y no regresar nunca con probabilidad 0.4:

$$P_3(T_3 = \infty) = P(T_3 = \infty | X_0 = 3) \geq P_{34} = p > 0.$$

▲

4.5. Descomposición del Espacio de Estados

Decimos que desde el estado i *se llega* o *se accede* al estado j si $P_{ij}^{(n)} > 0$ para algún $n \geq 0$. Es fácil ver que esto es cierto para $i \neq j$ si y solo si $\rho_{ij} > 0$. Por lo tanto desde i se accede a j si hay una probabilidad positiva de que en un número finito de pasos, se pueda llegar al estado j partiendo del estado i. Notación: $i \to j$.

Si $i \to j$ y $j \to i$ decimos que los estados *se comunican* y escribimos $i \leftrightarrow j$. Si dos estados no se comunican, o bien $P_{ij}^{(n)} = 0$, $\forall n \geq 0$, o bien $P_{ji}^{(n)} = 0$, $\forall n \geq 0$, o ambos. La comunicación es una relación de equivalencia:

a) $i \leftrightarrow i : P_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$.

b) $i \leftrightarrow j \Leftrightarrow j \leftrightarrow i$

c) Si $i \leftrightarrow j$ y $j \leftrightarrow k$ entonces $i \leftrightarrow k$:

$$i \leftrightarrow j \Rightarrow \exists\, n \text{ tal que } P_{ij}^{(n)} > 0, \qquad j \leftrightarrow k \Rightarrow \exists\, m \text{ tal que } P_{jk}^{(m)} > 0,$$

y usando ahora las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

$$P_{ik}^{(n+m)} = \sum_r P_{ir}^{(n)} P_{rk}^{(m)} \geq P_{ij}^{(n)} P_{jk}^{(m)} > 0.$$

Un argumento similar muestra que existe s tal que $P_{ki}^{(s)} > 0$.

Esta relación de equivalencia divide el espacio de estados $\mathcal{E}$ en clases de equivalencia que también llamaremos *clases de comunicación*. Los estados de una clase de equivalencia son aquellos que se comunican entre sí.

Puede ocurrir que partiendo de una clase de equivalencia, la cadena entre en otra. Si esto ocurre, claramente la cadena no puede regresar a la clase inicial, pues si lo hiciera las dos clases se comunicarían y formarían una sola clase.

Definición 4.5 Decimos que la cadena es *irreducible* si hay una sola clase de equivalencia, es decir, si todos los estados se comunican entre sí.

El siguiente resultado, que presentamos sin demostración, es clave para la clasificación de los estados de una cadena de Markov.

Teorema 4.2 *(a) Si $i \to j$ pero $j \nrightarrow i$ entonces i es transitorio.*
(b) Si i es recurrente e $i \to j$ entonces j es recurrente y $\rho_{ij} = \rho_{ji} = 1$.

Corolario 4.1 *Sea C una clase de comunicación. Entonces todos los elementos de C son recurrentes o todos son transitorios.*

Ejemplo 4.10
Consideremos una cadena de Markov con $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y la siguiente matriz de transición

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las transiciones posibles entre estados diferentes se presentan en la figura 2.1. Una gráfica de este tipo se conoce como la gráfica de transiciones de la cadena.

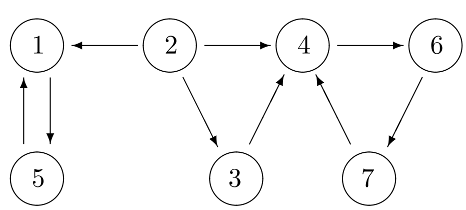

Figura 2.1

Observamos que $2 \to 4$ pero $4 \nrightarrow 2$ y algo similar ocurre con 3, de modo que 2 y 3 son estados transitorios. Sin embargo, estos dos estados no se comunican y por lo tanto forman dos clases de equivalencia disjuntas, $\{2\}$ y $\{3\}$. El resto de los estados se separan en dos clases de equivalencia, $\{1, 5\}$ y $\{4, 6, 7\}$. Veremos luego que ambas son recurrentes. ▲

Es posible demostrar que una cadena de Markov con espacio de estados finito debe tener al menos un estado recurrente.

Definición 4.6 Un conjunto no vacío $C \subset \mathcal{E}$ es *cerrado* si no se puede salir de él, es decir, desde ningún estado de C se tiene acceso a estados que estén fuera de C. Esto quiere decir que

$$\rho_{ij} = 0 \qquad \text{si } i \in C,\ j \notin C.$$

Equivalentemente, C es cerrado sí y sólo sí

$$P_{ij}^{(n)} = 0, \qquad i \in C,\ j \notin C \text{ y } n \geq 1.$$

Si C es cerrado y la cadena comienza en C entonces, con probabilidad 1 se queda en C todo el tiempo. Si a es un estado absorbente entonces $\{a\}$ es cerrado.

Definición 4.7 Un conjunto cerrado es *irreducible* si todos sus estados se comunican.

Ejemplo 4.11
En el ejemplo 4.10 los conjuntos $\{1, 5\}$, $\{1, 4, 5, 6, 7\}$ y $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ son cerrados, pero sólo el primero es irreducible.

De los resultados anteriores vemos que si C es cerrado e irreducible entonces todos los estados de C son recurrentes o todos son transitorios.

Una cadena de Markov irreducible es una cadena en la cual cada estado se comunica consigo mismo y con cualquier otro estado. En una cadena de este tipo o bien todos los estados son recurrentes o bien todos son transitorios.

Mencionamos anteriormente que si $\mathcal{E}$ es finito, tiene al menos un estado recurrente. De manera similar, cualquier conjunto cerrado finito C tiene al menos un estado recurrente. Por lo tanto, todos los estados de C lo son:

Teorema 4.3 *Sea C un conjunto finito, irreducible y cerrado. Entonces todos los estados de C son recurrentes.*

Consideremos una cadena de Markov con espacio de estados finito. Por el teorema 4.3 si la cadena es irreducible entonces debe ser recurrente. Si la cadena no es irreducible, podemos usar el teorema 4.2 para determinar cuáles estados son recurrentes y cuáles transitorios.

Ejemplo 4.12
Determine cuáles estados son recurrentes y cuáles transitorios para la cadena de Markov con la siguiente matriz de transición.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

La siguiente gráfica presenta las transiciones posibles (en un paso) entre estados diferentes para esta cadena

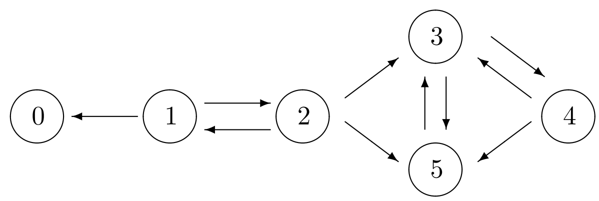

Figura 2.2

Vemos que hay tres clases de equivalencia $\{0\}$; $\{1,2\}$ y $\{3,4,5\}$. La primera clase es recurrente porque 0 es un estado absorbente. La clase $\{1,2\}$ es transitoria porque es posible salir de ella y no regresar nunca, por ejemplo, pasando de 1 a 0. Finalmente, la tercera clase es recurrente porque es finita, cerrada e irreducible. ▲

Llamemos $\mathcal{E}_T$ a la colección de los estados transitorios de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}_R$ a la colección de estados recurrentes. En el ejemplo anterior $\mathcal{E}_T = \{1,2\}$ y $\mathcal{E}_R = \{0,3,4,5\}$. Esta última clase puede descomponerse en dos conjuntos cerrados irreducibles, $C_1 = \{0\}$ y $C_2 = \{3,4,5\}$.

4.6. Paseo al Azar

Consideramos de nuevo la situación del ejemplo 4.4. Tenemos una sucesión $\xi_i,\ i \geq 1$ de v.a.i.i.d. que toman valor 1 con probabilidad p y valor -1 con probabilidad $q = 1-p$ y ponemos $S_n = S_0 + \sum_1^n \xi_i$. S_n es un paseo al azar simple. Vamos a estudiar en esta sección algunas propiedades importantes de este proceso.

Lema 4.1 *Un paseo al azar simple tiene las siguientes propiedades*

- *Propiedad de Markov*

$$P(S_{n+m} = j | S_0, S_1, \dots, S_n) = P(S_{n+m} = j | S_n).$$

- *Homogeneidad espacial*

$$P(S_n = j | S_0 = i) = P(S_n = j + k | S_0 = i + k).$$

- *Homogeneidad Temporal*

$$P(S_n = j | S_0 = i) = P(S_{n+m} = j | S_m = i).$$

Demostración. La propiedad de Markov ya fue demostrada.

- Homogeneidad espacial.

Se tiene que el lado izquierdo es igual a $P\left(\sum_{i=1}^n \xi_i = j - i\right)$ mientras que el lado derecho es igual a $P\left(\sum_{i=1}^n \xi_i = j + b - (i+b)\right)$.

- Homogeneidad temporal.

Es una consecuencia fácil de la independencia y del hecho que las v. a. ξ_i son idénticamente distribuidas que el lado derecho es igual a:

$$\frac{P\Big(S_0 + \sum_{i=1}^{n+m} \xi_i = j, S_0 + \sum_{i=1}^{m} \xi_i = i\Big)}{P\left(S_0 + \sum_{i=1}^{m} \xi_i = i\right)} = P\Big(\sum_{i=m+1}^{m+n} \xi_i = j - i\Big) = P\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i = j - i\Big);$$

un cálculo elemental prueba que el lado izquierdo es idéntico a esta cantidad. ■

Proposición 4.1 *Se tiene que para a, b enteros, $n \geq 0$ y $|b-a| \leq n$*

$$P(S_n = b | S_0 = a) = \begin{cases} \binom{n}{(n+b-a)/2} p^{(n+b-a)/2} q^{(n-b+a)/2} & \text{si } (n+b-a)/2 \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Se tiene que una trayectoria que lleva del punto $(0, a)$ al punto (n, b) tiene r pasos para arriba $(+1)$ y l pasos hacia abajo (-1). Estos son tales que $r + l = n$ y $r - l = b - a$ (pues $S_n - S_0 = r(+1) + l(-1) = b - a$). Estas ecuaciones determinan a l y r, lo que implica que $r = (n+b-a)/2$ y $l = (n-b+a)/2$. Cada trayectoria que lleva de a a b en n pasos tiene probabilidad $p^r q^l$, y hay $\binom{n}{(n+b-a)/2}$ trayectorias posibles. El resultado sigue. ∎

Ahora vamos a considerar el problema de la ruina de un jugador que apuesta 1 peso en cada juego y tiene probabilidad p de ganar y $q = 1 - p$ de perder. Definamos

$$H_j = \min\{n \geq 0 : X_n = j\}, \qquad h(i) = P_i(H_N < H_0).$$

La diferencia entre H_j y T_j, que definimos anteriormente, está en que H incluye el estado inicial; $h(i)$ es la probabilidad de que el jugador con capital inicial i alcance una fortuna N antes de arruinarse.

Proposición 4.2 *Sea $h(i)$ la probabilidad de que un paseo al azar que parte del estado i llegue al nivel N antes que al nivel 0. Entonces*

$$h(i) = \begin{cases} \frac{\theta^i - 1}{\theta^N - 1} & \text{si } p \neq q \\ \frac{i}{N} & \text{si } p = q = 0.5, \end{cases}$$

donde $\theta = q/p$.

Demostración. Por la definición de H_i tenemos $h(0) = 0$ y $h(N) = 1$. Para calcular $h(i)$ para $1 \leq i < N$ estudiamos la primera transición y obtenemos

$$h(i) = ph(i+1) + (1-p)h(i-1),$$

y rearreglando

$$p(h(i+1) - h(i)) = (1-p)(h(i) - h(i-1));$$

concluimos que

$$h(i+1) - h(i) = \frac{1-p}{p}(h(i) - h(i-1)). \tag{4.16}$$

Si $p = 1/2$ obtenemos

$$h(i+1) - h(i) = h(i) - h(i-1) = C \quad \text{para } 1 \leq i < N.$$

Entonces

$$1 = h(N) - h(0) = \sum_{i=1}^{N}(h(i) - h(i-1)) = NC$$

de modo que $C = 1/N$. Usando esto y el hecho de que $h(0) = 0$, tenemos

$$h(i) = h(i) - h(0) = \sum_{j=1}^{i}(h(j) - h(j-1)) = \frac{i}{N},$$

es decir, si $p = 1/2$,

$$P_i(H_N < H_0) = \frac{i}{N} \quad \text{para } 0 \leq i \leq N.$$

Como consecuencia la probabilidad de ruina es

$$P_i(H_0 < H_N) = 1 - \frac{i}{N} = \frac{N-i}{N}.$$

Si $p \neq 1/2$ los detalles son un poco más difíciles. Poniendo $C = h(1) - h(0)$, (4.16) implica que para $i \geq 1$,

$$h(i) - h(i-1) = C\Big(\frac{1-p}{p}\Big)^{i-1} = C\theta^{i-1},$$

con $\theta = q/p$. Sumando de $i = 1$ a N obtenemos

$$1 = h(N) - h(0) = \sum_{i=1}^{N} \big(h(i) - h(i-1)\big) = C\sum_{i=1}^{N} \theta^{i-1}$$

Recordemos que si $\theta \neq 1$,

$$\sum_{j=0}^{N-1} \theta^j = \frac{1-\theta^N}{1-\theta},$$

y vemos que

$$C = \frac{1-\theta}{1-\theta^N}.$$

Usando de nuevo que $h(0) = 0$ y sumando

$$h(j) = h(j) - h(0) = C\sum_{i=1}^{j} \theta^{i-1} = C\frac{1-\theta^j}{1-\theta} = \frac{1-\theta^j}{1-\theta^N}$$

Recordando la definición de $h(i)$ obtenemos que cuando $p \neq 1/2$,

$$P_i(H_N < H_0) = \frac{\theta^i - 1}{\theta^N - 1}, \qquad P_i(H_0 < H_N) = \frac{\theta^N - \theta^i}{\theta^N - 1}$$

con $\theta = \frac{1-p}{p}$. ■

Ejemplo 4.13
En la siguiente tabla presentamos algunos valores de la probabilidad de ruina en diferentes circunstancias. p es la probabilidad de éxito en cada juego, i es el capital inicial, N el objetivo y P_R la probabilidad de ruina. Las probabilidades 0.4865 y 0.4737 representan la probabilidad de ganar en ruleta cuando se apuesta al color o a par-impar. En el primer caso la ruleta sólo tiene un 0 (ruleta europea) mientras que en el segundo tiene 0 y 00 (ruleta americana). La probabilidad 0.493 corresponde al juego de dados (craps).

$p = 0.474$		
i	N	P_R
1	10	0.94
10	100	0.99995
100	1000	1
5	10	0.63
50	100	0.995
500	1000	1
9	10	0.153
90	100	0.647
900	1000	0.99997

$p = 0.486$		
i	N	P_R
1	10	0.92
10	100	0.997
100	1000	1
5	10	0.569
50	100	0.942
500	1000	1
9	10	0.127
90	100	0.43
900	1000	0.996

$p = 0.493$		
i	N	P_R
1	10	0.91
10	100	0.98
100	1000	1
5	10	0.535
50	100	0.8
500	1000	0.9999992
9	10	0.113
90	100	0.26
900	1000	0.939

▲

Corolario 4.2 *Se tiene que para todo* $i \in \mathbb{N}$

$$P(H_0 < \infty | S_0 = i) = \begin{cases} 1 & si\ q \geq p \\ \left(\frac{q}{p}\right)^i, & si\ q < p. \end{cases}$$

Demostración. Para $n \geq 1$ sea A_n el evento $A_n = \{H_0 < H_n\}$. Observemos que si $n > i$, $A_n \subseteq A_{n+1}$ puesto que $H_n \leq H_{n+1}$, para todo n. Es decir que la sucesión A_n es una sucesión creciente de eventos y además

$$\{H_0 < \infty\} = \cup_{n \geq 1} \{H_0 < H_n\},$$

y por la continuidad por debajo de la probabilidad se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n | S_0 = i) = P(H_0 < \infty | S_0 = i).$$

■

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $N_n(a,b)$ al número de trayectorias que van de a a b en n pasos, por $N_n^0(a,b)$ a aquellas que van de a a b en n pasos pasando por 0 al menos una vez y por $N_n^{\neq 0}(a,b)$ a aquellas que van de a a b en n pasos sin pasar por 0 (excepto posiblemente en los extremos, si a o b valen 0). Un resultado fundamental sobre el paseo al azar simple es el principio de reflexión.

Teorema 4.4 (Principio de Reflexión) *Para* $a, b > 0$ *se tiene que*

$$N_n^0(a,b) = N_n(-a,b).$$

Demostración. En la figura 2.3 vemos que cada trayectoria que lleva de $(0,-a)$ a (n,b) cruza el eje x al menos una vez; denotemos por $(k,0)$ el punto en el cual esto ocurre por primera vez. Reflejando el segmento de la trayectoria anterior a $(k,0)$ respecto al eje x se obtiene una trayectoria lleva de $(0,a)$ a (b,n) y que toca al eje x al menos una vez.

Podemos hacer algo similar para las trayectorias que inician en $(0,a)$ y pasan por 0, y obtenemos una trayectoria de $(0,-a)$ a (n,b). ■

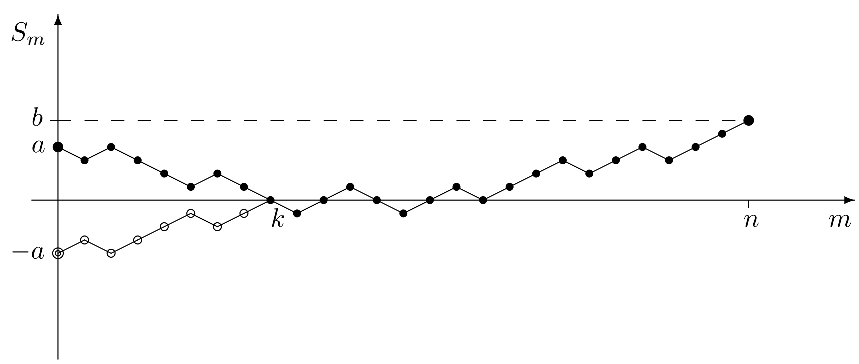

Figura 2.3

Lema 4.2 *Para todo* $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ *con* $|a - b| \leq n$, *se tiene que*

$$N_n(a,b) = \binom{n}{(n+b-a)/2}$$

siempre que $(n+b-a)/2 \in \mathbb{Z}$.

Demostración. La prueba de este resultado es similar a la prueba de la proposición 4.1. ■

Como consecuencia importante del lema anterior y el principio de reflexión tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.5 (Teorema del Escrutinio (Ballot Theorem)) *Si $b > 0$, entonces el número de trayectorias $N_n^{\neq 0}(0, b)$ que llevan de $(0, 0)$ a (n, b) y que no visitan el eje x después del primer paso es*

$$N_n^{\neq 0}(0, b) = \frac{b}{n} N_n(0, b).$$

Demostración. Observemos que el primer paso de dichas trayectorias lleva a $(1, 1)$, por lo tanto el número que queremos calcular está dado por

$$\begin{aligned}
N_{n-1}(1, b) - N_{n-1}^0(1, b) &= N_{n-1}(1, b) - N_{n-1}(-1, b) \\
&= \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-b}{2}\right)!\left(\frac{n+b-2}{2}\right)!} - \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-b-2}{2}\right)!\left(\frac{n+b}{2}\right)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-b}{2}\right)!\left(\frac{n+b}{2}\right)!}\left(\frac{n+b}{2} - \frac{n-b}{2}\right) \\
&= \frac{b}{n} N_n(0, b).
\end{aligned}$$

■

¿Por qué se llama este resultado el teorema del escrutinio? Supongamos que en una elección tenemos dos candidatos A y B, A obtiene α votos, B obtiene β votos y $\alpha > \beta$. ¿Cuál es la probabilidad de que A lleve la ventaja durante todo el escrutinio? Supongamos que $\xi_i = 1$ si el i-ésimo individuo vota por A y $\xi_i = -1$ si vota por B. Supongamos que cualquier combinación de votos es igualmente probable, es decir que cada una tiene probabilidad $1/\binom{\alpha+\beta}{\alpha}$. La trayectoria que deben seguir los escrutinios para que A tenga la mayoría durante toda la jornada de escrutinio va del punto $(0, 0)$ al punto $(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$ y no regresa al origen. Por lo tanto la probabilidad buscada está dada por

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} N_{\alpha+\beta}(0, \alpha - \beta) \frac{1}{\binom{\alpha+\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}.$$

4.6.1. Ley del Arcoseno

Vamos a considerar ahora el paseo del azar simétrico ($p = q = 1/2$) que inicia en 0. Comenzamos por recordar algunos resultados e introducir notación, tomada principalmente del libro de W. Feller. Recordemos que como los pasos son unitarios, si el proceso parte de 0 solo puede regresar a 0 en un número par de pasos.

$$P_0(S_n = r) = \binom{n}{\frac{n+r}{2}} 2^{-n}$$

debe entenderse que esta probabilidad es 0 si n y r no tienen igual paridad,

$$\begin{aligned}
u_{2n} &= P_0(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} 2^{-2n} \\
f_{2n} &= P_0(S_1 S_2 \cdots S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0).
\end{aligned}$$

u_{2n} es la probabilidad de que haya un retorno al origen en el instante $2n$ mientras que f_{2n} es la probabilidad de que el primer retorno al origen ocurra en el instante $2n$.

Recordemos la relación (4.12), que liga las probabilidades de transición en n pasos para una cadena de Markov con los tiempos de llegada T_j:

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} P_i(T_j = k) P_{jj}^{(n-k)}.$$

Consideremos el caso particular de un paseo al azar con $i = j = 0$ y $2n$ pasos, obtenemos

$$P_{00}^{(2n)} = \sum_{k=1}^{n} P_0(T_0 = 2k) P_{00}^{(2n-2k)}$$

que en términos de la notación que acabamos de introducir es

$$u_{2n} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k} u_{2n-2k}. \tag{4.17}$$

Lema 4.3 *La probabilidad de que no ocurra ningún retorno al origen hasta el instante* $2n$ *es igual a la probabilidad de que ocurra un retorno al origen en el instante* $2n$*:*

$$P(S_1 S_2 \cdots S_{2n} \neq 0) = P(S_{2n} = 0) = u_{2n} \tag{4.18}$$

En consecuencia, por simetría

$$P(S_1 > 0, \dots, S_{2n} > 0) = \frac{1}{2} u_{2n} \tag{4.19}$$

Adicionalmente

$$P(S_1 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0) = u_{2n}. \tag{4.20}$$

Demostración. Probaremos inicialmente (4.19). Observamos que $\{S_{2n} > 0\} = \cup_{k=1}^{n} \{S_{2n} = 2k\}$ y por lo tanto

$$P(S_1 > 0, \dots S_{2n} > 0) = \sum_{k=1}^{n} P(S_1 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2k) \tag{4.21}$$

Ahora bien, cualquier trayectoria que parte de 0 y permanece en el lado (estrictamente) positivo necesariamente tiene que tener una primera transición al estado 1, es decir, $S_1 = 1$. Por lo tanto, el número de trayectorias que parten de 0, permanecen en el lado (estrictamente) positivo y están en el estado $2k$ en el instante $2n$ es igual al número de trayectorias que van del estado 1 al estado $2k$ en $2n-1$ pasos y nunca tocan el origen, es decir $N_{2n-1}^{\neq 0}(1, 2k)$. Este número es

$$N_{2n-1}^{\neq 0}(1, 2k) = N_{2n-1}(1, 2k) - N_{2n-1}^{0}(1, 2k)$$

Por el principio de reflexión, el número de trayectorias que van del estado 1 al estado $2k$ en $2n-1$ pasos tocando el 0 es igual al número de trayectorias que van del estado -1 al estado $2k$ en $2n-1$ pasos: $N_{2n-1}^{0}(1, 2k) = N_{2n-1}(-1, 2k)$. Regresando a (4.21) tenemos

$$\begin{aligned} P(S_1 > 0, \dots S_{2n} > 0) &= \sum_{k=1}^{n} N_{2n-1}^{\neq 0}(1, 2k) 2^{-2n} \\ &= 2^{-2n} \sum_{k=1}^{n} \Big(N_{2n-1}(1, 2k) - N_{2n-1}(-1, 2k) \Big) \\ &= 2^{-2n} \sum_{k=1}^{n} \Big(N_{2n-1}(0, 2k-1) - N_{2n-1}(0, 2k+1) \Big) \end{aligned}$$

y esta es una suma telescópica que resulta en

$$
\begin{aligned}
&= 2^{-2n}\Big(N_{2n-1}(0,1) - N_{2n-1}(0,2n+1)\Big)\\
&= 2^{-2n}N_{2n-1}(0,1) \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

porque no es posible ir de 0 a $2n+1$ en $2n-1$ pasos. Observamos que

$$P(S_{2n-1}=1) = 2^{2n-1}N_{2n-1}(0,1)$$

y en consecuencia $P(S_1>0,\dots S_{2n}>0) = (1/2)P(S_{2n-1}=1)$. Para concluir la demostración de (4.19) falta ver que $P(S_{2n-1}=1)=u_{2n}$. Observamos que para estar en 0 al cabo de $2n$ pasos, en el instante $2n-1$ debemos estar en 1 ó -1. Usando de nuevo la simetría del paseo, $P(S_{2n-1}=1)=P(S_{2n-1}=-1)$ y en consecuencia

$$u_{2n} = \frac{1}{2}P(S_{2n-1}=1) + \frac{1}{2}P(S_{2n-1}=-1) = P(S_{2n-1}=1).$$

Finalmente observamos que una trayectoria que es estrictamente positiva a partir del primer paso debe tener una primera transición al punto $(1,1)$ y luego permanecer sin cruzar la recta horizontal que pasa por 1, que podemos considerar como un nuevo eje x trasladado al puntos $(1,1)$ y pensar que la trayectoria inicia de nuevo en el instante 1. La probabilidad de ir a $(1,1)$ es $1/2$ y luego la probabilidad de permanecer por encima de la recta horizontal es la probabilidad de que un paseo que inicia en $(1,1)$ no cruce el nuevo eje x, que es $P(S_1\ge 0,\dots S_{2n-1}\ge 0)$. Pero como $2n-1$ es impar, si $S_{2n-1}\ge 0$ entonces también $S_{2n}\ge 0$. Resumiendo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}u_{2n} &= P(S_1>0,\dots,S_{2n}>0)\\
&= \frac{1}{2}P(S_1\ge 0,\dots,S_{2n-1}\ge 0)\\
&= \frac{1}{2}P(S_1\ge 0,\dots,S_{2n}\ge 0)
\end{aligned}
$$

■

Lema 4.4

$$f_{2n} = P_0(S_1S_2\cdots S_{2n-1}\neq 0, S_{2n}=0) = \frac{1}{2n}u_{2n-2}.$$

Demostración. Queremos hallar $N^{\neq 0}_{2n}(0,0)$. Teniendo en cuenta que si partimos de 0 el primer paso nos lleva a 1 o a -1 y usando la simetría obtenemos

$$
\begin{aligned}
N^{\neq 0}_{2n}(0,0) &= N^{\neq 0}_{2n-1}(1,0) + N^{\neq 0}_{2n-1}(-1,0)\\
&= 2N^{\neq 0}_{2n-1}(1,0)\\
&= 2N^{\neq 0}_{2n-2}(1,1). \qquad (4.23)
\end{aligned}
$$

La última relación se debe a que si el primer paso es positivo y regresamos a 0 por primera vez en el paso $2n$, necesariamente en el instante $2n-1$ debemos estar en el estado 1. Ahora bien, por el principio de reflexión, $N^0_{2n-2}(1,1) = N_{2n-2}(-1,1)$. Regresando a (4.23) y usando el lema 4.2

$$
\begin{aligned}
N^{\neq 0}_{2n-2}(1,1) &= N_{2n-2}(1,1) - N^0_{2n-2}(1,1)\\
&= N_{2n-2}(1,1) - N_{2n-2}(-1,1)\\
&= \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}\\
&= \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.
\end{aligned}
$$

Resumiendo
$$N_{2n}^{\neq 0}(0,0) = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$
Esto nos da el número de trayectorias. Como cada trayectoria tiene probabilidad 2^{-2n}, al multiplicar la expresión anterior se obtiene el resultado. ■

Queremos ahora investigar el siguiente problema: Consideremos un juego de azar en el cual ambos jugadores tienen igual probabilidad de ganar o de perder, y en cada juego se gana o pierde una unidad. Observamos el comportamiento desde la óptica de uno de ellos, que llamaremos A. Al comienzo del juego la ganancia de A es 0 y a medida que aumentan los juegos, por la ley de grandes números la fracción de juegos favorables a él tiende a $1/2$. De igual manera su fortuna total fluctúa y puede cambiar de signo. La pregunta que nos hacemos es la siguiente: ¿Cuándo aumenta el número de juegos, cuál es la fracción del tiempo durante la cual la fortuna de A ha sido positiva?

Una intuición común es que si la fracción de juegos favorables se acerca a $1/2$, ambos jugadores deben compartir la delantera frecuentemente, es decir, deben ir ganando aproximadamente la mitad del tiempo. Si pensamos en términos de los momentos en los cuales hay un empate, entre dos empates sucesivos, por simetría, es igualmente probable que cualquiera de los dos jugadores tenga la ventaja y como a medida que hay más juegos habrá más empates, esto parece indicar que la fracción de tiempo en la que las ganancias de A son positivas debe acercarse a $1/2$.

La ley del arcoseno, que consideramos a continuación, muestra que esta intuición es falsa: Es más probable que la fracción del tiempo que A lleva la delantera esté cerca de 0 o de 1 que de $1/2$. En el siguiente resultado obtenemos la ley para tiempo que el paseo al azar permanece en el lado positivo. Para contabilizar los estados positivos y negativos usamos las siguiente convención: Si $S_{2k} = 0$, consideramos este valor positivo o negativo según $S_{2k-1} > 0$ ó $S_{2k-1} < 0$, respectivamente.

Teorema 4.6 (Ley del Arcoseno) *Llamemos $\alpha_{2n,2k}$ a la probabilidad de que en el intervalo de 0 a $2n$ el paseo permanezca $2k$ unidades de tiempo en el lado positivo y $2n-2k$ unidades en el lado negativo. Entonces*
$$\alpha_{2n,2k} = u_{2k}u_{2n-2k} = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}2^{-2n}. \tag{4.24}$$

Demostración. Observamos que si $k = n$, (4.20) muestra que el resultado es cierto y por simetría también es cierto si $k = 0$. Por lo tanto basta hacer la demostración para $1 \leq k \leq n-1$.

Si el paseo al azar permanece $2k$ instantes en el lado positivo y $0 < k < n$ entonces hay al menos un regreso al origen antes de $2n$, Supongamos que el primero de ellos ocurre en $2j$ entonces,

- o bien la primera excursión es positiva, de modo que $2j \leq 2k$ y el resto de la trayectoria, $S_{2j+1}, \dots, S_{2n}$ permanece $2k-2j$ instantes en el lado positivo,
- o bien la primera excursión es negativa, de modo que $2(n-j) \geq 2k$ y el resto de trayectoria, $S_{2j+1}, \dots, S_{2n}$ permanece $2k$ instantes en el lado positivo.

Como consecuencia
$$\alpha_{2n,2k} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} f_{2j}\alpha_{2n-2j,2k-2j} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-k} f_{2j}\alpha_{2n-2j,2k}. \tag{4.25}$$
Ahora procedemos por inducción en n. Para $n = 1$ necesariamente $k = 0$ ó $k = n = 1$ y ya hemos visto que en estos casos la relación es cierta. Supongamos que (4.25) es cierta para valores menores o iguales a $n-1$, usando esto en (4.25) tenemos
$$\begin{aligned}\alpha_{2n,2k} &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} f_{2j}u_{2n-2k}u_{2k-2j} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-k} f_{2j}u_{2k}u_{2n-2k-2j} \\ &= \frac{1}{2}u_{2n-2k}\sum_{j=1}^{k} f_{2j}u_{2k-2j} + \frac{1}{2}u_{2k}\sum_{j=1}^{n-k} f_{2j}u_{2n-2k-2j}\end{aligned}$$

Recordando ahora la relación (4.17) obtenemos el resultado. ■

Como consecuencia del resultado anterior vemos que para n fijo, los números $\alpha_{2n,2k}$ corresponden a una distribución de probabilidad sobre $0 \leq k \leq n$ que se conoce como la distribución discreta del arcoseno de orden n. La distribución es simétrica en el siguiente sentido:

$$\alpha_{2n,2k} = \alpha_{2n,2n-2k}$$

y el término central es siempre el menor.

Antes de analizar una aproximación continua a esta distribución cuando n crece, veamos algunas consecuencias de la ley del arcoseno. Para una sucesión de 20 juegos ($n = 10$), la probabilidad de que alguno de los jugadores permanezca ganando todo el tiempo es mayor a 0.35, que permanezca ganando durante 18 juegos o más es mayor a 0.53 y para 16 juegos o más es mayor a 0.68. Para 50 juegos, alguno de los jugadores permanece ganando siempre con probabilidad mayor a 0.22, y con probabilidad mayor a 1/2 alguno de los jugadores permanece ganando durante 44 juegos o más.

A partir de la fórmula de Stirling que demostramos anteriormente, podemos obtener una aproximación tanto para u_{2n} como para $\alpha_{2n,2k}$:

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \binom{2n}{n} 2^{-2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} 2^{-2n} \\ &\approx \frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{2n}(2n)^{2n}e^{-2n}}{2\pi n^{2n+1}e^{-2n}} 2^{-2n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned} \tag{4.26}$$

y

$$\alpha_{2n,2k} \approx \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}.$$

Para analizar la fracción del tiempo que el paseo permanece en la parte positiva ponemos $x_k = k/n$,

$$\alpha_{2n,2k} \approx \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}} = \frac{1}{\pi n\sqrt{x_k(1-x_k)}} = \frac{1}{n} g(x_k) \tag{4.27}$$

donde $g(x) = 1/\pi\sqrt{x(1-x)}$. Para $x \in (0,1)$, la probabilidad de que la fracción del tiempo en el lado positivo sea menor o igual a x es

$$\begin{aligned} \sum_{x_k \leq x} \alpha_{2n,2k} &\approx \sum_{x_k \leq x} \frac{1}{n} g(x_k) \\ &\approx \int_0^x g(t)\,dt \\ &= \int_0^x \frac{dt}{\pi\sqrt{t(1-t)}} \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Como consecuencia tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.3 *Si $0 < x < 1$ la probabilidad de que la fracción del tiempo que el paseo pasa en el lado positivo sea a lo sumo x converge a*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x}.$$

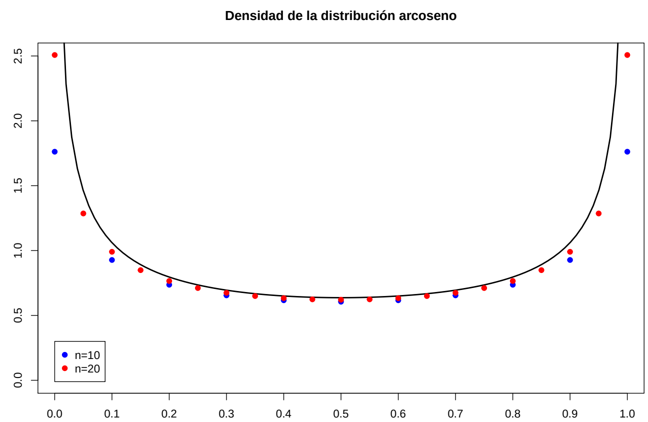

Figura 4.1: Gráfica de la densidad de la distribución arcoseno. Los puntos representan los valores de $n\alpha_{2n,2k}$ para $n = 10$ (azul) y 20 (rojo).

Para representar gráficamente la aproximación (4.27), la figura 4.1 representa la función $g(x) = 1/\pi\sqrt{x(1-x}$ y los valores de $n\alpha_{2n,2k}$ para $n = 10$ y 20.

La razón por la cual la fracción de tiempo durante la cual uno de los jugadores está ganando no va a $1/2$ es que el paseo tarda demasiado en regresar a 0. En particular, el valor esperado del tiempo de la primera visita a 0, T_0 es infinito:

$$\mathrm{E}(T_0) = \sum_{k=1}^{\infty} 2kf_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k-2} \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty$$

donde usamos el lema 4.4 y la relación (4.26).

Ultima Visita al Origen

A medida que n crece es más probable observar excursiones cada vez más largas, durante las cuales uno de los dos jugadores estará ganando en el juego. En el siguiente teorema obtenemos la distribución de probabilidad para la última visita al origen.

Teorema 4.7 *El intervalo de tiempo que transcurre desde la última visita al origen hasta el instante $2n$ sigue la ley discreta del arcoseno.*

Demostración.

$$\begin{aligned} P(S_{2k} = 0, S_{2k+1}S_{2k+2}\cdots S_{2n} \neq 0) &= u_{2k}P(S_1S_2\cdots S_{2n-2k} \neq 0) \\ &= u_{2k}u_{2n-2k} \end{aligned}$$

■

4.7. Distribuciones Estacionarias

Retomamos en esta sección el estudio general de las cadenas de Markov. Aún cuando no disponemos de las herramientas necesarias para un análisis a profundidad, introduciremos algunos de los conceptos fundamentales y presentaremos, en algunos casos sin demostración, los resultados fundamentales.

Definición 4.8 Sea $X_n, n \geq 1$, una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E}$ y matriz de transición P. Sea $\pi(i),\ i \in \mathcal{E}$, una distribución de probabilidad, es decir,

$$\pi(i) \geq 0, \quad \text{para todo } i \in \mathcal{E}, \qquad \sum_{i \in \mathcal{E}} \pi(i) = 1.$$

Si

$$\sum_i \pi(i) P_{i,j} = \pi(j), \quad \text{para todo } j \in \mathcal{E}, \tag{4.28}$$

decimos que π es una *distribución estacionaria* o una *medida invariante* para la cadena X_n.

Para una cadena con espacio de estados finito, observamos que si P es la matriz de transición y π es el vector que representa la distribución estacionaria, podemos escribir matricialmente la relación (4.28) como $\pi' P = \pi$, donde π es un vector columna y π' es su traspuesto.

Dada una cadena de Markov, no siempre es posible encontrar una distribución estacionaria, como veremos más adelante.

Sea π una distribución estacionaria, entonces, usando las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov,

$$\begin{aligned}
\sum_i \pi(i) P_{ij}^{(2)} &= \sum_i \pi(i) \sum_k P_{ik} P_{kj} \\
&= \sum_k (\sum_i \pi(i) P_{ik}) P_{kj} \\
&= \sum_k \pi(k) P_{kj} = \pi(j).
\end{aligned}$$

De manera similar, por inducción obtenemos que para todo n,

$$\sum_i \pi(i) P_{ij}^{(n)} = \pi(j), \quad \text{para todo } j \in \mathcal{E}. \tag{4.29}$$

Por lo tanto, si la distribución del estado inicial X_0 es π, (4.29) implica que para todo n,

$$P(X_n = j) = \pi(j), \quad \text{para todo } j \in \mathcal{E},$$

y en consecuencia la distribución de X_n es independiente de n. Esto quiere decir que la distribución estacionaria representa una distribución de equilibrio del proceso: si el proceso se inicia con una distribución estacionaria entonces es estrictamente estacionario.

Supongamos ahora que la distribución de X_n es independiente de n, entonces la distribución inicial π_0 debe satisfacer

$$\pi_0(j) = P(X_0 = j) = P(X_1 = j) = \sum_i \pi_0(i) P_{ij}$$

y en consecuencia π_0 satisface la condición (4.28) de una distribución estacionaria. Resumiendo, la distribución de X_n es independiente de n si y sólo si la distribución inicial es una distribución estacionaria.

Ejemplo 4.14
Consideremos una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E} = \{0, 1, 2\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Veamos que esta cadena tiene una única distribución estacionaria π. La relación que debe satisfacer esta distribución es $\pi P = \pi$, es decir,

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$$

y obtenemos las tres ecuaciones siguientes,

$$\frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{6} = \pi_0,$$
$$\frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{2} + \frac{\pi_2}{3} = \pi_1,$$
$$\frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{2} = \pi_2,$$

junto con la condición adicional de que el vector π represente una distribución de probabilidad, es decir

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1.$$

Resolviendo este sistema obtenemos

$$\pi_0 = \frac{6}{25}, \qquad \pi_1 = \frac{2}{5}, \qquad \pi_2 = \frac{9}{25},$$

que son positivos y satisfacen las cuatro ecuaciones, de modo que representan la única distribución estacionaria para la cadena. ▲

Dada una cadena de Markov, supongamos ahora que existe una distribución ν tal que para todo $i \in \mathcal{E}$,

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \nu(j), \quad \text{para todo } j \in \mathcal{E}. \tag{4.30}$$

Entonces la distribución de X_n se aproxima a ν cuando $n \to \infty$, sin importar cual sea la distribución inicial de la cadena. En este caso decimos que ν es una *distribución asintótica* para la cadena.

Supongamos que (4.30) vale y sea π_0 la distribución inicial de la cadena, entonces

$$P(X_n = j) = \sum_i \pi_0(i) P_{ij}^{(n)}.$$

Suponiendo que podemos intercambiar límites con series, haciendo $n \to \infty$ y usando (4.30) obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \sum_i \pi_0(i)\nu(j),$$

y como $\sum_i \pi_0(i) = 1$, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \nu(j), \quad \text{para todo } j \in \mathcal{E}. \tag{4.31}$$

Esta fórmula indica que, sin importar cual sea la distribución inicial, para valores grandes de n la distribución de X_n es aproximadamente igual a la distribución asintótica ν.

Si la cadena tiene una distribución estacionaria π entonces, necesariamente, $\pi = \nu$, porque podemos iniciar la cadena con la distribución π y entonces

$$P(X_n = j) = \sum_i \pi(i) P_{ij}^{(n)} = \pi(j), \quad \text{para todo } j \in \mathcal{E}.$$

Comparando con (4.31) vemos que ambas distribuciones tienen que coincidir.

Por lo tanto, de acuerdo a este argumento, si una cadena de Markov tiene una distribución estacionaria y una distribución asintótica, ambas deben coincidir.

Teorema 4.8 *Sea $X = \{X_n, n \geq 0\}$ una cadena de Markov con espacio de estados finito y matriz de transición P. Supongamos que para algún $i \in \mathcal{E}$ se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} := \pi(j), \qquad \text{para todo } j \in \mathcal{E}, \tag{4.32}$$

Entonces, el vector $(\pi(j), j \in \mathcal{E})$ es una distribución de probabilidad invariante.

Demostración. Es inmediato que $0 \leq \pi(j) \leq 1$, para todo $j \in \mathcal{E}$ pues esto se vale para las potencias de la matriz de transición P: $0 \leq P_{i,j}^{(n)} \leq 1$, para todo $n \geq 1$ y $i, j \in \mathcal{E}$. Veamos que, en efecto, π es un vector de probabilidad, puesto que $\mathcal{E}$ es finito los siguientes intercambios de suma y límite los podemos hacer sin correr riesgo a equivocación

$$\sum_{j\in\mathcal{E}} \pi(j) = \sum_{j\in\mathcal{E}} \lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in\mathcal{E}} P_{i,j}^{(n)} = 1.$$

Para finalizar veamos que π es un vector de probabilidad invariante. Por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov tenemos que para todo $j \in \mathcal{E}$.

$$\begin{aligned}\pi(j) &= \lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathcal{E}} P_{i,k}^{(n)} P_{k,j} \\ &= \sum_{k\in\mathcal{E}} \lim_{n\to\infty} P_{i,k}^{(n)} P_{k,j} = \sum_{k\in\mathcal{E}} \pi(k) P_{k,j}\end{aligned}$$

■

Observación 4.1

1. Como el espacio de estados en el teorema anterior es finito, se tiene que $\pi(k) > 0$ para algún $k \in \mathcal{E}$ pues π es un vector de probabilidad. En el caso en que $\mathcal{E}$ es infinito esto no se puede garantizar. Por ejemplo, tomemos una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{E}$ infinito y tal que todos sus estados son transitorios, como la caminata aleatoria no simétrica. Puesto que todos los estados son transitorios se puede demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} = 0 = \pi(j), \qquad \forall j \in \mathcal{E}.$$

   El vector π es sin duda invariante, $0P = 0$, pero no es un vector de probabilidad pues la suma de sus entradas es 0.

2. En el enunciado del teorema no se pide que la relación (4.32) se cumpla para todos los estados iniciales $i \in \mathcal{E}$, se pide que el límite exista para algún $i \in \mathcal{E}$. Si este límite existe para todo $i \in \mathcal{E}$ y no depende del valor inicial, entonces π es a la vez, una distribución asintótica y una distribución estacionaria, y por lo tanto es única. Sin embargo, como veremos, hay casos en los cuales la distribución límite depende del estado inicial.

Ejemplo 4.15 (Cadena con dos estados)
Consideremos una cadena de Markov con dos estados posibles y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

Supongamos que $0 < \alpha, \beta \leq 1$, entonces es posible obtener la siguiente fórmula explícita para las potencias de la matriz de transición

$$P^n = \frac{1}{\alpha+\beta}\left[\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + (1-\alpha-\beta)^n \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}\right].$$

Si $\alpha + \beta < 2$, haciendo $n \to \infty$ el factor $(1-\alpha-\beta)^n \to 0$ y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}.$$

En el caso límite $\alpha = \beta = 1$, la cadena sigue siendo recurrente, pero ahora no hay convergencia de P_{ij}^n cuando $n \to \infty$ ya que

$$P^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, es fácil ver que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} P_{ij}^{(m)} = \frac{1}{2},$$

que es consistente con el resultado anterior (si $\alpha = \beta = 1,\ \alpha/(\alpha+\beta) = 1/2$ para $i = 1, 2$).

Una interpretación de este resultado es que, a largo plazo, la cadena estará en el estado 1 una fracción de tiempo $\beta/(\alpha+\beta)$ y en el otro estado la fracción complementaria $\alpha/(\alpha+\beta)$. ▲

Veamos qué cosas pueden ocurrir para que una cadena no tenga distribución asintótica. Consideremos una cadena de Ehrenfest con tres bolas. En este caso la matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si calculamos la matriz de transición en dos pasos, la disposición de los ceros en la matriz cambia,

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 7/9 & 0 & 2/9 \\ 2/9 & 0 & 7/9 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Para ver que esta situación se mantiene para valores mayores de n, observamos que si inicialmente tenemos un número impar de bolas en la caja de la izquierda, no importa si añadimos o quitamos una, el resultado será un número par. De manera similar, si hay un número par de bolas inicialmente, en el próximo paso habrá un número impar. Esta situación de alternancia entre números pares e impares indica que es imposible regresar al estado inicial después de un número impar de pasos, es decir, si n es impar, $P_{ii}^n = 0$ para todo i. En un caso como este, las entradas de las potencias de la matriz de transición no pueden converger a valores estrictamente positivos.

4.8. Espacio de Estados Finito

En esta sección describiremos el problema de la existencia de distribuciones estacionarias para cadenas de Markov con espacio de estados finito. Los resultados se presentan sin demostración.

Recordemos que un estado $j \in \mathcal{E}$ es recurrente si $\rho_{jj} = P_j(T_j < \infty) = 1$, es decir, si partimos de j regresamos a este estado en un tiempo finito con probabilidad 1. Definimos

$$m_j = \mathrm{E}_j(T_j),$$

el tiempo medio de retorno a j, si T_j tiene esperanza finita y ponemos $m_j = \infty$ si no. Definimos también

$$N_n(j) = \sum_{m=1}^{n} \mathbf{1}_j(X_m)$$

el número de visitas de la cadena al estado j hasta el instante n.

Teorema 4.9 *Sea j un estado recurrente, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(j)}{n} = \frac{\mathbf{1}_{\{T_j<\infty\}}}{m_j} \quad \text{con probabilidad } 1. \tag{4.33}$$

El teorema anterior tiene la siguiente interpretación. Supongamos que estamos considerando una cadena de Markov irreducible y finita, de modo que todos los estados son recurrentes y se comunican. Entonces, con probabilidad 1 todos los estados serán visitados y $\rho_{ij} = P_i(T_j < \infty) = 1$ para cualesquiera i, j. Por lo tanto, el tiempo promedio que la cadena pasa en el estado j cuando n es grande es, aproximadamente, $1/m_j = 1/\operatorname{E}_j(T_j)$, es decir, el inverso del tiempo medio de retorno.

Para los estados transitorios tenemos el siguiente resultado, que muestra que dichos estados no juegan ningún papel en la distribución estacionaria de una cadena.

Teorema 4.10 *Sea π una distribución estacionaria. Si i es un estado transitorio entonces $\pi(i) = 0$.*

Si la cadena es irreducible, el siguiente resultado nos dice que existe una única distribución estacionaria para la cadena.

Teorema 4.11 *Una cadena de Markov irreducible con espacio de estados finito, tiene una única distribución estacionaria dada por*

$$\pi(i) = \frac{1}{m_i}, \quad i \in \mathcal{E}. \tag{4.34}$$

Corolario 4.4 *Consideremos una cadena de Markov irreducible, con distribución estacionaria π. Entonces con probabilidad 1*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(i)}{n} = \pi(i), \quad i \in \mathcal{E}. \tag{4.35}$$

Ejemplo 4.16 (Cadena con dos estados)
Consideremos una cadena de Markov con dos estados posibles y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

donde $0 < \alpha, \beta < 1$, $i = 1, 2$. Las ecuaciones para hallar la distribución estacionaria son

$$\begin{aligned} (1-\alpha)\pi_1 + \beta\pi_2 &= \pi_1 \\ \alpha\pi_1 + (1-\beta)\pi_2 &= \pi_2 \end{aligned}$$

que son la misma ecuación. Tenemos además la condición para que π sea una distribución de probabilidad: $\pi_1 + \pi_2 = 1$. La solución es

$$\pi_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}, \qquad \pi_2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

que coincide con la distribución asintótica que hallamos en el ejemplo 4.15. ▲

Para el caso de cadenas reducibles, es decir, aquellas que tienen varios conjuntos cerrados e irreducibles tenemos el siguiente resultado

Definición 4.9 Sea π una distribución de probabilidad sobre $\mathcal{E}$ y sea $C \subset \mathcal{E}$. Decimos que π está concentrada en C si $\pi(i) = 0$ siempre que $i \notin C$.

Teorema 4.12 *Sea C un conjunto cerrado e irreducible de estados recurrentes. Entonces la cadena de Markov tiene una única distribución estacionaria π concentrada en C que está dada por*

$$\pi(i) = \begin{cases} \frac{1}{m_i}, & si \;\; i \in C, \\ 0, & en \; otro \; caso. \end{cases} \tag{4.36}$$

Supongamos ahora que C_0 y C_1 son dos conjuntos distintos, cerrados e irreducibles de estados recurrentes. Por el teorema anterior sabemos que la cadena tiene una distribución estacionaria π_0 concentrada en C_0 y otra distribución estacionaria π_1 concentrada en C_1. Entonces, es posible demostrar que las distribuciones π_α, definidas para $0 \leq \alpha \leq 1$ por

$$\pi_\alpha(i) = (1-\alpha)\pi_0(i) + \alpha\pi_1(i), \quad i \in \mathcal{E},$$

son distribuciones estacionarias distintas. Por lo tanto tenemos el siguiente resultado,

Corolario 4.5 *Sea $\mathcal{E}_R$ el conjunto de los estados recurrentes de una cadena de Markov con espacio de estados finito.*

1. *Si $\mathcal{E}_R$ es un conjunto irreducible la cadena tiene una única distribución estacionaria.*
2. *Si $\mathcal{E}_R$ no es irreducible, la cadena tiene un número infinito de distribuciones estacionarias distintas.*

Ejemplo 4.17 (Cadena con dos estados)
Consideremos de nuevo la cadena de Markov con dos estados y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

y supongamos ahora que $\alpha = \beta = 0$, de modo que P es la matriz identidad. El espacio de estados tiene ahora dos conjuntos cerrados irreducibles: $\{0\}$ y $\{1\}$ y hay una distribución estacionaria concentrada en cada uno de ellos: Para $\{0\}$ es $(1, 0)$ mientras que para $\{1\}$ es $(0, 1)$. Cualquier combinación convexa de ellas es también una distribución estacionaria de la cadena y por lo tanto hay infinitas distribuciones estacionarias. ▲