Probabilidad

Lista de Problemas 9

Los cuatro primeros problemas son para entregar el martes 24/10/17.

Por favor, entrega por separado los problemas pares y los impares.

1. El número de fallas $N(t)$ que ocurren en una red de computadoras en el intervalo de tiempo $[0, t)$ es un proceso de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$. En promedio hay una falla cada 4 horas, es decir, la intensidad del proceso es igual a $\lambda = 0.25h^{-1}$.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de tener a lo sumo una falla en $[0, 8)$, al menos dos fallas en $[8, 16)$ y a lo sumo una falla en $[16, 24)$ (la unidad de tiempo es 1 hora).

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera falla ocurra después de 8 horas?

2. Un recipiente con colonias de bacteria visibles al microscopio como puntos oscuros se divide en cuadrados pequeños y se cuenta el número de colonias presentes en cada cuadrado. En las tablas siguientes presentamos el número observado de cuadrados con exactamente k puntos oscuros en dos experimentos realizados con diferentes tipos de bacterias. Explique por qué un proceso de Poisson es un modelo adecuado en este caso y compare la predicción de dicho modelo con los resultados observados en la práctica.

   Caso 1:

k	0	1	2	3	4	5	≥ 6
N_k	5	19	26	26	21	13	8

   Caso 2:

k	0	1	2	3	4	≥ 5
N_k	8	16	18	15	9	7

3. Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a.i.i.d. con distribución exponencial de parámetro λ. Definimos una nueva variable aleatoria N de la siguiente manera: Si $X_1 > 1$ entonces $N = 0$; si $X_1 \leq 1$ pero $X_1 + X_2 > 1$, entonces $N = 1$; en general, $N = k$ si
$$X_1 + \cdots + X_k \leq 1 < X_1 + \cdots + X_k + X_{k+1}.$$
   Demuestre que N tiene distribución de Poisson de parámetro λ. Este método puede ser usado para simular la distribución de Poisson. (Ayuda: $X_1 + \cdots + X_k \sim \Gamma(k, \lambda)$. Condicione por el valor de la suma y use la ley de probabilidad total para mostrar que
$$P(N = k) = \int_0^1 [1 - F(1 - x)] f_k(x) dx,$$
   donde $F(x)$ es la función de distribución exponencial y f_k es la densidad $\Gamma(k, \lambda)$).

4. Para $i = 1, \ldots, n$ sean $(N_i(t),\ t \geq 0)$ procesos de Poisson independientes con parámetro común λ. Halle la distribución del primer instante para el cual al menos un evento ha ocurrido en cada uno de los procesos.

5. Se observa una sustancia radioactiva durante 4 intervalos de 6 segundos cada uno. Si la frecuencia de las emisiones de partículas es de 0.5 por segundo, calcular la probabilidad de que

   (a) En cada intervalo se emitan 3 o más partículas,

   (b) En al menos un intervalo se emitan 3 o más partículas.

6. El número de fallas $N(t)$ que ocurren en una red de computadoras en el intervalo de tiempo $[0, t)$ es un proceso de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$. En promedio hay una falla cada 4 horas, es decir, la intensidad del proceso es igual a $\lambda = 0.25h^{-1}$.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de tener a lo sumo una falla en $[0, 8)$, al menos dos fallas en $[8, 16)$ y a lo sumo una falla en $[16, 24)$ (la unidad de tiempo es 1 hora).

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera falla ocurra después de 8 horas?

7. Los clientes llegan a una tienda de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad $\lambda = 4$ por hora. Si la tienda abre a las 10:00 am, (a) ¿cuál es la probabilidad de que exactamente dos cliente hayan llegado antes de las 10:30? (b) Dado que (a) es cierto ¿cuál es la probabilidad de que un total de 7 clientes haya llegado antes de las 12:30? (c) Dado que (a) y (b) son ciertos ¿cuál es la probabilidad de que un total de 12 clientes hayan llegado durante el día, si la tienda cierra a las 6:00 pm?

8. Un profesor de matemáticas espera el autobús a Guanajuato en la parada que está frente a la iglesia de Valenciana. El tiempo de espera hasta el próximo autobús tiene distribución uniforme en $(0,1)$ horas. Personal del Cimat pasa en carro por la parada con una frecuencia de 6 por hora según un proceso de Poisson y la probabilidad de que cada uno de ellos lleve al profesor a Guanajuato es de $1/3$. ¿Cuál es la probabilidad de que termine bajando en el autobús?

9. El tráfico en una cierta carretera se distribuye de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad $2/3$ de vehículo por minuto. 10 % de los vehículos son camiones y el resto son autos. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un camión pase en una hora? (b) Dado que 10 camiones han pasado en una hora, ¿Cuál es el valor esperado del número de vehículos que han pasado? (c) Dado que 50 vehículos han pasado en una hora, ¿Cuál es la probabilidad de que hayan sido exactamente 5 camiones y 45 autos?

10. En una oficina de correo los paquetes llegan según un proceso de Poisson de intensidad λ. Hay un costo de almacenamiento de c pesos por paquete y por unidad de tiempo. Los paquetes se acumulan en el local y se despachan en grupos cada T unidades de tiempo (es decir, se despachan en $T,\ 2T,\ 3T,\dots$). Hay un costo por despacho fijo de K pesos (es decir, el costo es independiente del número de paquetes que se despachen). (a) ¿Cuál es el costo promedio por paquete por almacenamiento en el primer ciclo $[0,T]$? (b) ¿Cuál es el costo promedio por paquete por almacenamiento y despacho en el primer ciclo? (c) ¿Cuál es el valor de T que minimiza este costo promedio?

11. Dos correctores de prueba leen un manuscrito de 300 páginas. El primero encuentra 100 errores, y el segundo 120, y sus listas contienen 80 errores en común. Suponga que los errores del autor siguen un proceso de Poisson con tasa desconocida λ por página mientras que los correctores de prueba tienen probabilidad de éxito p_1 y p_2 de encontrar los errores. Sea X_0 el número de errores que ninguno encontró. Sean X_1 y X_2 el número de errores que sólo encontró 1 o sólo encontró 2, respectivamente, y sea X_3 el número de errores que ambos encontraron. (a) Encuentre la distribución conjunta de (X_0, X_1, X_2, X_3). (b) Use la respuesta anterior para encontrar estimadores de p_1 y p_2 y luego del número de errores no descubiertos.

12. Un foco tiene un tiempo de vida exponencial con media de 200 días. Cuando se quema es reemplazado de inmediato. Además hay un sistema de mantenimiento preventivo por el cual el foco es reemplazado de acuerdo a los tiempos de un proceso de Poisson de intensidad 0.1. (a) ¿Con qué frecuencia se reemplaza el foco? (b) A largo plazo ¿Qué proporción de los cambios de foco se deben a fallas?

13. (Cómo generar variables de Poisson.) Sean $U_1, U_2, \dots$ v.a.i. con distribución uniforme en $(0,1)$.

    (a) Si $X_i = (-\log U_i)/\lambda$, muestre que X_i tiene distribución exponencial de parámetro λ.

    (b) Use el resultado anterior para demostrar que si definimos N como el valor de n que satisface $\prod_{i=1}^{n} U_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{n+1} U_i$, entonces N tiene distribución de Poisson con media λ.

14. Un submarino tiene tres instrumentos de navegación pero sólo puede permanecer en alta mar si al menos dos de ellos están trabajando. Suponga que los tiempos de vida de los instrumentos son exponenciales con medias 1 año, 1.5 años y 3 años. ¿Cuál es el tiempo promedio que el submarino puede permanecer en alta mar?

15. Los clientes llegan a un banco según un proceso de Poisson con intensidad de 10 por hora. Dado que dos clientes llegaron en los primeros 5 minutos, (a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos hayan llegado en los primeros dos minutos? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno haya llegado en los primeros dos minutos?

16. Una sustancia radioactiva emite partículas α de acuerdo a un proceso de Poisson homogéneo con intensidad de $\lambda = 3$ por segundo.

    a) Si en los primeros cinco segundos se han emitido 12 partículas, ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos de ellas fuesen emitidas en el primer segundo?

    b) Las partículas emitidas son registradas por un contador Geiger con probabilidad $3/4$. Si al cabo de 3 segundos el contador ha registrado 6 partículas, ¿Cuál es la probabilidad de que en realidad hayan sido emitidas 9?

    A esta fuente radioactiva se le une otra que emite partículas α con intensidad de $\mu = 5$ por segundo.

    c) ¿Cuál es la distribución del tiempo de espera hasta que se emita la primera partícula?

    d) ¿Cuál es la distribución del tiempo de espera hasta que el contador registre la primera partícula?

    e) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera partícula detectada por el contador provenga de la segunda fuente radioactiva?