Probabilidad

Lista de Problemas 8

Los cuatro primeros problemas son para entregar el martes 10/10/17.

Por favor, entrega por separado los problemas pares y los impares.

1. Considere un banco que tiene dos cajeros. Tres personas, Arsenio, Bernardo y Cristóbal, entran a la agencia casi al mismo tiempo y en ese orden. Arsenio y Bernardo pasan directamente a las cajas mientras que Cristóbal espera hasta que se desocupe algún cajero. Suponga que los tiempos de servicio para cada cliente tienen distribución exponencial con media 4 minutos,
   (a) ¿Cuál es el valor esperado del tiempo total que tarda Cristóbal en el banco?
   (b) ¿Cuál es el valor esperado del tiempo total hasta que sale el último de los tres clientes?
   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que Cristóbal sea el último en salir?
   (d) Responda las tres preguntas anteriores para una distribución exponencial general con parámetro λ.

2. Sean S y T variables independientes con distribución exponencial con parámetros λ y μ. Sea $U = \min\{S, T\}$ y $V = \max\{S, T\}$. Halle
   (a) $\mathrm{E}(U)$,
   (b) $\mathrm{E}(V - U)$,
   (c) $\mathrm{E}(V)$,
   (d) Use la identidad $V = S + T - U$ para obtener otra fórmula para $E(V)$.

3. X es una v.a. cuya distribución tiene las siguientes propiedades: Para todo $n \geq 1$, $P(X = 2n) = \frac{1}{2}P(X = 2n-1) = \frac{2}{3}P(X = 2n+1)$. Además, $P(X = 0) = \frac{2}{3}P(X = 1)$. Calcule la f.g.p. de X.

4. La variable aleatoria X con valores enteros no-negativos tiene función generadora de probabilidad $\phi_X(t) = \log \frac{1}{1-qt}$. Determine la función de probabilidad para X y halle $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

5. Sean $N, X_1, X_2, \ldots$ v.a.i., N con distribución $P(N = k) = (1-p)^{k-1}p$ para $k \geq 1, 0 < p < 1$ y suponga que las X_i son todas exponenciales de parámetro λ. Halle la distribución de $Z = \sum_{j=1}^{N} X_j$ usando funciones generadoras de probabilidad.

6. Sean $\xi_1, \xi_2, \ldots$ v.a.i.i.d. que toman valores en $\mathbb{Z}$ y sea $P(\xi_1 = i) = p(i), i \in \mathbb{Z}$. Sea $A \subset \mathbb{Z}$ tal que $P(\xi_1 \in A) > 0$ y sea $T_A = \min\{n \geq 1 : \xi_n \in A\}$. Demuestre que
$$P(\xi_{T_A} = i) = p(i) / \sum_{a \in A} p(a), i \in A.$$

7. Juan lanza un dardo a una diana y la probabilidad de que acierte la diana en cada disparo es 1/2. Dado que acierta la diana, la probabilidad de que acierte el centro de la diana es p. Juan lanza mientras acierte a la diana. Sea X el total de aciertos al centro de la diana cuando Juan termina de lanzar. Halle su distribución.

8. Felipe lanza un dado balanceado hasta obtener un cuatro. Luego Diana lanza una moneda balanceada tantas veces como Felipe lanzó el dado. Determine el valor esperado y la varianza del número de (a) águilas, (b) soles, (c) águilas y soles que obtiene Diana.

9. Sea X una v.a. con función de probabilidad $p_X(k) = \frac{1}{2}q^{|k|-1}p$, con $0 < q = 1 - p < 1$. Halle la f.g.p. para esta variable aleatoria.

10. Suponga que el tiempo necesario para reparar una máquina tiene distribución exponencial de media 2.
    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que la reparación tarde más de dos horas?
    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 1 y 3 horas?
    (c) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde más de 5 horas si sabemos que tarda más de 3 horas?
    (d) ¿Cuál es la varianza del tiempo de reparación?

11. Amaranta y Berta entran a un salón de belleza simultáneamente, Amaranta a cortarse el pelo y Berta a teñírselo. Suponga que el tiempo para un corte tiene distribución exponencial con media 30 minutos mientras que para un teñido es exponencial con media 40 minutos.
    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que Amaranta termine primero?
    (b) ¿Cuál es el tiempo esperado hasta que ambas terminen?

12. Sea N un proceso de Poisson con intensidad $\lambda > 0$.
    (a) Determine la correlación entre las variables $N(t)$ y $N(t+s)$.
    (b) Halle la covarianza entre dos incrementos del proceso: $N(t) - N(s)$ y $N(t') - N(s')$.

13. Una linterna necesita dos baterías para funcionar. Inicialmente se tienen cuatro baterías numeradas del 1 al 4 y se colocan en la linterna las baterías 1 y 2. Cuando una batería falla se reemplaza por la batería con menor número que tenga carga. Suponga que la vida de las baterías es exponencial con media 100 horas. Sea T el instante en el cual sólo queda una batería con carga y sea N el número de la batería que todavía tiene carga.
    (a) Halle $\mathrm{E}(T)$,
    (b) Halle la distribución de N.

14. Los clientes entran a una tienda de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad $\lambda = 2$. Sea $N(t)$ el número de clientes que han entrado hasta el instante t. Calcule las siguientes probabilidades:
    (a) $P(N(1) = 2)$,
    (b) $P(N(1) = 2, N(3) = 6)$,
    (c) $P(N(1) = 2 | N(3) = 6)$,
    (d) $P(N(3) = 6 | N(1) = 2)$,
    (e) $P(N(1) \leq 2)$,
    (f) $P(N(1) \geq 2 | N(1) \geq 1)$.

15. Sea $N(t)$ un proceso de Poisson de parámetro 3. Sea τ_n en instante en el que ocurre el n-ésimo evento. Calcule
    (a) $\mathrm{E}(\tau_{12})$,
    (b) $\mathrm{E}(\tau_{12} | N(2) = 5)$,
    (c) $\mathrm{E}(N(5) | N(2) = 5)$.

16. Para analizar estadísticamente el bombardeo de Londres durante la segunda guerra mundial, se dividió el área de la ciudad en 576 sectores, cada uno con un área de 0.25 km^2, y se contó el número de bombas que cayó en cada uno. La tabla que presentamos a continuación muestra el número de sectores en los cuales cayeron exactamente k bombas.

k	0	1	2	3	4	≥ 5
N° de sectores	229	211	93	35	7	1

    Ajuste una distribución de Poisson a estos datos y con ella calcule las frecuencias esperadas de $0, 1, \ldots, 5$ bombas en 576 sectores.