Probabilidad

Lista de Problemas 2

Los cuatro primeros problemas son para entregar el martes 22/08/17.

Por favor, entrega por separado los problemas pares y los impares.

1. Sea F la función dada por
$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \mathbf{1}_{[\frac{1}{i},\infty)}.$$
Demuestre que F es una función de distribución en $\mathbb{R}$. Sea P la medida de probabilidad asociada a esta distribución. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos

   a) $A = [1, \infty)$ b) $B = (\frac{1}{10}, \infty)$ c) $C = \{0\}$ d) $D = [0, \frac{1}{2})$ e) $E = (-\infty, 0)$ f) $F = (0, \infty)$.

2. Sea X una variable aleatoria con función de distribución F dada por
$$F(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \leq x < 1/2 \\ (x^2+2)/3 & \text{para } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$
Calcule las siguientes probabilidades: a) $P(X < 1/2)$, b) $P(X \leq 1/2)$, c) $P(X = 1/2)$, d) $P(X > 1/2)$, e) $P(X \geq 1/4)$ f) $P(X \leq 7/8)$.

3. Sea F una función de distribución. Demuestre que F tiene, a lo sumo, una cantidad numerable de discontinuidades. Si F es continua, demuestre que F es uniformemente continua.

4. Si $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2},\ x > 0$, halle un número x_0 tal que $P(X > x_0) = 1/2$ ¿Es este número una mediana de la distribución? ¿es única?

5. Determine el valor que debe tomar la constante A en cada caso para que las siguientes funciones sean densidad de una función de distribución.

   a. $f(x) = Ae^{-\alpha|x-\theta|},\ -\infty < x < \infty,\ \alpha$ y θ constantes.

   b. $f(x) = Ax^{\alpha+1},\ x > x_0 > 0,\ \alpha$ constante.

   c. $f(x) = Ax(1-x),\ 0 \leq x \leq 1$.

   d. $f(x) = \frac{A}{1+x^2},\ -\infty < x < \infty$.

6. Sea $f(x) = Cxe^{-x},\ x > 0$ una densidad.

   a. Determine el valor de C. b. Calcule $P(X < 2)$. c. Calcule $P(2 < X < 3)$.

7. Verifique que las siguientes funciones son densidades y obtenga la función de distribución correspondiente.

   a) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{para } 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ b. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & \text{para } |x| < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.

8. Sea X una variable aleatoria con valores en $[0, 1]$ y función de distribución $F(x) = x^2$. ¿Cuál es la densidad de X? Calcule las siguientes probabilidades:

   a) $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4})$, b) $P(X > 1/2)$, c) $P(X \leq 3/4 | X > 1/2)$.

9. Halle la función de distribución F y su gráfica si la densidad es

   a. $f(x) = 1/2,\ 0 \leq x \leq 2$. b. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

10. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $\lambda = 0.5$. Calcule

    a. $P(X > 1)$, b. $P(0.5 < X < 1.5)$, c. $P(X > 2 | X > 1)$.

11. La vida de una máquina, medida en horas, tiene densidad $f(x) = C/x^2,\ x > 100$.

    a. Calcule C. b. Halle la función de distribución. c. Calcule $P(X > 500)$.

12. Sea F la función de distribución dada por

$$F(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[1,\infty)}(x) + \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[2,\infty)}(x)$$

y sea P la probabilidad asociada a esta distribución. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos:
a) $A = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ b) $B = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ c) $C = (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ d) $D = [0, 2)$ e) $E = (3, \infty)$.

13. Sean f y g dos densidades. Demuestre que $\lambda f + \mu g$ también es una densidad si $\lambda + \mu = 1$, $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$.

14. Sea

$$f(u) = ue^{-u}, \quad u \geq 0.$$

Demuestre que f es una densidad de probabilidad y calcule $\int_0^\infty uf(u)\,du$.

15. Decimos que m es la mediana de la función de distribución F si $P(X \geq m) \geq 1/2$ y $P(X \leq m) \geq 1/2$. Demuestre que m siempre existe pero no necesariamente es único.

16. Un vendedor de periódicos compra cada periódico por 1.50 y lo vende por 2.50. Los que no vende los regresa al distribuidor y recibe 1.25 por ellos. Supongamos que la distribución de la demanda D es

$$P(D = k) = \frac{e^{-10}10^k}{k!}$$

Describa la variable aleatoria X que representa su ganancia diaria si compra 10 periódicos cada día.

17. La temperatura T de cierto objeto, medida en grados Fahrenheit, tiene una distribución normal con parámetros $\mu = 98.6$ y $\sigma^2 = 2$. La temperatura θ medida en grados centígrados está relacionada con T por la fórmula

$$\theta = \frac{5}{9}(T - 32).$$

Obtenga la distribución de θ.

18. La magnitud v de la velocidad de una molécula con masa m en un gas de temperatura absoluta T es una variable aleatoria que, de acuerdo a la teoría cinética de los gases, posee una distribución de Maxwell con parámetro $\alpha = (2kT/m)^{1/2}$, donde k es la constante de Boltzman. La distribución de Maxwell de parámetro α tiene densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\alpha^3} x^2 \exp\left(\frac{x^2}{k^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

¿Cuál es la densidad de la energía cinética $E = mv^2/2$ de una molécula?

19. Halle la densidad de $Y = e^X$ donde X tiene distribución normal con parámetros μ y σ^2. (Se dice que la variable Y tiene distribución lognormal con parámetros μ y σ^2).

20. Se capturan a miembros de una población de N animales y luego de marcarlos se liberan. Los animales luego son recapturados uno a uno hasta obtener $m \leq a$ animales marcados. Sea X el número de animales capturados hasta obtener m marcados, demuestre que la distribución de esta variable aleatoria está dada por

$$P(X = n) = \frac{a}{N}\binom{a-1}{m-1}\binom{N-a}{n-m}\binom{N-1}{n-1}^{-1}$$

Esta se conoce como la distribución hipergeométrica negativa.