Probabilidad

Lista de Problemas 11

Los cuatro primeros problemas son para entregar el martes 5/11/17.

Por favor, entrega por separado los problemas pares y los impares.

Las siguientes matrices de Markov se usan en algunos de los problemas listados a continuación:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.3 \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix} \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Dada cualquier matriz de transición P, demuestre que es fácil aumentarla añadiendo nuevos estados que tienen acceso a los estados iniciales, pero es imposible añadir un nuevo estado que se comunique con alguno de los estados iniciales.

2. (a) Un esquema similar al modelo de Ehrenfest, usado por Daniel Bernoulli y Laplace para estudiar el flujo de líquidos incompresibles entre dos recipientes, es el siguiente. Hay N bolas blancas y N negras en dos cajas, cada una de las cuales contiene N bolas. Se selecciona una bola de cada caja y se coloca en la otra. Halle la matriz de transición para el número de bolas blancas en la primera caja.

   (b) Considere dos cajas, A y B, que contienen un total de N bolas. Se selecciona una bola al azar del total de N bolas y luego se selecciona una caja, A con probabilidad p y B con probabilidad $q = 1 - p$ y la bola seleccionada se coloca en esta caja. El estado del sistema está representado por el número de bolas en A. Halle la matriz de transición para esta cadena de Markov.

3. Sea $X_n,\ n \geq 0$ una cadena de Markov y sea $\{n_k, k \geq 0\}$ una sucesión creciente y no acotada de enteros positivos. Demuestre que $Y_k = X_{n_k}$ también es una cadena de Markov, posiblemente no-homogénea. Halle la matriz de transición de Y cuando $n_k = 2k$ y X es el paseo al azar simple.

4. Considere una sucesión infinita de ensayos de Bernoulli independientes y simétricos ($p = q = 0.5$). Sea A_n el número de éxitos al cabo de n lanzamientos y B_n el número de fracasos. Considere $X_n = A_n - B_n$, $Y_n = |A_n - B_n|$. Determine si X_n, Y_n son cadenas de Markov y en caso afirmativo halle sus matrices de transición.

5. En la estrategia 'doble o nada' el jugador apuesta todo lo que tiene y tiene probabilidad 0.5 de duplicar su capital o de perderlo todo. Suponga que comienza con 1 peso y decide jugar n juegos o hasta que se arruine. Describa la cadena de Markov y halle su matriz de transición.

6. Considere dos cajas, A y B, que contienen un total de N bolas. Suponga que en el instante n la caja A tiene exactamente k bolas. En el instante $n+1$ se seleccionan una caja y una bola al azar, proporcionalmente al número de bolas que contiene cada caja, es decir, se selecciona una bola de la caja A con probabilidad k/N. Esta bola se coloca en la caja A con probabilidad k/N y en la caja B con probabilidad $(N-k)/N$. Determine la matriz de transición para esta cadena de Markov.

7. Sea $\xi_n,\ n \geq 1$ una sucesión de variables de Bernoulli independientes y simétricas y sea $X_n = (\xi_n + \xi_{n+1})/2$. Halle las probabilidades de transición $P_{i,j}^{(m,n)} = P(X_n = j | X_m = i)$ para $m < n$, $i, j = -1, 0, 1$. Demuestre que (X_n) no es una cadena de Markov.

8. Decimos que una v. a. T es un *tiempo de paro* para el proceso $(X_n)_{n\geq 1}$ si, para cada n, es posible determinar si el suceso $\{T = n\}$ ocurrió o no observando los valores del proceso hasta el tiempo n: $X_0, X_1, \dots, X_n$.

   Sea i un estado cualquiera de la cadena. Demuestre que T_i, el instante de la primera visita a i, es un tiempo de paro pero ν_i, el instante de la última visita a i, no lo es.

9. Sea T un tiempo de paro para la cadena de Markov $(X_n)_{n\geq 1}$. Demuestre la siguiente propiedad (que es una versión de la Propiedad Fuerte de Markov)

$$P(X_{T+1} = j | X_k = i_k \text{ para } 0 \leq k < T, X_T = i) = P(X_{T+1} = j | X_T = i).$$

10. Un proceso estocástico $(X_n, n \geq 0)$ con espacio de estados E es una cadena de Markov no-homogénea si satisface la propiedad de Markov

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P_{ij}^{(n,n+1)}$$

   donde las probabilidades de transición $P_{ij}^{(n,n+1)}$ dependen de n. Demuestre que el proceso bidimensional (X_n, n) es una cadena de Markov homogénea y obtenga sus probabilidades de transición. Usando esta formulación algunas propiedades de de las cadenas no-homogéneas pueden obtenerse de la teoría de las cadenas homogéneas.

11. Este problema es para hacerlo usando `R`. a) Considere la matriz de transición P_5. Usando `R` calcule $P_5^2,\ P_5^4,\ P_5^8,\ P_5^{16},\ P_5^{32}$. ¿Qué observa? Comente. b) Considere ahora un paseo al azar similar al que vimos en clase con $N = 4$, $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y matriz de transición P_6. Usando R calcule P_6^{20} y P_6^{21} ¿Qué diferencias observa? ¿Puede explicarlas?

12. Determine las clases de equivalencia y clasifique los estados en transitorios o recurrentes para una cadena de Markov con las siguientes matrices de transición. Determine también los subconjuntos cerrados e irreducibles del espacio de estados.

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13. Sean $Y_1, Y_2, \dots$ v.a.i.i.d. con valores en $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ con distribución común $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)$. Sea $X_0 = 0$ y definimos $X_{n+1} = X_n + Y_{n+1}$ (módulo 5). Demuestre que X_n es una cadena de Markov. Halle su espacio de estados y su matriz de transición. Observe que en esta matriz cada columna suma 1. Este tipo de matrices se conoce como *doblemente aleatorias*. *Observación:* Para $x, y \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, la suma módulo n se define como
$$x + y \text{ (módulo } n) = \begin{cases} x + y, & \text{si } x + y < n, \\ x + y - n & \text{si } x + y \geq n \end{cases}$$