Nombre: ____

1	2	3	T

Probabilidad
Primer Examen

Parte 1

1. (**4 ptos.**) Considera el siguiente experimento: se selecciona al azar, con probabilidad uniforme, un punto en un círculo de radio r. Podemos pensar que el punto se selecciona lanzando un dardo a una diana, que representa el círculo, pero sin apuntar a ningún lugar específico. Sea X la distancia del punto seleccionado al centro de la diana.

   a) Halla la función de distribución de X y su densidad.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la distancia X sea menor que la mitad del radio?¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor que αr para $0 < \alpha < 1$?

   c) Un jugador de dardos, apuntando al centro de la diana, tiene probabilidad $(b/r)^{1/2}$ de que el dardo caiga a una distancia menor o igual a b del centro de la diana. ¿Cómo es la densidad en este caso?

   d) ¿Cómo compararías a este jugador con la situación inicial? ¿Es mejor o peor? ¿Por qué?

   e) Calcula en ambos casos el valor esperado de la distancia al centro.

   f) ¿Cómo podría ser la f.d. de una persona que en el 90 % de los lanzamientos queda a una distancia no mayor que $0.1r$ del centro?

2. (**3 ptos.**) Decimos que los eventos E y F son condicionalmente independientes dado el evento G con $P(G) > 0$ si

$$P(E \cap F|G) = P(E|G)P(F|G).$$

   a) Demuestra que la condición de la definición es equivalente a $P(E|F \cap G) = P(E \cap G)$.

   b) Una caja contiene dos monedas, una de ellas es una moneda balanceada mientras que la otra tiene dos Soles. Escoges una moneda al azar y la lanzas dos veces. Definimos los eventos $A =$ el primer lanzamiento es Sol, $B =$ el segundo lanzamiento es Sol, $C =$ se seleccionó la moneda balanceada. Usando estos eventos demuestra que independencia condicional no implica independencia.

   c) Demuestra que independencia tampoco implica independencia condicional (Ayuda: Considera dos lanzamientos de una moneda balanceada y los eventos A y B del inciso anterior. Debes hallar un evento C adecuado en este caso).

3. (**3 ptos.**) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ una espacio de probabilidad y sea $(B_n)_{n\geq 1}$ una sucesión no creciente de conjuntos:

$$B_{n+1} \subseteq B_n.$$

   a) Definimos $C_n = B_n - B_{n+1}$. Demuestra que estos conjuntos son disjuntos y halla una expresión para B_n en términos de los C_n.

   b) Demuestra que

$$P(\lim_{n\to\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n).$$