Capítulo 1

Espacios de Probabilidad

1.1. Introducción

El objetivo de la Teoría de Probabilidad es desarrollar y estudiar modelos matemáticos para experimentos cuyos resultados no pueden predecirse con exactitud. Aún cuando la historia de la teoría de probabilidades tiene ya varios siglos, y muchos autores consideran que se inició con la correspondencia entre Blaise Pascal y Pierre de Fermat sobre juegos de azar en el siglo XVII, se puede decir que no fue hasta el siglo XX cuando esta teoría alcanzó un desarrollo notable.

Uno de los principales problemas por los cuales este desarrollo no ocurrió antes fue la ausencia de una axiomatización adecuada de las probabilidades, que le diese una base sólida y le permitiese desarrollarse al igual que otras ramas de la Matemática. En 1933, A. N. Kolmogorov propone una axiomatización usando las ideas de la Teoría de Medida, desarrollada a principios del siglo XX por H. Lebesgue. Esta axiomatización propone modelar los experimentos que tienen comportamiento aleatorio usando un espacio de medida. Aún cuando el desarrollo pleno de estas ideas está más allá del alcance del material que presentamos, vamos a considerar este enfoque axiomático en las próximas secciones, presentando numerosas aplicaciones de estas ideas.

Para comenzar haremos una breve revisión sobre las nociones básicas de la Teoría de Conjuntos y recordamos las principales operaciones que se definen entre ellos y sus propiedades.

1.2. Conjuntos

Definición 1.1 Un *conjunto* es una colección de objetos.

Los objetos que forman la colección pueden ser objetos físicos o no, como, por ejemplo, los carros matriculados en determinada ciudad o los tornillos producidos en una fábrica en un período dado de tiempo, en el primer caso, o las letras del alfabeto, los números naturales o los unicornios en el segundo. Usamos letras mayúsculas para denotar conjuntos: $A, B, C, \dots,$ etc.

Definición 1.2 Los objetos que forman la colección se conocen como los *elementos* del conjunto. Decimos que los elementos *pertenecen* al conjunto y usamos letras minúsculas para denotarlos: $a, b, c, \dots,$ etc.

Usamos la notación $a \in A$ para indicar que el elemento a pertenece al conjunto A y $b \notin B$ para indicar que b no pertenece a B.

Para describir un conjunto lo podemos hacer por extensión, es decir, listando todos los elementos del conjunto. En este caso la convención es escribir la lista de los elementos entre llaves $\{\}$. Por ejemplo $A = \{a, e, i, o, u\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$. La lista no debe tener elementos repetidos. También podemos describir un conjunto dando una regla que determine sin ambigüedades si un elemento dado pertenece o no al conjunto. Por ejemplo, podemos decir que A es el conjuntos de las vocales y B es el conjunto de los números pares positivos menores que 10.

1.3. Subconjuntos

Definición 1.3 Dados dos conjuntos A y B, si todo elemento de A también es elemento de B decimos que A es un *subconjunto* de B. Usamos la notación $A \subset B$ en este caso, o también $B \supset A$, y decimos que el conjunto B *contiene* al conjunto A.

Dos conjuntos son *iguales* si tienen los mismos elementos, es decir si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Ejemplos 1.1

1. Si A es el conjunto de las vocales y B es el conjunto de las letras del alfabeto, entonces $A \subset B$, ya que toda vocal es una letra.

2. El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es un subconjunto del conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, que a su vez es un subconjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

3. El conjunto de los tornillos defectuosos producidos por una máquina en un día dado es un subconjunto del conjuntos de todos los tornillos producidos por la máquina ese día.

Los conjuntos que consideramos son siempre subconjuntos de un conjunto mayor, que los contiene a todos, y que se conoce como el *espacio* o *universo*. Este conjunto incluye a todos los elementos que cualquier conjunto puede contener. Ejemplos de espacios que usaremos más adelante son los puntos del plano, los números reales, los objetos producidos por una fábrica en un día determinado o los pacientes de un hospital que padecen cierta enfermedad. Usualmente el espacio se denota por X o Ω y en este curso adoptaremos esta última notación.

Otro conjunto importante es el conjunto *vacío*, que se denota por $\emptyset$ o por $\varnothing$. Este es el conjunto que no contiene ningún elemento. Por convención, el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto: para todo conjunto A se tiene que $\emptyset \subset A$.

Propiedades

A continuación presentamos algunas propiedades de la relación de contención. Las demostraciones son sencillas y quedan a cargo del lector.

1. Todo conjunto es un subconjunto de sí mismo: Para cualquier conjunto A tenemos $A \subset A$.

2. $A \subset B$ y $B \subset A \Leftrightarrow A = B$.

3. **Transitividad** $A \subset B$ y $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

1.4. Operaciones con Conjuntos

Unión

Dados dos conjuntos A y B, su *unión*, que se denota por $A \cup B$, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o que pertenecen a B (o que pertenecen a ambos), es decir

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ó } x \in B \text{ o ambos.}$$

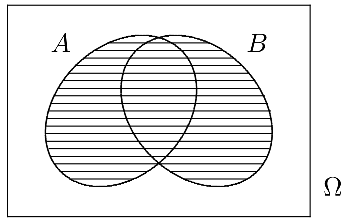


Figura 1.1: $A \cup B$.

Ejemplo 1.2
Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

Intersección

Dados dos conjuntos A, B definimos su *intersección*, que se denota por $A \cap B$, como el conjunto de los elementos comunes a ambos conjuntos:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ y } x \in B.$$

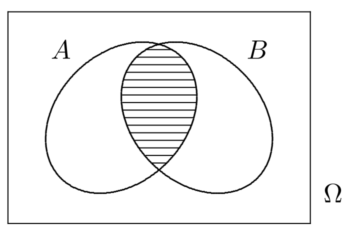


Figura 1.2: $A \cap B$.

Si dos conjuntos tienen intersección vacía, o sea que no tienen elementos en común, decimos que son *disjuntos* o *ajenos*.

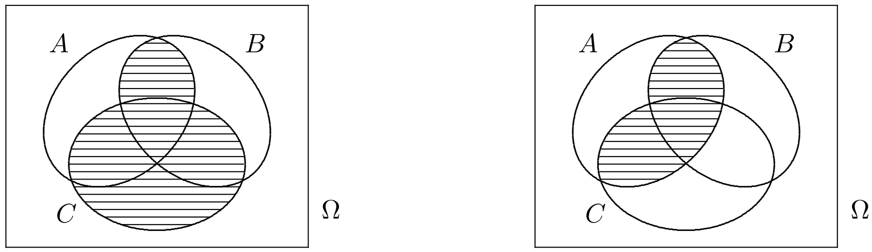
Ejemplo 1.3
Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ entonces $A \cap B = \{2, 4\}$.

Tanto la unión como la intersección tienen las siguientes propiedades:

Propiedad Conmutativa. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.
Propiedad Asociativa. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. La demostración de

estas propiedades es sencilla y queda a cargo del lector.

En la propiedad asociativa usamos los paréntesis para indicar el orden en el cual se realizan las operaciones. Teniendo en cuenta estas propiedades observamos que como no importa el orden en el cual realizamos las operaciones porque el resultado es el mismo, podemos escribir $A \cup B \cup C$ o también $A \cap B \cap C \cap D$ sin que haya ambigüedad sobre su significado. Sin embargo, si mezclamos las operaciones ya no es posible escribirlas en cualquier orden. Por ejemplo, una expresión como $A \cap B \cup C$ es imprecisa pues no sabemos si corresponde a $(A \cap B) \cup C$ o a $A \cap (B \cup C)$, y el resultado de estos dos casos puede ser distinto, como muestra la siguiente figura.



$(A \cap B) \cup C$ $\qquad$ $A \cap (B \cup C)$

Figura 1.3: $(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C)$.

La **propiedad distributiva** sirve para conectar las dos operaciones:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Veamos como ejemplo la demostración de la primera de estas expresiones.

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ y } x \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ y } (x \in B \text{ o } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ y } x \in B) \text{ o } (x \in A \text{ y } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \text{ o } (x \in A \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Otras propiedades de estas operaciones son las siguientes:

$$\begin{array}{ccc} A \cup A = A; & A \cup \emptyset = A; & A \cup \Omega = \Omega \\ A \cap A = A; & A \cap \emptyset = \emptyset; & A \cap \Omega = A \\ A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B; & & A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \end{array}$$

Complemento

Dado un conjunto A en un espacio Ω definimos el *complemento* de A, que denotamos por A^c, como el conjunto de los puntos de Ω que no pertenecen a A:

$$x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A, x \in \Omega$$

Queda claro de la definición que el complemento de un conjunto depende del espacio en el cual estemos trabajando.

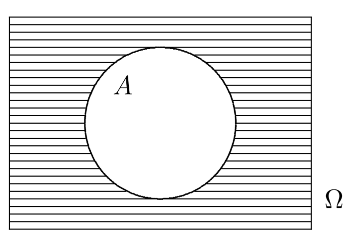


Figura 1.4: A^c.

Ejemplo 1.4
Si $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $A = \{2, 4, 6, 8\}$ entonces $A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Si en cambio $\Omega = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ entonces $A^c = \{0, 10\}$.

Como Ω tiene a todos los puntos, su complemento no tiene ninguno, es decir $\Omega^c = \emptyset$. Recíprocamente $\emptyset^c = \Omega$. Por otro lado, a partir de la definición es claro que para cualquier conjunto A, el conjunto de los elementos que no están en el complemento de A es exactamente A, es decir que si aplicamos dos veces la operación de hallar el complemento, regresamos al conjunto original:

$$(A^c)^c = A \tag{1.1}$$

Tenemos además que

$$A \cup A^c = \Omega; \qquad A \cap A^c = \emptyset$$

y

$$A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$$

Leyes de De Morgan

Estas leyes relacionan la complementación con las operaciones de unión e intersección.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \tag{1.2}$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c. \tag{1.3}$$

Como vemos, estas leyes son duales en el sentido de que si intercambiamos las operaciones de unión e intersección en una de ellas, obtenemos la otra. Estas relaciones son fáciles de demostrar. Veamos como ejemplo la primera de ellas. Si un punto x está en el complemento de la unión de A y B entonces, no puede estar ni en A ni en B, es decir, tiene que estar simultáneamente en el complemento de A y en el de B, y esto es exactamente el lado derecho de (1.2).

Para demostrar la segunda de estas relaciones vamos a usar la primera, que acabamos de demostrar. Como la relación (1.2) es cierta para cualquier par de conjuntos, la aplicamos a los conjuntos A^c y B^c:

$$(A^c \cup B^c)^c = (A^c)^c \cap (B^c)^c = A \cap B,$$

donde hemos usado la propiedad (1.1). Tomando complementos a ambos lados de esta ecuación y usando (1.1) de nuevo obtenemos

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$$

que es la relación (1.3).

Diferencia

Dados dos conjuntos A y B, la *diferencia* entre A y B, que denotamos $A \setminus B$, es el conjunto de los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.

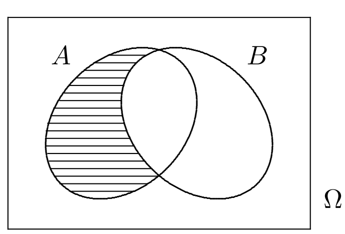


Figura 1.5: $A \setminus B$.

Ejemplo 1.5
Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ entonces $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$.

Esta operación no es conmutativa ni asociativa. Para ver esto consideremos los siguientes ejemplos:

- Tomemos los conjuntos A y B del ejemplo anterior. Ya sabemos que $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$ pero $B \setminus A = \{6, 8\}$, y vemos que estos conjuntos no son iguales. En consecuencia la operación de diferencia no es conmutativa.
- Tomemos A, B como antes y $C = A$, entonces
$$(A \setminus B) \setminus C = \emptyset$$
porque todos los elementos de $A \setminus B$ son elementos de A. Por otro lado,
$$A \setminus (B \setminus C) = A$$
porque $B \setminus C = B \setminus A = \{6, 8\}$ y ninguno de estos elementos está en A. En consecuencia esta operación no es asociativa.

Las siguientes relaciones son fáciles de demostrar:
$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B), \qquad A^c = \Omega \setminus A$$

Diferencia simétrica

Dados dos conjuntos A y B definimos su *diferencia simétrica* y lo denotamos por $A \triangle B$ como el conjunto de puntos que está en alguno de los conjuntos pero no en ambos, es decir
$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

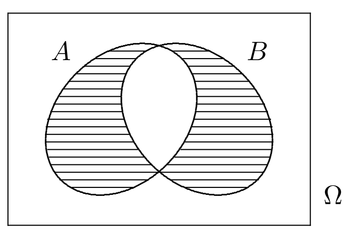


Figura 1.6: $A \triangle B$.

Ejemplo 1.6
Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ entonces $A \triangle B = \{1, 3, 5, 6, 8\}$.

Operaciones con Grandes Colecciones de Conjuntos

Hemos considerado las operaciones de unión e intersección esencialmente como operaciones binarias, pero también hemos visto que propiedad asociativa nos permite considerar fácilmente la unión o intersección de una colección finita de conjuntos. Si $A_1, A_2, \dots A_n$ son una colección de conjuntos, podemos escribir
$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \quad \text{y} \quad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$
sin que haya ambigüedad sobre su significado. Estas expresiones se escriben usualmente de manera abreviada:
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{y} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Si $I = \{1, 2, \dots, n\}$ denota al conjunto de índices, también podemos escribir $\cup_{i\in I} A_i$ y $\cap_{i\in I} A_i$.

Las operaciones de unión e intersección pueden extenderse a colecciones de conjuntos de tamaño arbitrario. Sea I un conjunto cualquiera de índices y sea $A_i,\ i \in I$ una colección de conjuntos. Definimos su unión e intersección por

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_i \text{ para algún índice } i \in I\}$$

y

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_i \text{ para todo índice } i \in I\}.$$

Si está claro cuál es el conjunto de índices I, escribimos abreviadamente $\cup_i A_i$ y $\cap_i A_i$. Si el conjunto de índices es $\mathbb{N}$ escribimos $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ y $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$.

Finalmente, observamos que las leyes de De Morgan también valen en este contexto:

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c; \qquad \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

1.5. Espacio Muestral. Eventos.

Luego de esta revisión sobre las ideas básicas de la teoría de conjuntos, regresamos al problema de construir modelos matemáticos para experimentos aleatorios.

Cada resultado posible de un experimento aleatorio será llamado *evento elemental* y el conjunto de los eventos elementales será el *espacio muestral*. Usualmente, denotaremos con Ω el espacio muestral, y mediante ω los eventos elementales (o puntos de Ω).

Veamos algunos ejemplos de experimentos aleatorios y sus espacios muestrales asociados.

1. En una fábrica se toma uno de los artículos producidos y se prueba para determinar si es defectuoso. En este caso podemos considerar $\Omega = \{B, D\}$, donde B indica bueno y D defectuoso. Si en cambio se extraen n artículos y se prueban, podemos considerar $\Omega = \{(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) : \epsilon_i = 0 \text{ ó } 1; i = 1, \dots, n\}$ donde $\epsilon_i = 0$ indica que el i-ésimo artículo es bueno y $\epsilon_i = 1$ indica que es defectuoso. Es decir, Ω es el conjunto de n-uplas o vectores de dimensión n de ceros y unos. En este caso Ω consta de 2^n eventos elementales y, en particular, $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i$ representa el número de objetos defectuosos del evento elemental $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$.

2. En un punto de una carretera contamos el número de vehículos que pasan durante un cierto lapso de tiempo. En este caso podemos tomar $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$, es decir el conjunto de los enteros no-negativos. Podemos, sin embargo, tomar otros conjuntos como espacio muestral en este caso. Por ejemplo, si sabemos que el número de vehículos considerados no supera los mil, podemos considerar $\Omega_1 = \{n : 0 \le n \le 1,000\}$, aunque no necesariamente del hecho de que Ω_1 sea subconjunto de Ω, se concluye que la descripción del experimento aleatorio mediante Ω_1 sea más simple que la que se obtiene usando Ω.

3. En una sucesión de cálculos realizados con una computadora, observamos los primeros k dígitos no tomados en cuenta al truncar los resultados de las operaciones en una cierta cifra decimal. En este caso podemos tomar como espacio muestral $\Omega = \{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in \mathbb{Z},\ 0 \le a_i \le 9\}$

4. En una fábrica de componentes electrónicos se eligen varios al azar y se conecta cada uno de ellos hasta que se daña, observando en cada caso el tiempo de duración. Si se trata de un solo componente podemos tomar
$$\Omega = \{t : t \in \mathbb{R},\ t \ge 0\}$$
es decir, el conjunto de números reales no-negativos. Si se consideran n componentes, podemos tomar
$$\Omega = \{(t_1, t_2, \dots, t_n) : t_i \in \mathbb{R},\ t_i \ge 0\}.$$

5. Se lanza un dado repetidamente y se cuenta el número de lanzamientos hasta que salga el 6 por primera vez. En este caso el espacio muestral es el conjunto de los números naturales:

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

6. Se mide la presión atmosférica y la temperatura en una estación meteorológica. Aquí,

$$\Omega = \{(p, t) : p > 0,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

7. Se escoge un punto al azar lanzando un dardo a un disco de radio un metro. En este caso el espacio muestral es el conjunto de puntos del plano que estan dentro de la circunferencia de radio 1:

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

En la práctica, al realizar un experimento nos interesa con frecuencia saber si algún subconjunto de Ω ha ocurrido. A estos subconjuntos los llamaremos *eventos* o *sucesos*. Por ejemplo, en el ejemplo 1 podemos estar interesados en el subconjunto: "entre los n artículos extraídos hay d defectuosos", es decir, en el subconjunto de Ω definido por

$$\{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) : \epsilon_i = 0 \text{ ó } 1, \sum_1^n \epsilon_i = d\}.$$

En el ejemplo 3 nos interesará saber, por ejemplo, si la primera cifra no tomada en cuenta al truncar es mayor o igual que 5, o sea,

$$\{(a_1, \dots, a_k)\} : 0 \leq a_i \leq 9,\ a_1 \geq 5\}.$$

Análogamente, en la situación planteada en 6, nos interesarán eventos del tipo: "la presión está comprendida entre p_1 y p_2 y la temperatura entre t_1 y t_2", es decir

$$\{(p_i, t_i) : p_1 \leq p \leq p_2,\ t_1 \leq t \leq t_2\}.$$

Estamos interesados, por lo tanto, en considerar familias de subconjuntos de Ω, es decir, familias $\mathcal{A}$ de eventos.

Definición 1.4 Si al realizar un experimento obtenemos como resultado el evento elemental ω, decimos que el evento $A \subset \Omega$ ha ocurrido si $\omega \in A$

Veamos qué condiciones debe cumplir la familia de eventos $\mathcal{A}$. En primer lugar

a. $\boxed{\Omega \in \mathcal{A}}$

es decir que al realizar el experimento el resultado es un elemento de Ω. A Ω lo llamaremos *evento cierto*.

b. $\boxed{A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}}$

donde $A^c = \Omega - A = \{\omega : \omega \in \Omega,\ \omega \notin A\}$ es el complemento de A.

Es decir, si A es un evento, pediremos que "no ocurre A" también sea un evento.

Finalmente, la familia $\mathcal{A}$ también debe satisfacer que si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ son eventos, "ocurre alguno de los A_n" también es un evento, o sea

c. $\boxed{A_n \in \mathcal{A} \ (n = 1, 2, \dots) \ \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}}$

Definición 1.5 Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω que satisface las condiciones a, b y c se llama una σ-*álgebra* de subconjuntos o partes de Ω.

En adelante supondremos que las familias de eventos son σ-álgebras. Las siguientes propiedades son consecuencias inmediatas de la definición:

1. El conjunto vacío, $\emptyset$, es un evento, ya que $\emptyset = \Omega^c$.

2. $A_1, A_2, \dots A_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{k} A_n \in \mathcal{A}$. Basta considerar $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$ y aplicar la propiedad anterior y c.

3. $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. En efecto, por las leyes de de Morgan,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c$$

   y basta ahora aplicar b y c.

Ejemplos.

8. Para cualquier conjunto Ω, la σ-álgebra más sencilla es la σ-álgebra trivial $\mathcal{T} = \{\Omega, \emptyset\}$. La mayor σ-álgebra de subconjuntos de Ω es $\mathcal{P}(\Omega)$, el conjunto de partes de Ω, es decir, la colección de todos los subconjuntos de Ω. Cualquier otra σ-álgebra debe contener a $\mathcal{T}$ y estar contenida en $\mathcal{P}(\Omega)$.

   Si Ω es finito o numerable usaremos como σ-álgebra a $\mathcal{P}(\Omega)$.

9. *Muestreo con reposición.* De la producción de una fábrica se extrae un artículo al azar y se determina si es bueno o defectuoso (B o D, respectivamente). Se devuelve este artículo al stock y se extrae de nuevo al azar un artículo, que puede ser el mismo. Esta operación se repite una vez más, de modo que en total se extraen tres.

   El espacio muestral es:

$$\Omega = \{BBB, BBD, BDB, DBB, BDD, DBD, DDB, DDD\}$$

   Observamos que hay 2^3 eventos elementales, ya que en cada una de las tres extracciones hay dos resultados posibles. Consideramos los siguientes eventos:

   A_1: "El segundo artículo resultó bueno"

   A_2: "Se obtuvo un solo defectuoso en las tres extracciones".

   A_3: "No hubo defectuosos".

   Los eventos definidos son:

$$A_1 = \{BBB, BBD, DBB, DBD\} \quad A_2 = \{BBD, BDB, DBB\} \quad A_3 = \{BBB\}$$

   El número de eventos elementales incluidos en A_1 es 2^2 ya que el resultado de la segunda extracción está fijo. El evento A_2 contiene 3 puntos muestrales, ya que hay tres lugares posibles para el objeto defectuoso en la muestra. Podemos ahora combinar estos eventos utilizando operaciones de conjuntos. Tenemos, por ejemplo,

$$A_1 \cap A_2 = \{BBD, DBB\}$$
$$A_1^c \cup A_2^c = \{BBB, BDB, BDD, DBD, DDB, DDD\}$$
$$A_1 \cap A_2^c = \{BBB, DBD\}$$

10. *Muestreo sin reposición.* De una población de N artículos entre los cuales hay n defectuosos, se extraen sucesivamente r sin reposición y se cuenta el número de defectuosos en la muestra. El espacio muestral contiene todos los subconjuntos de r elementos tomados entre los N dados.

1.6. Espacios de Probabilidad.

Definición 1.6 Sean Ω un espacio muestral y $\mathcal{A}$ una familia de eventos de Ω, es decir, una σ-álgebra de subconjuntos de Ω. Estamos interesados en asignar a cada evento $A \in \mathcal{A}$ un número real $P(A)$, que llamaremos la probabilidad de A, de modo tal que se cumplan las siguientes condiciones:

1. $\boxed{P(A) \geq 0 \text{ para todo } A \in \Omega}$

   La probabilidad de un evento cualquiera es un número real no negativo.

2. $\boxed{P(\Omega) = 1}$

   El evento cierto tiene probabilidad igual a 1.

3. Si $A_n \in \mathcal{A}$ para $n = 1, 2, \dots$ son eventos disjuntos dos a dos, es decir, tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces

$$\boxed{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)}$$

Definición 1.7 Una terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, formada por un espacio muestral Ω, una familia $\mathcal{A}$ de eventos y una probabilidad P se llama un *espacio de probabilidad*.

El problema de cómo definir la función P, o sea, de cómo asignar una probabilidad a cada evento, debe ser resuelto de acuerdo a las condiciones concretas de cada experimento aleatorio en consideración.

1.7. Algunas Consecuencias de la Definición.

Veamos a continuación algunas consecuencias de la definición anterior. Usaremos la notación $A + B$ para indicar la unión de los conjuntos A y B cuando ellos son disjuntos.

(1) $P(\emptyset) = 0$.

En efecto, consideremos $A_1 = \Omega$ y $A_i = \emptyset$, $i = 2, 3, \dots$ Entonces $A_i \in \mathcal{A}$ cualquiera que sea i y además si $i \neq j$ se tiene $A_i \cap A_j = \emptyset$. Resulta

$$P(\Omega) = P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(\Omega) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i).$$

Luego

$$\sum_{i=2}^{\infty} P(A_i) = 0$$

y como $P(A_i) \geq 0$ para todo i se tiene que $P(A_i) = 0$ para $i \geq 2$. En consecuencia $P(\emptyset) = 0$.

(2) $A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$.

Basta considerar $A_i = \emptyset,\ i \geq 3$ y aplicar la condición 3 de la definición de espacio de probabilidad. De manera similar se puede demostrar que P es finitamente aditiva: Si $A_1, \dots, A_n$ son disjuntos dos a dos entonces

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

(3) $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Como $A^c \cup A = \Omega$ y $A^c \cap A = \emptyset$ se tiene

$$P(A^c) + P(A) = 1.$$

(4) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow P(A_1) \leq P(A_2)$.

Como $A_2 = A_1 + (A_2 \cap A_1^c)$ (ver figura 1.7) resulta

$$P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 \cap A_1^c)$$

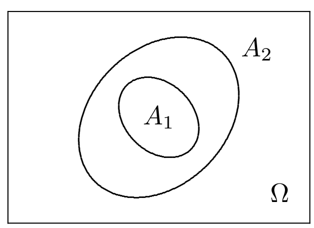


Figura 1.7

y en consecuencia

$$P(A_1) \leq P(A_2) \text{ ya que } P(A_2 \cap A_1^c) \geq 0.$$

(5) $P(A) \leq 1$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Esto es consecuencia inmediata del punto anterior al considerar que $A \subset \Omega$.

(6) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Sean

$$B_1 = A_1 \quad \text{y} \quad B_n = A_n \cap A_{n-1}^c \ \text{ si } n > 1,$$

resulta (ver figura 1.8)

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} B_i$$

y entonces

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &= P(\sum_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} P(\sum_{i=1}^{n} B_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n). \end{aligned}$$

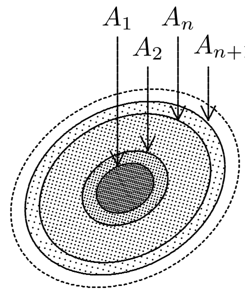


Figura 1.8

(7) $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots \Rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.
Como la sucesión $\{A_n^c\}$ es creciente, usando (7) obtenemos

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = 1 - \lim_{n\to\infty}(1 - P(A_n)) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

(8) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$.
En efecto, considerando que (ver figura 1.9)

$$A_1 \cup A_2 = A_1 + (A_2 \cap A_1^c) \quad \text{y} \quad A_2 = (A_1 \cap A_2) + (A_1^c \cap A_2)$$

después de aplicar la propiedad (2) a ambas igualdades y restar resulta la proposición (6).

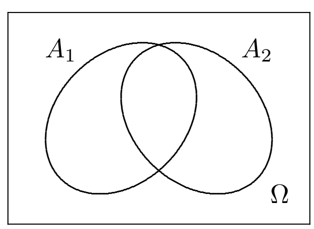


Figura 1.9

(9) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.
Para ver esto apliquemos (8) a los eventos $A \cup B$ y C, obteniendo

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$$

y de manera similar

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P((A \cup B) \cap C) &= P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Reemplazando las dos últimas expresiones en la primera obtenemos el resultado.

(10) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{n} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$.

Para demostrar esta proposición procedemos por inducción completa en n siguiendo la misma idea que en la anterior, que corresponde al caso $n = 3$. Para $n = 2$ es la propiedad (8).

Suponemos entonces que el resultado es cierto para n y queremos deducir que también lo es para $n + 1$. ¿Qué significa que el resultado es cierto para n? Significa que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \tag{1.4}$$

Queremos deducir de (1.4) que también es válida una fórmula análoga para

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right).$$

Pongamos entonces $B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y apliquemos la propiedad (6) a

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P(B \cup A_{n+1}) = P(B) + P(A_{n+1}) - P(B \cap A_{n+1}) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})). \end{aligned} \tag{1.5}$$

El primero de estos tres términos lo reemplazamos utilizando (1.4) y el último también sólo que, en lugar de A_i tenemos $A_i \cap A_{n+1}$. Veamos qué nos queda; en primer lugar,

$$P(A_1) + \cdots + P(A_n) + P(A_{n+1}),$$

los primeros n provenientes del primer sumando en (1.5) y el último del segundo sumando. En segundo lugar

$$-\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) - \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_{n+1}) = -\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n+1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}).$$

Aquí el primer sumando viene del primero de (1.5) y el segundo, del tercero de (1.5). De la misma manera, para $k \le n$, queda una suma de la forma

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) - (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1} \le n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{n+1}) \\ = (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n+1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}). \end{aligned}$$

Finalmente, para $k = n + 1$, no tenemos ningún término en el primer sumando de (1.5) y tenemos uno sólo en el tercero que es:

$$(-1)^{n+2} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}).$$

Juntando todos los términos resulta

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n+1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

Observación 1.1 Consideremos la expresión (1.4). Si en lugar de usar todos los términos en el lado derecho de la identidad usamos solo algunos, obtenemos una aproximación a la probabilidad $P(\cup_{i=1}^n A_i)$. Si la aproximación es por exceso o por defecto depende del signo del primer sumando no tomado en cuenta. Si éste es de signo negativo, la aproximación es por exceso mientras que si es positivo la aproximación es por defecto. Así,

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) \tag{1.6}$$

y más generalmente, para cualquier a tal que $2a+1\leq n$,

$$\sum_{k=1}^{2a}(-1)^{k+1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{k=1}^{2a+1}(-1)^{k+1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} P(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) \tag{1.7}$$

Estas se conocen como las desigualdades de Bonferroni. La primera de estas desigualdades, que corresponde al lado derecho de la ecuación (1.6), es conocida como la propiedad de subaditividad de las probabilidades, que es válida para cualquier colección de conjuntos $A_1,\dots,A_n$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

1.8. Casos Particulares

1.8.1. Probabilidades en Espacios Finitos.

Sean $\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_m\}$ un conjunto finito y $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$ la familia de todos los subconjuntos de Ω. Elijamos m números reales $p_i,\ i=1,2,\dots m$, tales que

$$\begin{cases} p_i\geq 0, & \text{para todo } i,\\ \displaystyle\sum_{i=1}^m p_i = 1. \end{cases}$$

Poniendo $P(\omega_i)=p_i$ $(i=1,2,\dots m)$, queda definida la probabilidad para todo evento $A\in\mathcal{A}$ mediante la asignación

$$P(A)=\sum_{i:\omega_i\in A} p_i.$$

Un caso particular de interés es aquel en el cual $p_i=1/m$ para todo i, y ahora si A tiene n elementos

$$P(A)=\frac{n}{m},$$

es decir que si todos los eventos elementales son igualmente probables, la probabilidad de un evento A es el cociente entre el número de elementos que pertenecen a A y el número total de elementos de Ω. Esta definición se conoce como la *definición clásica* y fue propuesta, entre otros, por Laplace. En la sección 1.12 incluimos algunos comentarios al respecto.

En una situación como la descrita, en la cual todos los resultados posibles del experimento tienen la misma probabilidad de ocurrir, el problema de calcular la probabilidad de un evento se reduce a contar cuántos resultados posibles tiene el experimento y cuántos de estos pertenecen al evento que nos interesa. En el próximo capítulo estudiaremos algunas técnicas combinatorias que facilitan estos cálculos.

En un problema específico, podemos determinar si los resultados posibles tienen la misma probabilidad por consideraciones de simetría sobre el experimento que estamos analizando. Por ejemplo, si se trata del lanzamiento de un dado, en principio no hay razones para suponer que alguna cara tenga mayor o menor probabilidad de ocurrir que las demás, y por lo tanto asumimos como modelo que todos los resultados son equiprobables. Algo similar sucede con el lanzamiento de una moneda, el juego de ruleta o la extracción de una carta de un paquete que ha sido bien barajado.

Por supuesto que en la práctica esto puede no ser cierto: el dado puede no ser perfectamente simétrico, o la ruleta puede estar desbalanceada y favorecer ciertos resultados. Para determinar si este es el caso existen procedimientos estadísticos que permiten contrastar la hipótesis de simetría, pero por los momentos no nos ocuparemos de este problema.

Veamos algunos ejemplos.

1. De los números del 1 al 10 escogemos tres al azar, en orden y sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 1, 2 y 3, en este orden?

   En este problema podemos describir el espacio muestral como el conjunto de todos los vectores de tres componentes tomadas de los enteros del 1 al 10, sin repetir ninguna componente.

   $$\Omega = \{(a, b, c) : 1 \leq a, b, c \leq 10, \text{ distintos}\}.$$

   Como estamos muestreando al azar, todos los vectores del espacio tienen la misma probabilidad.

   El evento que nos interesa corresponde a un resultado particular, el vector $(1, 2, 3)$. Por lo tanto tenemos que contar cuantos elementos hay en Ω para saber cuál es la probabilidad de cada uno de ellos. La primera componente del vector la podemos escoger de 10 maneras. Para la segunda sólo tenemos 9 posibilidades, porque no podemos repetir el número que ocupa la primera componente. Finalmente, para la tercera hay 8 posibilidades. Por lo tanto tenemos

   $$10 \times 9 \times 8 = 720$$

   puntos en el espacio muestral. Como todos tienen la misma probabilidad, la respuesta al ejemplo es $1/720$.

2. Si los números del ejemplo anterior se escogen con reposición ¿Cuál es la probabilidad de obtener 1, 2 y 3, en este orden?

   En este caso el espacio muestral incluye vectores con componentes repetidas:

   $$\Omega = \{(a, b, c) : 1 \leq a, b, c \leq 10\}.$$

   Para cada componente tenemos ahora 10 posibles valores, de modo que el espacio tiene $10^3 = 1,000$ puntos. Como todos tienen la misma probabilidad, la respuesta en este caso es $1/1,000 = 0.001$.

3. Si lanzamos dos dados, ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 7?

   Vamos a suponer, para facilitar el razonamiento, que lanzamos un dado primero y luego el otro. Por lo tanto un espacio muestral adecuado para este experimento es el conjunto de pares ordenados formados con los enteros del 1 al 6, con reposición:

   $$\Omega = \{(a, b), 1 \leq a, b \leq 6\}.$$

   En este caso todos los eventos elementales de Ω tienen la misma probabilidad: $1/36$. Los resultados que tienen componentes cuya suma es 7 son

   $$(1, 6); \quad (2, 5); \quad (3, 4); \quad (4, 3); \quad (5, 2); \quad (6, 1).$$

   Por lo tanto la probabilidad de que la suma de los dados sea 7 es

   $$6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}.$$

En este ejemplo podemos considerar otro espacio muestral: el conjunto de las sumas posibles

$$\Omega' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

El problema para usar este espacio como base para nuestro análisis es que sus elementos no son equiprobables. Por ejemplo, para tener una suma de 2, ambos dados tienen que salir 1, lo cual tiene probabilidad 1/36, y acabamos de ver que la probabilidad de que la suma sea 7 es 1/6.

4. Si lanzamos dos monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener un águila y un sol?

   Este problema lo hemos incluido para resaltar una dificultad importante que se ejemplifica con el razonamiento de D'Alembert, famoso matemático francés del siglo XVIII, quien argumentó que sólo hay tres casos posibles en esta situación:

   (1) dos aguilas, (2) dos soles, (3) un águila y un sol,

   y concluyó que la probabilidad de obtener un águila y un sol es 1/3. Como hemos visto, el último caso en realidad debe separarse en dos:

   (3a) La primera moneda es águila y la segunda es sol.

   (3b) La primera moneda es sol y la segunda es águila.

   Esto es obvio si lanzamos una moneda tras otra y no simultáneamente, o si las monedas son distinguibles. Por lo tanto la respuesta correcta es $2/4 = 1/2$. Haremos una observación importante sobre este caso en la sección 1.12.

5. Si lanzamos una moneda dos veces y una de las veces sale águila ¿Cuál es la probabilidad de que el otro lanzamiento haya sido sol?

   Para este ejemplo el espacio muestral es

   $$\Omega = \{SS, SA, AS, AA\}$$

   y todos los resultados tienen igual probabilidad de ocurrir. Si sabemos que uno de los lanzamientos fue A, nos quedan tres resultados posibles y de ellos en dos casos el otro lanzamiento es S. Por lo tanto la probabilidad es 2/3.

   La situación sería distinta si nos dicen que el primer lanzamiento resultó A, pues en este caso el segundo tiene dos posibilidades A y S con igual probabilidad, y la respuesta en este caso sería que la probabilidad es 1/2.

1.8.2. Probabilidades en Espacios Numerables.

Un caso similar al desarrollado en la sección anterior se presenta cuando Ω es un conjunto infinito numerable:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m, \dots\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \quad \text{y} \quad P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i,$$

donde los números p_i verifican

$$\begin{cases} p_i \geq 0, \quad \text{para todo } i, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1. \end{cases}$$

Claramente en este caso no es posible que los p_i sean todos iguales, ya que de ser así no pueden satisfacer las condiciones anteriores. En el capítulo 3 consideraremos en más detalle estos espacios y los del ejemplo anterior.

Veamos un ejemplo.

1. Lanzamos una moneda hasta que salga 'Aguila' por primera vez. Los resultados posibles de este experimento son los números naturales: $\Omega = \mathbb{N}$. La probabilidad de obtener 'Aguila' en el primer lanzamiento es $1/2$. La probabilidad de que salga 'Sol' en el primer lanzamiento y 'Aguila' en el segundo es $(1/2) \times (1/2) = 1/4$. La probabilidad de tener 'Sol' dos veces y luego 'Aguila' es $1/8$ y así sucesivamente. Vemos que la probabilidad de obtener 'Aguila' por primera vez en el n-ésimo lanzamiento es $p_n = 1/2^n$. Tenemos que verificar que esta asignación define una probabilidad y para esto es necesario que

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

   Recordamos la fórmula para una serie geométrica:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r} \tag{1.8}$$

   y multiplicando ambos lados por r obtenemos

$$r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots = \frac{r}{1-r} \tag{1.9}$$

   para $-1 < r < 1$.

   Si ponemos $r = 1/2$ en (1.9) obtenemos que la suma $\sum p_n$ vale 1. Además de comprobar que p_n define una probabilidad sobre Ω, este resultado muestra que con probabilidad 1 obtendremos un 'Aguila' en un número finito de lanzamientos, o equivalentemente, que la probabilidad de no obtener nunca 'Aguila' en una sucesión de lanzamientos de una moneda balanceada es 0.

   Sea ahora A el evento 'Aguila se obtiene por primera vez en un número par de lanzamientos'. Tenemos que $A = \{2, 4, 6, \dots\}$ y

$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{4} + \Big(\frac{1}{4}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{4}\Big)^3 + \cdots$$

   Poniendo $r = 1/4$ en la ecuación (1.9) obtenemos que

$$P(A) = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3},$$

   de modo que la probabilidad de que la primera 'Aguila' salga en un número par de lanzamientos es $1/3$ y en un número impar, $2/3$.

1.8.3. Probabilidades en Espacios No Numerables.

El caso de los espacios no numerables es más complicado y no lo vamos a poder considerar en todo detalle, pues carecemos de las herramientas matemáticas necesarias. Sin embargo, vamos a analizar un ejemplo sencillo que permite presentar las ideas y resaltar las dificultades que se presentan en este caso.

Consideremos $\Omega = [0, 1]$ y sea el experimento que consiste en escoger al azar un número en el intervalo $[0, 1]$. No podemos, en este caso, utilizar el procedimiento que usamos para los espacios numerables ya que en el caso continuo, una probabilidad uniforme no puede asignarle probabilidad positiva a un conjunto de un solo elemento, es decir, si $x \in [0, 1]$, necesariamente $P(\{x\}) = 0$ (ver ejercicio 34 en la sección 1.13).

En consecuencia, nos enfocamos en la probabilidad de que el número seleccionado al azar caiga dentro de un intervalo de valores y por uniformidad, la probabilidad de escoger un número en el intervalo $[c, d] \subset [0, 1]$ debe depender únicamente de la longitud del intervalo y no de su ubicación, es decir, debe ser invariante bajo traslaciones. No es difícil probar que una tal probabilidad P debe verificar

$$P([a, b)) = b - a \tag{1.10}$$

cualquiera que sea el intervalo $[a, b), 0 \leq a < b < 1$. Una manera de hacerlo es la siguiente: si P tiene esa propiedad, para n natural se tiene

$$P\left(\left[0, \frac{1}{n}\right)\right) = P\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)\right) = \cdots = P\left(\left[\frac{n-1}{n}, 1\right)\right)$$

y como la suma de estas n probabilidades es $P(\Omega) = 1$ resulta que cada una de ellas es $1/n$.

Si m y n son enteros positivos, $m < n$, resulta que

$$P\left(\left[0, \frac{m}{n}\right)\right) = P\left(\left[0, \frac{1}{n}\right)\right) + \cdots + P\left(\left[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}\right)\right) = \frac{m}{n}.$$

Si x es un número real cualquiera perteneciente al intervalo $(0, 1)$, consideremos dos sucesiones de números racionales

$$\frac{m_k}{n_k} < x < \frac{m'_k}{n'_k}, \quad \frac{m_k}{n_k} \to x, \quad \frac{m'_k}{n'_k} \to x, \quad k \to \infty,$$

y se tiene

$$\frac{m_k}{n_k} = P\left(\left[0, \frac{m_k}{n_k}\right)\right) \leq P([0, x)) \leq P\left(\left[0, \frac{m'_k}{n'_k}\right)\right) = \frac{m'_k}{n'_k}.$$

Pasando al límite para $k \to \infty$ resulta

$$x \leq P([0, x)) \leq x \quad \Rightarrow \quad P([0, x)) = x.$$

Por la observación que hicimos al inicio de esta sección, tenemos que, en este caso,

$$P([0, x)) = P([0, x]) = P((0, x]) = P((0, x)).$$

Como consecuencia de estos resultados vemos que la probabilidad de cada intervalo es su longitud:

$$P([c, d]) = d - c, \qquad \text{para todo } [c, d] \subset [0, 1]. \tag{1.11}$$

¿Qué ocurre si tenemos un subconjunto cualquiera $A \subset [0, 1]$ y queremos calcular $P(A)$? Lo que estamos planteando es cómo extender la noción de 'longitud' a cualquier subconjunto de $[0, 1]$. Desafortunadamente, no es posible definir una medida de probabilidad sobre todos los subconjuntos de $[0, 1]$ que satisfaga la propiedad (1.11). La demostración de este hecho está fuera de los objetivos de este curso, pero esto implica que hay conjuntos que no son 'medibles', es decir, a los cuales no podemos asignarles una probabilidad.

Por lo tanto, es necesario restringirse a una clase más pequeña $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $[0, 1]$, que sea una σ-álgebra, es decir, que satisfaga las condiciones de la definicióm 1.5 y contenga a los subintervalos de $[0, 1]$. Una posibilidad es usar la clase de los conjuntos borelianos en $[0, 1]$, que es la menor σ-álgebra generada por los subintervalos de $[0, 1]$. En la próxima sección nos detendremos en este punto. Sin embargo, es importante observar que en este caso hay otras σ-álgebras que pueden considerarse.

1.9. σ-Algebras

Vamos a considerar en mayor detalle el problema que presentamos en la sección anterior. Sea Ω un espacio muestral y consideremos el conjunto de partes de Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$, que contiene todos los subconjuntos de Ω y que, como hemos visto anteriormente, es una σ-álgebra. De hecho, es la mayor σ-álgebra de subconjuntos de Ω en el sentido de que cualquier otra σ-álgebra $\mathcal{F}$ está contenida en el conjunto de partes: $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

En la próxima proposición mostramos que la intersección de cualquier colección de σ-álgebras es también una σ-álgebra.

Proposición 1.1 *Sea T un conjunto de índices cualquiera y sea $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ una colección de σ-álgebras de subconjuntos del espacio muestral Ω. Sea $\mathcal{G}$ la intersección de esta colección:*

$$\mathcal{G} = \bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t$$

Entonces $\mathcal{G}$ es una σ-álgebra.

Demostración. Tenemos que demostrar que $\mathcal{G}$ satisface las tres propiedades de la definición 1.5. En primer lugar, $\Omega \in \mathcal{F}_t$ para todo t, pues $\mathcal{F}_t$ es una σ-álgebra, y en consecuencia

$$\Omega \in \bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t = \mathcal{G}.$$

En segundo lugar consideremos $A \in \mathcal{G}$, entonces para todo $t \in T$ se tiene que $A \in \mathcal{F}_t$ y por la propiedad b de la definición 1.5 se tiene que $A^c \in \mathcal{F}_t$ para todo t. En consecuencia

$$A \in \mathcal{G} \Rightarrow A^c \in \mathcal{G}.$$

Finalmente, si $A_n, n \geq 1$ es una colección de eventos en $\mathcal{G}$, un argumento similar muestra que $\cup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}_t$ para todo $t \in T$. En consecuencia $\cup_{n \geq 1} A_n$ va a estar en la intersección de todas estas σ-álgebras, es decir,

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t = \mathcal{G}.$$

■

Con este resultado podemos introducir la siguiente definición.

Corolario 1.1 *Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de Ω. Existe una σ-álgebra, que denotamos por $\sigma(\mathcal{C})$, que contiene a $\mathcal{C}$ y es la menor entre todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{C}$ en el siguiente sentido: si $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ entonces $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.*

Demostración. Consideremos la colección de todas las σ-álgebras de subconjuntos de Ω que contienen a $\mathcal{C}$. Esta clase no es vacía pues ya vimos que $\mathcal{P}(\Omega)$ está en ella. $\sigma(\mathcal{C})$ es la intersección de todas las σ-álgebras en esta colección. La proposición anterior demuestra que $\sigma(\mathcal{C})$ es una σ-álgebra y al ser la intersección de todas las que contienen a $\mathcal{C}$, contiene a $\mathcal{C}$ y es la menor de todas. ■

Definición 1.8 La σ-álgebra $\sigma(\mathcal{C})$ se conoce como la σ-álgebra generada por $\mathcal{C}$.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.7
Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\mathcal{C} = \{\{3\}\}$. Es fácil verificar que la σ-álgebra generada por $\mathcal{C}$ está dada por

$$\sigma(\mathcal{C}) = \{\Omega, \varnothing, \{3\}, \{1, 2, 4, 5, 6\}\}.$$

En efecto, toda σ-álgebra debe incluir como elementos a Ω y $\varnothing$, por las dos primeras condiciones de la definición 1.5. También tiene que contener a $\mathcal{C}$, es decir, debe tener como elemento al conjunto $\{3\}$ y por la segunda propiedad de la definición también debe contener a su complemento, $\{1, 2, 4, 5, 6\}$. Solo falta verificar que esta colección de conjuntos satisface las condiciones de una σ-álgebra, lo cual es sencillo.

Ejemplo 1.8
En el mismo contexto del ejemplo anterior, si tenemos $\mathcal{C} = \{\{3\}, \{4\}\}$ entonces

$$\sigma(\mathcal{C}) = \{\Omega, \varnothing, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 5, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}\}.$$

Un argumento similar al del ejemplo anterior muestra que ésta es la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$.

Ejemplo 1.9 (La σ-álgebra de Borel)
Esta σ-álgebra tiene una importancia central en la teoría de la medida y se define como la menor σ-álgebra que contiene a los subintervalos de $[0,1]$. Usualmente se denota por $\mathcal{B}$ o $\mathcal{B}[0,1]$ si queremos resaltar que solo estamos considerando subconjuntos de $[0,1]$.

Hay varias definiciones alternativas de esta σ-álgebra. Por ejemplo, también se puede definir como la menor σ-álgebra que contiene a los intervalos abiertos $(a,b), 0 \leq a < b \leq 1$ o la menor σ-álgebra que contiene a los intervalos cerrados $[a,b], 0 \leq a \leq b \leq 1$. También es la menor σ-álgebra que contiene a los intervalos de la forma $(a,b]$ o a los de la forma $[a,b)$. No es difícil demostrar que todas estas definiciones son equivalentes.

También es posible definir la σ-álgebra de Borel como la σ-álgebra generada por los subconjuntos abiertos de [0, 1], y se puede demostrar que esta definición es equivalente a cualquiera de las anteriores. Esta última definición tiene la ventaja de que podemos usarla en cualquier espacio que tenga una topología, por ejemplo, en cualquier espacio métrico.

Las definiciones anteriores pueden extenderse sin ninguna dificultad a los subconjuntos de la recta real $\mathbb{R}$.

1.10. Ejemplos y Aplicaciones.

(1) *Muestreo con Reposición.* Retomemos el ejemplo 1.5.9 sobre el muestreo con reposición, donde

$$\Omega = \{BBB, BBD, BDB, DBB, BDD, DBD, DDB, DDD\}$$

y sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Supongamos que la proporción de defectuosos en la población es $p = n/N$, donde n es el número de defectuosos en el total N de artículos en el stock. Por lo tanto, la proporción de buenos en la población es $1 - p = q$.

Consideremos el evento elemental $\{DDD\}$. Para asignarle la probabilidad correspondiente razonamos así: en cada una de las extracciones hay n formas posibles de elegir un defectuoso. En total resultan n^3 posibilidades de obtener los tres defectuosos y N^3 elecciones posibles de una terna cualquiera. Asignamos al evento $\{DDD\}$ la probabilidad

$$P(\{DDD\}) = \frac{n^3}{N^3} = p^3$$

y análogamente

$$\begin{aligned} P(\{BBB\}) &= q^3, \\ P(\{BDD\}) = P(\{DDB\}) = P(\{DBD\}) &= p^2q, \\ P(\{BBD\}) = P(\{BDB\}) = P(\{DBB\}) &= pq^2. \end{aligned}$$

Se verifica que

$$P(\Omega) = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = (p+q)^3 = 1.$$

Calculemos la probabilidad del evento A: "se obtiene al menos un defectuoso en la muestra". Como A es el complemento del evento A^c: "no se obtiene ningún defectuoso en la muestra", resulta

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - q^3.$$

Consideremos ahora la siguiente situación que se presenta en problemas vinculados a control de calidad. Supongamos que se ignora la proporción p de defectuosos en la población y estamos interesados en tener una estimación de ese valor. Extraemos una muestra de tres artículos entre los cuales hay uno solo defectuoso.

Analicemos la probabilidad del evento: “se obtiene un solo defectuoso en la muestra”, según diversos valores de p, como indica el cuadro siguiente:

p	$3pq^2$
0.1	0.243
0.2	0.384
0.3	0.441
0.4	0.432
0.5	0.375
0.6	0.288
0.7	0.189
0.8	0.096
0.9	0.027

Si tuviéramos que seleccionar uno de estos valores para p, una opción posible sería admitir aquél que haga mayor la probabilidad del evento que ocurrió efectivamente, o sea 0.3.

Utilizando este criterio, y aceptando como posibles valores de p todos los números reales entre 0 y 1, adoptamos como estimación aquél que haga máxima la probabilidad $3pq^2 = 3p(1-p)^2$ del evento que efectivamente ocurrió. Este criterio de estimación se llama de *“máxima verosimilitud”.* Para maximizar esta función

$$L(p) = 3p(1-p)^2$$

calculamos su derivada

$$L'(p) = 3(1-p)(1-3p)$$

que se anula en $p = 1,\ p = 1/3$.

El gráfico de la función $L(p)$ es el que se indica en la figura 2.10, y el máximo para $p \in [0,1]$ está en $p = 1/3$. Tomamos, por lo tanto, como estimación $\hat{p} = 1/3$, valor que obviamente se adecúa a lo que indica la intuición inmediata, dado que en la muestra de tres resultó uno defectuoso.

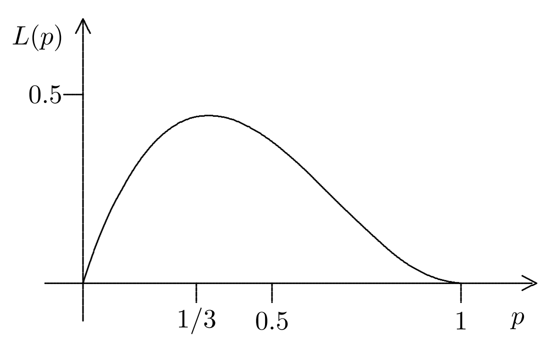


Figura 2.10

(2) *Error de Redondeo.* Consideremos nuevamente el caso del error de redondeo. Supongamos que se trunca el resultado de una operación aritmética en la parte entera, es decir, que en lugar del número real no negativo x se toma su parte entera $[x]$, esto es, el mayor entero que no supera x. El planteo es esencialmente el mismo si se trata del truncamiento en cualquier cifra decimal.

El error cometido al truncar es $x - [x]$, que podemos considerar como un evento elemental del intervalo $[0,1) = \Omega$, tomado como espacio muestral.

Determinemos ahora la probabilidad del evento

$$A : \text{“ La primera cifra truncada es 9 ”}.$$

Resulta
$$P(A) = P([0.9,\ 1)) = 1 - 0.9 = 0.1.$$
¿Cuál es la probabilidad de que la segunda cifra truncada sea 9?

Este evento es
$$B = [0.09,\ 0.1) \cup [0.19,\ 0.2) \cup \cdots \cup [0.99,\ 1)$$
y su probabilidad es
$$P(B) = \overbrace{\frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{100}}^{10 \text{ veces}} = 0.1.$$

(3) Un dado está cargado de modo tal que la probabilidad de que salga la cara k es proporcional a k. Hallar la probabilidad de cada uno de los eventos:

a. El resultado de arrojar el dado es un número par.

b. El resultado es menor que 6.

Denotemos por p_k la probabilidad de que ocurra la cara k ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Lo que establece el enunciado es que existe una constante C tal que $p_k = Ck$. Como $p_1 + p_2 + \cdots + p_6 = 1$, se deduce que
$$C(1 + 2 + \cdots + 6) = 1 \quad \Rightarrow \quad 21C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{21} \quad \Rightarrow \quad p_k = \frac{k}{21}$$
Resolvamos ahora a y b.

a. La probabilidad de obtener una cara par es
$$p_2 + p_4 + p_6 = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}.$$
b. La probabilidad de obtener un resultado menor que 6 es
$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}.$$
▲

(4) *El problema de los cumpleaños.* ¿Cuál es la probabilidad de que entre r personas al menos dos cumplan años el mismo día? (Se supone que la duración del año es de 365 días). ¿Cuál es el menor valor de r para el cual esta probabilidad es superior a $1/2$?

Tomamos como espacio muestral el conjunto de todas las r-uplas de fechas posibles:
$$\Omega = \{(f_1, f_2, \dots, f_r)\ :\ 1 \le f_i \le 365,\ i = 1, \dots, r\}$$
y la hipótesis natural es que todas las r-uplas son igualmente probables.

Llamemos A el evento de que entre los r individuos seleccionados, no hay dos que cumplan el mismo día, es decir que
$$A = \{(f_1, \dots, f_r) : 1 \le f_i \le 365,\ \text{los } f_i \text{ son diferentes 2 a 2}\}.$$
La pregunta es ¿cuál es la probabilidad de que no ocurra A? Esto es
$$P(A^c) = 1 - P(A)$$
y como todos los eventos elementales de Ω son igualmente probables,
$$P(A) = \frac{\sharp A}{\sharp \Omega}$$

donde $\sharp A$ denota el cardinal del conjunto A. Para calcular $\sharp\Omega$ observamos que hay $N = 365$ fechas posibles para cada cumpleaños y queremos seleccionar un vector de longitud r de fechas con reposición. Cada componente del vector la podemos escoger de N maneras y por lo tanto hay N^r vectores posibles:

$$\sharp\Omega = N^k.$$

Por otro lado los vectores que pertenecen a A no pueden tener componentes repetidas. Por lo tanto, para escoger un vector que satisfaga esta condición, tenemos N valores posibles para la primera componente. Una vez que la hemos seleccionado, quedan $N-1$ valores para escoger la segunda. Si ya tenemos las dos primeras quedan $N-2$ posibilidades para la tercera y, continuando de esta manera, para la última componente quedan $N-r+1$. En consecuencia

$$\sharp A = N(N-1)\cdots(N-r+1),$$

y por lo tanto

$$P(A^c) = 1 - \frac{N(N-1)\cdots(N-r+1)}{N^r} = 1 - \left(1-\frac{1}{N}\right)\dots\left(1-\frac{r-1}{N}\right).$$

Para acotar esta probabilidad utilizamos la desigualdad

$$1 - x \leq e^{-x}$$

válida para todo $x \in \mathbb{R}$, que puede ser demostrada usando un desarrollo de MacLaurin de orden 2 o verificando que la figura 2.11 es correcta.

Obtenemos

$$P(A^c) > 1 - e^{\frac{1}{N}+\frac{2}{N}+\cdots+\frac{r-1}{N}} = 1 - e^{-\frac{r(r-1)}{2N}}.$$

Para $r = 23$ y $N = 365$ obtenemos $P(A^c) > 0.50000175$. Así, en un grupo de 23 personas, con probabilidad mayor que 1/2, hay dos personas que cumplen años el mismo dia, lo cual es bastante sorprendente. Para $r = 30$ la probabilidad es superior a 0.696 y para $r = 50$, superior a 0.965.

n	$P(A_n)$
10	0.117
20	0.411
23	0.507
30	0.706
50	0.97
57	0.99
100	0.9999997

▲

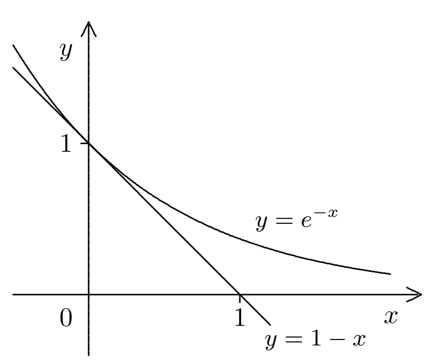


Figura 2.11

(5) Si la probabilidad de encontrar un artículo defectuoso en una población es $p = n/N$, donde N es el número de elementos de la población y n el de defectuosos, y realizamos muestreo con reposición extrayendo un artículo cada vez, calcular la probabilidad de encontrar el primer defectuoso en la m-ésima extracción. Si llamamos p_m a esta probabilidad, verificar que $\sum_{m=1}^{\infty} p_m = 1$.

Veremos ahora una solución al ejercicio con los elementos de que disponemos. Más adelante podremos tratarlo de manera más simple, utilizando conceptos que aún no hemos introducido. Comencemos por $m = 1$; p_1 es la probabilidad de extraer un defectuoso en la primera extracción, que es claramente

$$p_1 = \frac{n}{N} = p.$$

Sea ahora $m > 1$. El evento A_m: "el primer defectuoso es extraído en la m-ésima extracción", se escribe como

$$A_m = B_{m-1} \setminus B_m$$

donde B_m es el evento de que en las primeras m extracciones no hemos encontrado artículos defectuosos. La relación anterior expresa que "encontrar un defectuoso por primera vez en la m-ésima extracción" es lo mismo que "no extraer defectuosos en las $m-1$ primeras pero si en las m primeras". Como $B_m \subset B_{m-1}$ se tiene que $P(A_m) = P(B_{m-1}) - P(B_m)$. Por otra parte

$$P(B_m) = \frac{(N-n)^m}{N^m} = (1-p)^m$$

y, por lo tanto, deducimos que

$$\begin{aligned} p_m = P(A_m) &= (1-p)^{m-1} - (1-p)^m \\ &= (1-p)^{m-1}(1-(1-p)) = p(1-p)^{m-1}. \end{aligned}$$

En resumen, la fórmula

$$p_m = p(1-p)^{m-1}$$

vale para todo $m \geq 1$. Además, como $p > 0$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} p(1-p)^{m-1} = p \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^m = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

Aquí hemos usado la suma de la serie geométrica:

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}, \qquad \text{válida para } |x| < 1.$$

◀

1.11. La Paradoja de Bertrand.

En 1889 L. F. Bertrand propuso el siguiente problema: Tenemos un triángulo equilátero inscrito en un círculo. ¿Cuál es la probabilidad de que la longitud de una cuerda escogida al azar sea mayor que el lado del triángulo inscrito?

Este problema se sale de las situaciones que hemos estado considerando, pues no se trata de un espacio de probabilidad finito. Sin embargo, vamos a tratar de darle respuesta, intentando usar los mismos principios.

Primera Respuesta: Podemos pensar que la cuerda que vamos a seleccionar tiene un extremo fijo en el punto A y el otro extremo puede ser cualquier punto de la circunferencia. Sea ABC el triángulo inscrito y DAE la tangente a la circunferencia en el punto A.

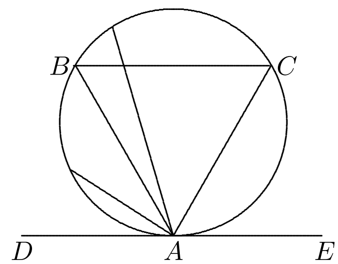


Figura 2.12

Cualquier cuerda que esté dentro del ángulo BAC de 60° es mayor que el lado del triángulo. Cualquier cuerda que esté dentro de alguno de los ángulos BAD o CAE es menor. Ambos ángulos miden también 60°. En resumen, las cuerdas que tienen un extremo fijo en A están en el ángulo DAE que mide 180°; de éstas, las que están dentro del ángulo BAC, que mide 60°, son mayores que el lado del triángulo, el resto son menores. Por lo tanto, la probabilidad buscada es

$$\frac{60}{180} = \frac{1}{3}.$$

Segunda Respuesta: Toda cuerda es perpendicular a un diámetro, que pasa por su punto medio. Podemos pensar que para seleccionar al azar una cuerda, podemos seleccionar inicialmente el diámetro al cual va a ser perpendicular, y luego escogiendo un punto del diámetro, tenemos el punto medio de la cuerda con lo cual ésta queda determinada. Supongamos que la cuerda que escogemos al azar es perpendicular al diámetro AK, y sobre este diámetro dibujamos la altura del triángulo, como se ve en la figura 2.13. Es fácil mostrar que la distancia del centro del círculo a cualquier lado del triángulo es igual a la mitad del radio del círculo. En particular, OM es la mitad del radio OK, o también un cuarto del diámetro AK. Colocamos el punto N sobre el diámetro de modo que la distancia ON sea igual a OM. En la gráfica hemos dibujado con trazo discontinuo la cuerda paralela al lado BC del triángulo.

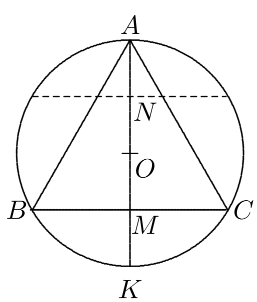


Figura 2.13

Es claro que las cuerdas que cortan al diámetro AK en algún punto del intervalo MN son mayores que el lado del triángulo. La cuerda aleatoria puede pasar por cualquier punto de AK, las que pasan por puntos en el intervalo MN, cuya longitud es la mitad de AK, son mayores que el lado del triángulo. Por lo tanto la probabilidad buscada es $1/2$.

Tercera Respuesta: En la figura 2.14 hemos dibujado una circunferencia inscrita en el triángulo equilátero. Como hemos dicho en la solución anterior, el radio de esta circunferencia es la mitad del radio de la circunferencia original. En la figura observamos que si DE es una cuerda cuya distancia del centro es mayor que OM, entonces DE es más corta que BC mientras que si FG es una cuerda cuya distancia al centro es menor que OM, entonces FG es mayor que BC.

Observamos ahora que la distancia de una cuerda al centro de la circunferencia es en realidad la distancia del punto medio de la cuerda al centro de la circunferencia. La cuerda seleccionada al azar puede tener como punto medio a cualquier punto del círculo inicial, y los puntos medios de las cuerdas que son mayores que BC están en el círculo pequeño. En consecuencia la probabilidad de que la cuerda escogida al azar sea mayor que un lado del triángulo es el cociente entre las áreas del círculo pequeño y del círculo grande. Si llamamos r el radio del círculo pequeño, el cociente entre las áreas es

$$\frac{\pi r^2}{\pi(2r)^2} = \frac{\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{1}{4}.$$

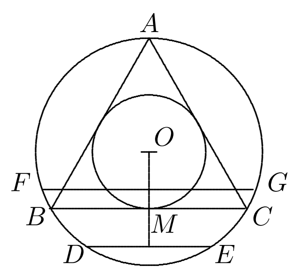


Figura 2.14

¡Hemos obtenido entonces tres respuestas distintas para el problema planteado por Bertrand! Esto parece paradójico, pero no lo es. El punto es que el planteamiento del problema es impreciso: ¿Qué quiere decir escoger una cuerda al azar? Hemos dado tres interpretaciones distintas, en primer lugar suponemos que escoger una cuerda al azar consiste en fijar un extremo de la cuerda y luego seleccionar el ángulo que hace la cuerda con la tangente a la circunferencia en el punto escogido, de manera que todos los ángulos son igualmente probables. En segundo lugar, escogimos un diámetro y sobre él, de manera uniforme, un punto, que es el punto medio de la cuerda. En tercer lugar escogemos un punto del círculo de manera uniforme. Este punto es el punto medio de la cuerda. En cada ocasión estamos considerando un espacio de probabilidad muestral distinto y una probabilidad distinta para medir los sucesos que nos interesan. Siendo así, no es sorprendente que hayamos obtenido respuestas distintas.

La paradoja de Bertrand nos señala el riesgo de usar con demasiada libertad la expresión 'al azar'. Situaciones como esta, en las cuales parece haber un problema de ambigüedad e incertidumbre, tuvieron un efecto negativo en el desarrollo de la Teoría de Probabilidades.

1.12. Comentarios y Algo de Historia.

1.- En primer lugar mencionamos a d'Alembert, quien apareció en el problema 4 de la sección 1.8.1, en relación a un error que hoy parece elemental. Jean le Rond d'Alembert nació en París el 16 de noviembre de 1717, murió en esa misma ciudad el 29 de octubre de 1783, y fue uno de los grandes matemáticos del siglo XVIII. Su error no es difícil de entender: si lanzamos dos monedas idénticas, sólo podemos distinguir tres resultados, los que mencionó d'Alembert. Es un poco mas difícil ver que no son igualmente probables, y hay que asignarles una probabilidad distinta.

Llama la atención que no haya habido ningún intento de verificación experimental de su parte. Después de todo, estamos tratando de hacer un modelo matemático de una situación real y bastan unas cuantas repeticiones del experimento para darse cuenta que los tres resultados posibles no ocurren con igual frecuencia.

Hay una situación física, sin embargo, que corresponde al modelo propuesto por d'Alembert. Para explicarla vamos a considerar una situación equivalente: la repartición de fichas en cajas. En el problema de repartir k fichas en n cajas podemos considerar que las cajas están identificadas por números (o letras o símbolos cualesquiera) y cada ficha asignada a una caja es equivalente a etiquetar la ficha con el número de la caja. Lanzar dos monedas es equivalente a colocar dos fichas en dos cajas, una llamada *Aguila* y otra llamada *Sol*.

En este esquema, una repartición de k fichas en n cajas equivale a tomar una muestra de tamaño k de los números 1,2, $\dots, n$ y esto podemos hacerlo de acuerdo a varios tipos de condiciones, por ejemplo, con o sin reposición, permitiendo que en cada caja haya cualquier número de fichas o a lo sumo una, considerando que las fichas son distinguibles o no, etc. Si no hay restricciones en el número de fichas que puede haber en cada caja, las fichas son distinguibles y hacemos el muestreo con reposición hay n^k muestras posibles. En la física de partículas, si las cajas son niveles de energía y las fichas son partículas, la hipótesis de Maxwell y Boltzmann es que estos n^k arreglos son igualmente probables.

Si no podemos colocar más de una ficha en cada caja, el número de arreglos ordenados es V_k^n. Si no consideramos el orden de las fichas hay $\binom{n}{k}$ y para el caso de las partículas y niveles de energía, la hipótesis de Fermi y Dirac es que estos arreglos son igualmente probables.

Una tercera situación permite un número ilimitado de fichas en cada caja pero sin distinguir las fichas. Es el caso propuesto por d'Alembert para los dos lanzamientos de una moneda. Hay ahora $\binom{n+k-1}{k}$ arreglos posibles y la hipótesis de Bose y Einstein dice que son equiprobables para el caso de partículas y niveles de energía.

2.- Nuestra segunda mención es para Gerolamo Cardano (1501 - 1576), quien es famoso por su contribución a la solución de la ecuación cúbica. Cardano, quien era médico de profesión, creía firmemente en la Astrología y se dice que hizo el horóscopo de Eduardo VI de Inglaterra cuando éste tenía dieciséis años, concluyendo que el Rey viviría por encima del promedio, aunque después de los 55 años era muy probable que sufriera de varias enfermedades. Eduardo VI murió poco después de que Cardano hiciese su horóscopo.

Cardano murió en Roma el 21 de septiembre, tres días antes de cumplir 75 años, tal como había predicho, y se dijo que había dejado de comer para asegurarse de que la predicción de su propia muerte fuese correcta.

Cardano escribió el primer libro sobre juegos de azar, alrededor de 1550 pero publicado sólo en 1663: *De ludo alea* (el libro de los juegos de azar), que puede ser descrito como un manual para jugadores. En su libro usa con frecuencia la definición clásica de probabilidades que formulamos en la sección 2.1 y que atribuimos a Laplace.

3.- El nacimiento de la Teoría de Probabilidades se asocia usualmente con la correspondencia entre Pierre de Fermat (1601 - 1665) y Blaise Pascal (1623 - 1662). Como partero funjió Antoine Gombauld, Chevalier de Méré, un noble francés con interés en los juegos de azar y las apuestas. De Méré consultó a Pascal, quien escribió a Fermat, comenzando una correspondencia que ejercería una profunda influencia en el desarrollo posterior de las probabilidades. En las palabras de Poisson: "*un problema sobre juegos de azar, planteado a un austero Jansenista*[1] *por un hombre de mundo, fue el origen del cálculo de probabilidades.*"

Pierre de Fermat fue abogado de profesión y magistrado en la corte de Toulouse. Hizo contribuciones importantes en geometría, teoría de números y en los orígenes del cálculo, pero es conocido principalmente por el '*último teorema de Fermat*': la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras (x, y, z) para $n \geq 3$. Este teorema ha sido demostrado recientemente, tras el esfuerzo de numerosos matemáticos, por A. Wiles.

Veamos un ejemplo del tipo de problemas que consideraron en su correspondencia. En una carta de 1654 Pascal escribe a Fermat sobre un problema planteado por De Méré:

"... no tengo tiempo de enviarle la explicación del problema que M. De Méré encontró difícil. Es muy inteligente, pero no es un geómetra (lo cual, como usted sabe, es un grave defecto) y no puede siquiera comprender que una recta matemática es infinitamente divisible: está convencido de que una recta está compuesta de un número finito de puntos, y nunca he podido convencerlo de lo contrario. Si usted puede lograrlo, le hará un gran servicio.

[1]doctrina de Jansenio, que exageraba las ideas de San Agustín.

Me decía haber encontrado algo erróneo con los números porque:

Si uno trata de obtener un seis con un dado, la ventaja de hacerlo en cuatro lanzamientos es como 671 a 625. Si uno trata de obtener un doble seis con dos dados, es desventajoso hacerlo en 24 lanzamientos. Sin embargo 24 es a 36 (que es el número de caras de dos dados) como 4 es a 6 (que es el número de caras de un dado).

Esto le pareció asombroso y dijo en voz alta que las proposiciones no eran consistentes y la aritmética era contradictoria; pero usted seguramente es lo suficientemente instruido para reconocer la falla en su razonamiento.”

Este problema estaba basado en un juego de moda en la época, en el cual la casa apuesta pagando uno a uno, a que un jugador lance al menos un seis en cuatro lanzamientos de un dado. Como dice Pascal, este juego es ligeramente favorable a la casa en la proporción 671 a 625. Para ver esto observamos que la probabilidad de que haya al menos un 6 en cuatro lanzamientos de un dado es

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1-\frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} = 0.517$$

El problema que preocupaba a De Méré se refería a un juego similar, lanzando un par de dados: ¿Por qué no es favorable a la casa apostar que el jugador obtendrá al menos un doble seis en 24 lanzamientos de un par de dados? Su razonamiento fue el siguiente: si lanzo un dado hay seis resultados posibles, mientras que si lanzo dos hay 36 ($=6\times 6$). Por lo tanto, si con cuatro lanzamientos el juego con un dado es favorable, con $6\times 4 = 24$ lanzamientos el juego con dos dados también debe serlo. En realidad, la probabilidad de que haya al menos un doble seis en 24 lanzamientos de dos dados es

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^2 4 = 0.4913.$$

Si p representa la probabilidad de un resultado favorable en un lanzamiento, $1-(1-p)^n$ representa la probabilidad de obtener al menos un resultado favorable en n lanzamientos. Como vemos en esta expresión, dividir p por un número no es equivalente a multiplicar el exponente n por ese mismo número.

4.- Pierre Simon Laplace nació en Normandía el 23 de marzo de 1749 y vivió a través de la Era Napoleónica. En una época que muchos consideran la edad de oro de la ciencia francesa, Laplace fue el científico más ilustre de Francia. Al morir, el 5 de marzo de 1827, Poisson lo alabó como *“el Newton de Francia”*. Elegido a la Academia de Ciencias en 1773, fue profesor de la Escuela Militar, de la Escuela Normal, Ministro del Interior (aunque sólo por seis semanas, antes de ser reemplazado por el hermano de Napoleón) y Canciller del Senado. Fue nombrado Marqués por Luis XVIII.

Sus principales intereses fueron la astronomía y las probabilidades, lo cual se refleja en sus dos obras fundamentales: *Tratado de Mecánica Celeste* (cuatro volúmenes, 1799 - 1805) y *Teoría Analítica de Probabilidades* (1812). Laplace creía en el determinismo de los sistemas físicos y por lo tanto pensaba que no puede haber probabilidad en el mundo material. La probabilidades surgen de nuestro conocimiento y nuestra ignorancia. La teoría del azar *“consiste en reducir todos los sucesos del mismo tipo a un cierto número de casos igualmente posibles, es decir, aquellos sobre los cuales estamos igualmente indecisos sobre su existencia”*.

5.- La definición clásica no es original de Laplace. Leibniz la menciona en 1678 y algunos piensan que es el primero en usarla. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), filósofo racionalista y matemático alemán, tuvo un gran interés por las probabilidades, publicó en 1666 la primera monografía sobre la teoría de combinaciones (*Ars Combinatoria*) y aunque no hizo ninguna contribución formal de importancia a la teoría de probabilidades, fue el primero en intentar su axiomatización. Fue un testigo de excepción del surgimiento de las probabilidades y conoció a todos los protagonistas, excepto a Pascal.

6.- La definición clásica aparece también en 1705 en los trabajos de Jacques Bernoulli. Los Bernoulli son, sin duda, la familia mejor conocida en la historia de las matemáticas. Unos doce de ellos han hecho contribuciones en matemáticas y al menos cinco trabajaron en probabilidades. Jacques (también conocido como Jacob o James) nació en Basilea, Suiza, el 27 de diciembre de 1654. Para 1684 Jacques, y su hermano Jean (también conocido como Johann o John) habían desarrollado por su cuenta el cálculo diferencial, a partir de indicaciones publicadas por Leibniz, y eran reconocidos como matemáticos de primera línea. Posteriormente trabajaron sobre cálculo integral, curvas y problemas de minimización.

Jacques fue profesor de la Universidad de Basilea desde 1687 hasta su muerte, mientras que su hermano fue profesor en Groninga desde 1695 hasta 1705, año en que reemplazó a su hermano como profesor en Basilea.

Los hermanos Bernoulli no fueron colaboradores, mas bien fueron rivales y en sus últimos años no tuvieron ningún contacto directo. Al morir Jacques en 1705, dejó una cantidad de trabajos sin publicar, algunos incompletos, en diversos temas de matemáticas, que fueron editados por su sobrino Nicolás y publicados en 1713.

El más importante de ellos trataba sobre probabilidades y fue publicado bajo el nombre de *Ars Conjectandi*. En su *Ensayo Filosófico sobre las Probabilidades*, Laplace incluye una *Nota Histórica Sobre el Cálculo de Probabilidad* en la cual dice lo siguiente sobre el libro de Bernoulli:

"... En este trabajo Bernoulli avanza la teoría de probabilidades mucho más de lo que lo hizo Huygens: da una teoría general de combinaciones y series y las aplica a varios problemas difíciles relacionados con el azar. El trabajo también es notable por la precisión y sutileza de sus observaciones, y por su aplicación de la fórmula binomial a este tipo de problemas, así como por la demostración de un teorema que dice que, si aumentamos, ilimitadamente, el número de observaciones y experimentos, el cociente de los diversos resultados tiende al cociente de sus respectivas probabilidades, y si hacemos suficientemente grande el número de experimentos, este cociente se acerca tanto como queramos al cociente de las probabilidades. Este teorema es muy útil para deducir a partir de observaciones, las leyes y causas asociadas con diversos fenómenos. Bernoulli, con razón, consideró la demostración de este teorema como de gran importancia, y dice haberla pensado durante un período de veinte años. "

1.13. Ejercicios

1. Demuestre que la diferencia simétrica de dos conjuntos se puede escribir como $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

2. Demuestre que para cualesquiera conjuntos A, B, C y D, la siguiente proposición es cierta:
$$(A \cup B) \setminus (C \cup D) \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus D).$$

3. Sea A, B, C, D subconjuntos de Ω. Demuestre las siguientes propiedades.

   a. $((A \cap B) \cup (C \cap D))^c = (A^c \cup B^c) \cap (C^c \cup D^c)$; b. $A \triangle \Omega = A^c$.
   c. $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = \emptyset$; d. $A \setminus B = A \cap (A \triangle B)$.
   e. $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$; f. $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.
   g. $(A \cap B^c) \triangle (B \cap A^c) = A \triangle B$; h. $A \triangle B = C \triangle D \Rightarrow A \triangle C = B \triangle D$.
   i. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$; j. $A \triangle B = (A \triangle C) \triangle (C \triangle B)$.

4. ¿Cuándo son ciertas las siguientes relaciones?

   a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
   c. $A \cup (B \cup C) = A \setminus (B \setminus C)$ d. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$
   e. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ f. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
   g. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

5. Si $\{A_i,\ i \in I\}$ y $\{B_i,\ i \in I\}$ son dos colecciones de conjuntos, demuestre que
$$(\cup_{i \in I} A_i) \setminus (\cup_{i \in I} B_i) \subset \cup_{i \in I} (A_i \setminus B_i).$$

6. Sea A_n el conjunto de los enteros positivos divisibles por n. Halle los conjuntos a) $\cup_{n=2}^{\infty} A_n$, b) $\cap_{n=2}^{\infty} A_n$.

7. Halle los siguientes conjuntos a) $\cup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$; b) $\cap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$.

8. Sea A_α el conjunto de puntos sobre la curva $y = 1/x^\alpha$ para $0 < x < \infty$. Halle el conjunto $\cap_{\alpha \geq 1} A_\alpha$.

9. Sean A_1, A_2 y A_3 eventos de un espacio muestral. Expresar mediante uniones, intersecciones y complementos los siguientes eventos:

   a. Los tres eventos ocurren.
   b. Ocurre sólo A_1.
   c. Ocurren A_1 y A_2, pero no A_3.
   d. Ocurre al menos uno de los tres eventos.
   e. No ocurre ninguno.
   f. Ocurren al menos dos.
   g. Ocurren dos y no más.

10. Expresar como uniones disjuntas a) $A_1 \cup A_2$; b) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$; c) $\bigcup_{i=1}^n A_i$.

11. Sea $\Omega = \{AAA, AAS, ASA, SAA, ASS, SAS, SSA, SSS\}$, donde A es águila y S es sol. Describa con palabras los siguientes eventos y calcule sus probabilidades:

    a. $B = \{AAA, AAS, ASA, ASS\}$;
    b. $C = \{AAA, SSS\}$.
    c. $D = \{AAS, ASA, SAA\}$;
    d. $E = \{AAS, ASA, SAA, ASS, SAS, SSA\}$.

12. El evento $A \setminus B$ quiere decir que A ocurre pero B no. Demuestre que las operaciones de unión, intersección y complemento se pueden expresar usando sólo esta operación.

13. Sean A, B y C tres eventos. Demuestre las siguientes propiedades:

    a. $P(A \cap B) + P((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) + P(A^c \cap B^c) = 1$.

    b. $P(A^c \cap B^c) + P(A) + P(A^c \cap B) = 1$.

    c. $P(A^c \cap B^c \cap C^c) + P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C) = 1$.

    d. $P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A^c \cap B^c) - P(A^c)P(B^c)$.

14. Suponga que $P(A) \geq 0.9$, $P(B) \geq 0.8$ y $P(A \cap B \cap C) = 0$, demuestre que $P(C) \leq 0.3$.

15. Demuestre que si $A \cap B \cap C = \emptyset$, entonces

$$P((A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)) = P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A).$$

16. Sea D el evento 'exactamente uno de los eventos A, B y C ocurre'. Exprese $P(D)$ en términos de $P(A), P(B), P(C), P(A \cap B), P(A \cap C), P(B \cap C)$ y $P(A \cap B \cap C)$.

17. Demuestre que

    a. $\min\{1, P(A) + P(B)\} \geq P(A \cup B) \geq \max\{P(A), P(B)\}$

    b. $\min\{P(A), P(B)\} \geq P(A \cap B) \geq \max\{0, P(A) + P(B) - 1\}$

    c. $P(\cap_1^n A_i) \geq \sum_1^n P(A_i) - (n-1)$.

18. La condición de σ-aditividad para una medida de probabilidad es equivalente a otras propiedades. Pruebe que es equivalente a las proposiones (a) y (b):

    a. Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ es una sucesión creciente de eventos y $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ entonces $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

    b. Si $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ es una sucesión decreciente de eventos y $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$ entonces $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

19. Un experimento consiste de tomar al azar tres focos de la producción de una fábrica y probarlos, con resultados posibles defectuoso (1) o bueno (0). Sea A el evento 'El primer foco es defectuoso', B el evento 'el segundo foco es defectuoso' y C el evento 'el tercer foco es defectuoso'.

    a) Describa el espacio muestral Ω para este experimento.

    b) Liste los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos: A, B, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B$, $A^c \cap B \cap C^c$, $A \cap B^c \cap C$, $(A \cup B^c) \cap C$, $(A^c \cap C) \cup (B \cap C)$.

20. Describa en detalle un espacio muestral para los siguientes experimentos: (a) Tres lanzamientos de un dado. (b) Calificaciones de una clase de 20 estudiantes en un examen. (c) Medición de la temperatura a mediodía en una estación meteorológica. (d) Medición de las velocidades de carros pasando por un punto dado. (e) Una sucesión infinita de lanzamientos de una moneda.

21. Una caja contiene n bolas rojas y n bolas blancas. Se extraen dos bolas al azar. ¿Cuál es el espacio muestral para este experimento? ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas tengan colores distintos. Halle la probabilidad p_n de que las bolas sean del mismo color y evalúe $\lim_{n\to\infty} p_n$.

22. En una bolsa hay tres cartas numeradas 1, 2 y 3. Sacamos las cartas al azar sucesivamente y sin reposición. El resultado es una permutación de los números 1, 2 y 3. Describa el espacio muestral de este experimento. Para cada una de las siguientes descripciones, liste los elementos correspondientes y calcule la probabilidad del evento.

    (a) El 2 sale en primer lugar. (b) El 3 sale en segundo lugar. (c) El 2 sale en primer lugar y el 1 en tercer lugar. (d) O bien el 2 sale en primer lugar o bien el 1 sale en tercer lugar (o ambos). (e) Ningún número ocupa su lugar.

23. Repita el ejercicio anterior con 4 cartas numeradas de 1 a 4.

24. Una caja contiene 10 bolas negras y 5 bolas rojas. Se extraen 3 bolas al azar, con reposición. Calcular:

    a. La probabilidad de que sean 2 negras y una roja.

    b. La probabilidad de que sean las tres negras.

    c. Repetir el ejercicio suponiendo que la extracción es sin reposición.

25. Se extraen dos cartas sucesivamente de un juego de 52 cartas. Halle la probabilidad de que la segunda carta sea mayor que la primera.

26. Se lanzan al aire simultáneamente tres monedas balanceadas. Calcular:

    a. La probabilidad de obtener 3 caras.

    b. La probabilidad de obtener por lo menos 2 caras.

27. Lanzamos una moneda balanceada cuatro veces. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos:

    a. Ocurren al menos tres águilas.

    b. Ocurren exactamente tres águilas.

    c. Ocurren al menos tres águilas consecutivas.

    d. Ocurren exactamente tres águilas consecutivas.

28. Se lanzan dos dados. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos: a) obtenemos el mismo número en ambos dados; b) la suma es 7 u 11; c) los números son primos relativos, d) la suma es impar; e) el producto es impar; f) un número divide al otro.

29. Se realiza un test de conocimientos con 11 preguntas a contestar por *sí* o *no*. Se da por aprobada la prueba si se contestan correctamente al menos 6 de las 11 preguntas. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar el examen contestando al azar?

30. Sean $P_1,\ P_2$ dos medidas de probabilidad definidas sobre la misma σ-álgebra $\mathcal{F}$ y sea $0 \leq \alpha \leq 1$. Demuestre que $\alpha P_1 + (1-\alpha)P_2$ también es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{F}$. Generalice el resultado a n medidas de probabilidad.

31. a. Sea $p_i = a/i^2$ para $i \in \mathbb{N}$. Halle el valor de a para que p_i defina una probabilidad.

    b. Sea $p_i = b/i^2$ para $i = \pm 1, \pm 2, \dots$. Halle el valor de b para que p_i defina una probabilidad.

32. Para comenzar un cierto juego es necesario lanzar un 6 con un dado.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de lanzar el primer 6 en el tercer intento?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de necesitar más de tres intentos?

    c) ¿Cuántos lanzamientos hacen falta para que la probabilidad de haber lanzado un 6 sea al menos 0.95?

    d. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer 6 ocurra en un número par de lanzamientos?

33. Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de eventos en un espacio finito. Demuestre que $\mathcal{F}$ no puede contener exactamente 6 eventos. ¿Qué enteros pueden ser el cardinal de $\mathcal{F}$?

34. Sean: $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{B}$ la familia de conjuntos de Borel y P la probabilidad definida en el ejemplo 6 de la sección 2.4.

    a. Probar que $P(\{\omega\}) = 0$, donde $\{\omega\}$ es el subconjunto de Ω que consta sólo del punto ω. (Verificar previamente que $\{\omega\} \in \mathcal{B}$).

    b. Sean $Q = \{\omega : \omega \in [0, 1] \text{ es racional}\}$ e $I = \{\omega : \omega \in [0, 1] \text{ es irracional}\}$. Probar que $P(Q) = 0$ y $P(I) = 1$.

35. Sea $\Omega = [0, 1]$. Demuestre las siguientes proposiciones:

    a. La σ-álgebra de Borel es la σ-álgebra generada por los intervalos cerrados.

    b. La σ-álgebra de Borel es la σ-álgebra generada por los intervalos abiertos.

    c. La σ-álgebra de Borel es la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos.

    d. La σ-álgebra de Borel es la σ-álgebra generada por los conjuntos de la forma $[0, x)$ para $x \in [0, 1]$.

36. Sea Ω un espacio muestral cualquiera y sea $\mathcal{C} = \{A_i, 1 \leq i \leq n\}$ una partición de Ω, es decir los conjuntos A_i son disjuntos dos a dos y su unión es igual a Ω. Describa explícitamente la σ-álgebra generada por $\mathcal{C}$. ¿Qué tamaño tiene $\sigma(\mathcal{C})$?.

37. Se lanza reiteradamente una moneda balanceada. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran 4 águilas antes que dos soles?

38. Se lanzan cuatro dados y se multiplican los números que se obtienen. ¿Cuál es la probabilidad de que este producto sea divisible por 5? ¿Cuál es la probabilidad de que el último dígito en el producto sea 5?

39. Antonio y Bruno acuerdan una competencia de esgrima en una serie de mangas de modo que el primero en ganar dos mangas seguidas gana el combate. Antonio tiene probabilidad p de ganar una manga y Bruno probabilidad $q = 1 - p$. ¿Cuál es la probabilidad de que la competencia termine al cabo de k mangas?

40. En una caja tenemos n bolas con los números del 1 al n. Sea D_r el evento: 'se extrae una bola al azar y el número es divisible por r'. Halle $P(D_3)$, $P(D_4)$, $P(D_3 \cup D_4)$ y $P(D_3 \cap D_4$ y obtenga los límites de estas probabilidades cuando $n \to \infty$.

41. Definimos la función d sobre $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ por $d(A, B) = P(A \Delta B)$.

    a. Demuestre que para cualesquiera eventos A, B y C

    $$d(A, B) + d(B, C) - d(A, C) = 2P(A \cap B^c \cap C) + P(A^c \cap B \cap C^c)$$

    b. ¿Cuándo vale $d(A, B) = 0$?

    c. Sea $A_1, A_2, \ldots$ una sucesión no-decreciente de eventos: $A_i \subseteq A_j$ para $i \leq j$. Demuestre que para $i \leq j \leq k$,

    $$d(A_i, A_k) = d(A_i, A_j) + d(A_j, A_k).$$

42. En el juego de 'craps' el jugador lanza dos dados. Si el resultado es 7 u 11, el jugador gana. Si es 2, 3 ó 12, pierde. Si es cualquier otro resultado k, continua lanzando hasta obtener un 7, en cuyo caso pierde, o k, en cuyo caso gana. ¿Cuál es un espacio muestral adecuado para este juego? ¿Cuál es la probabilidad de ganar? ¿Cuál es la probabilidad de ganar en el primero o segundo lanzamiento? ¿Cuál es la probabilidad de ganar si el primer lanzamiento es 6?