Medida
Problemas VI
Los problemas 3, 6, 12, 17 y 20 son para entregar el lunes 21/09/09.

1. Sea E un conjunto medible según Lebesgue tal que para todo x en un conjunto denso en $\mathbb{R}$, $\lambda(E\Delta(E+x)) = 0$ Demuestre que $\lambda(E) = 0$ o $\lambda(\mathbb{R} - E) = 0$.

2. Sea Ω la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$. Demuestre que existe una única medida μ definida en los conjuntos de Borel de Ω tal que $\mu(\Omega) = 1$ y μ es invariante bajo rotaciones de Ω.

3. Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \lambda)$ donde λ es la medida de Lebesgue. Definimos $X_1(\omega) = 0$ para todo $\Omega \in \Omega$, $X_2(\omega) = \mathbf{1}_{\{1/2\}}(\omega)$ y $X_3(\omega) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(\omega)$. Observe que $\lambda(X_1 = X_2 = X_3 = 0) = 1$. Determine $\sigma(X_i)$ para $i = 1, 2, 3$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ medible respecto a las σ-álgebras de Borel respectivas. Sean $X_1, \dots, X_k$ funciones medibles sobre $(\Omega, \mathcal{B})$. Entonces $f(X_1, \dots, X_k) \in \sigma(X_1, \dots, X_k)$.

5. Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ con rango numerable $\mathcal{R}$. Demuestre que $X \in \mathcal{F}/\mathcal{B}$ si y sólo si $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{F}$ para todo $x \in \mathcal{R}$.

6. Si $F(x) = P(X \leq x)$ es continua en x, demuestre que $Y = F(X)$ es medible y que Y tiene distribución uniforme: $P(Y \leq y) = y$, para $0 \leq y \leq 1$. ¿Es cierto el resultado si F no es continua? (Demuestre o de un contraejemplo).

7. Si X es una variable aleatoria que satisface $P(|X| < \infty) = 1$ demuestre que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una variable acotada Y tal que $P(X \neq Y) < \varepsilon$. (Una variable aleatoria Y es acotada si para todo ω, $|Y(\omega)| < K$ para alguna constante K independiente de ω).

8. Demuestre que si X es una función medible, también lo es $|X|$. ¿Es cierto el recíproco? (Demuestre o de un contraejemplo).

9. Suponga que $\{B_n, n \geq 1\}$ es una partición numerable de Ω y defina $\mathcal{F} = \sigma(B_n, n \geq 1)$. Demuestre que una función $X : \Omega \to (-\infty, \infty]$ es $\mathcal{F}$-medible sí y sólo sí X es de la forma $X = \sum_1^\infty c_i \mathbf{1}_{B_i}$ para ciertas constantes (c_i). ¿Cómo son los conjuntos de $\mathcal{F}$?

10. Sean X e Y variables aleatorias y sea $A \in \mathcal{F}$. Demuestre que la función
$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & \text{si } \omega \in A \\ Y(\omega), & \text{si } \omega \in A^c \end{cases}$$
es una variable aleatoria.

11. Considere el espacio de probabilidad $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ donde λ es la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Definimos el proceso $\{X(t), t \in [0,1]\}$ por
$$X_t(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \neq \omega \\ 1, & \text{si } t = \omega \end{cases}$$
Demuestre que cada X_t es una variable aleatoria. ¿Cuál es la σ-álgebra generada por $\{X_t, 0 \leq t \leq 1\}$?

12. a) Demuestre que si X es una variable aleatoria, $\sigma(X)$ es una σ-álgebra generada por una cantidad numerable de conjuntos.

    b) Recíprocamente, si $\mathcal{F}$ está generada por una cantidad numerable de conjuntos, demuestre que $\mathcal{F} = \sigma(X)$ para alguna variable aleatoria X.

13. Suponga que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Demuestre que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$ sí y sólo sí toda función real continua es medible con respecto a $\mathcal{F}$. Por lo tanto $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la menor σ-álgebra con respecto a la cual las funciones continuas son medibles.

14. Demuestre que una función real y monótona es medible.

15. Considere sobre $\mathbb{R}$ la menor clase $\mathcal{X}$ de funciones reales que contiene a todas las funciones continuas y es cerrada bajo límites puntuales. Los elementos de $\mathcal{X}$ se conocen como funciones de Baire. Demuestre que funciones de Baire y funciones de Borel son la misma cosa.

16. Si X e Y son variables aleatorias sobre $(\Omega, \mathcal{F})$, demuestre que

$$\sup_{A \in \mathcal{F}} |P(X \in A) - P(Y \in A)| \leq P(X \neq Y).$$

17. Dado $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sea $\mathcal{F}' = \{A \cup N : A \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}\}$, donde $\mathcal{N}$ son los conjuntos nulos. Supongamos $P(X = Y) = 1$ donde X e Y son dos funciones reales sobre Ω. Demuestre que $X : (\Omega, \mathcal{F}') \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ es medible sí y sólo sí $Y : (\Omega, \mathcal{F}') \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ es medible.

18. Una función real f sobre la recta es semicontinua superior en x si, para todo ε existe δ tal que $|x - y| < \delta$ implica que $f(y) < f(x) + \varepsilon$. Demuestre que si f es semicontinua superior para todo x, entonces es medible.

19. Suponga que $-\infty < a \leq b < \infty$. Demuestre que la función indicadora $\mathbf{1}_{(a,b]}(x)$ puede ser aproximada por funciones continuas y acotadas, es decir, demuestre que hay una sucesión de funciones $0 \leq f_n \leq 1$ tal que $f_n \to \mathbf{1}_{(a,b]}$ puntualmente. (Ayuda: Aproxime el rectángulo de altura 1 y base $(a, b]$ por un trapezoide de altura 1 y con base $(a, b + n^{-1}]$ cuyo lado superior va de $a + n^{-1}$ a b).

20. Suponga que $T : (\Omega_1, \mathcal{B}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{B}_2)$ es una función medible y X es una variable aleatoria sobre Ω_1. Muestre que $X \in \sigma(T)$ si y sólo si existe una v. a. Y sobre $(\Omega_2, \mathcal{B}_2)$ tal que

$$X(\omega_1) = Y(T(\omega_1)) \quad \text{para todo } \omega_1 \in \Omega_1.$$