Medida y Probabilidad
Problemas V
Los problemas 3, 7, 10, 11 y 15 son para entregar el martes 14/09/09.

1. De un ejemplo de una función creciente y continua por la derecha tal que $\mu_F(a,b) < F(b) - F(a) < \mu_F[a,b]$.

2. Para cualquier f.d. F definimos

$$F_l^{\leftarrow}(y) = \text{ínf}\{t : F(t) \geq y\}, \qquad F_r^{\leftarrow}(y) = \text{ínf}\{t : F(t) > y\}.$$

Demuestre que $F_l^{\leftarrow}$ es continua por la izquierda y $F_r^{\leftarrow}$ es continua por la derecha. Demuestre también que $\lambda\{u \in (0,1] : F_l^{\leftarrow}(u) \neq F_r^{\leftarrow}(u)\} = 0$ ¿Importa cuál de las dos inversas usamos?

3. Sea F una f.d. continua en $\mathbb{R}$. Demuestre que F es uniformemente continua.

4. Para $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ escribimos $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ si $a_i \leq b_i,\ i = 1, \ldots, k$; $(-\infty, \mathbf{x}] = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k : \mathbf{u} \leq \mathbf{x}\}$; $(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k : \mathbf{a} < \mathbf{u} \leq \mathbf{b}\}$. Sea P una medida de probabilidad en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, definimos para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$, $F(\mathbf{x}) = P((-\infty, \mathbf{x}])$. Sea $\mathcal{S}_k$ la semiálgebra de los rectángulos k-dimensionales en $\mathbb{R}^k$, es decir, los conjuntos de la forma $(\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

   a) Si $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ demuestre que el rectángulo $I_k = (\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ puede escribirse como

$$I_k = (-\infty, \mathbf{b}] \setminus \Big((-\infty, (a_1, b_2, \ldots, b_k)] \cup (-\infty, (b_1, a_2, \ldots, b_k)] \cup \cdots \cup (-\infty, (b_1, b_2, \ldots, a_k)] \Big) \tag{1}$$

   donde los índices de la unión son los vértices del rectángulo distintos a $\mathbf{b}$.

   b) Demuestre que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) = \sigma\{(-\infty, \mathbf{x}],\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k\}$.

   c) Verifique que $\{(-\infty, \mathbf{x}],\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k\}$ es un sistema π.

   d) Demuestre que P está determinada por $F(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$.

   e) Demuestre que F satisface las siguientes propiedades:

      1) Si $x_i \to \infty,$ para todo $i = 1, \ldots, k$ entonces $F(\mathbf{x}) \to 1$.

      2) Si para algún $i \in \{1, \ldots, k\}$ $x_i \to -\infty$, entonces $F(\mathbf{x}) \to 0$.

      3) Sea $\mathcal{V}$ el conjunto de vértices del rectángulo I_k, de modo que

$$\mathcal{V} = \{(x_1, \ldots, x_i) : x_i = a_i \text{ o } b_i,\ i = 1, \ldots, k\}.$$

      Para $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ definimos

$$\operatorname{sgn}(\mathbf{x}) = \begin{cases} +1, & \text{si card}\{i : x_i = a_i\} \text{ es par,} \\ -1, & \text{si card}\{i : x_i = a_i\} \text{ es impar.} \end{cases}$$

      Para $I_k = (\mathbf{a}, \mathbf{b}] \in \mathcal{S}_k$ use la fórmula de inclusión-exclusión para demostrar que $P(I_k) = \Delta_{I_k} F$. donde $\Delta_{I_k} F = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{V}} \operatorname{sgn}(\mathbf{x}) F(\mathbf{x})$.

   f) Demuestre que F es continua por arriba: $\text{lím}_{\mathbf{a} \leq \mathbf{x} \downarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a})$.

   g) Decimos que $F : \mathbb{R}^k \to [0,1]$ es una función de distribución multivariada si se satisfacen las propiedades e) 1 y 2, F es continua por arriba y $\Delta_{I_k} F \geq 0$. Demuestre que cualquier función de distribución multivariada determina una única medida de probabilidad P en $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$. (Use el teorema de extensión).

5. Sea λ_2 la distribución uniforme en el cuadrado unitario $[0,1]^2$ definida por su f.d.

$$\lambda_2([0, \theta_1] \times [0, \theta_2]) = \theta_1 \theta_2, \quad (\theta_1, \theta_2) \in [0,1]^2.$$

   a) Demuestre que λ_2 asigna probabilidad 0 a la frontera de $[0,1]^2$.

   b) Calcule $\lambda_2\{(\theta_1, \theta_2) \in [0,1]^2 : \theta_1 \wedge \theta_2 > 2/3\}$.

   c) Calcule $\lambda_2\{(\theta_1, \theta_2) \in [0,1]^2 : \theta_1 \wedge \theta_2 \leq x, \theta_1 \vee \theta_2 \leq y\}$.

6. Para los siguientes ejemplos, describa la medida exterior μ^* y la clase $\mathcal{M}$ de los conjuntos medibles.

   a) Sea $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{C}$ es la colección de los conjuntos $\{1\},\ \{2, 3\}$ y definimos P_1 por $P_1(\Omega) = 1,\ P_1\{1\} = 0$ y P_2 por $P_2(\Omega) = 1,\ P_2\{2, 3\} = 0$. Observe que $\mathcal{M}(P_1^*)$ y $\mathcal{M}(P_2^*)$ difieren.

b) Sea Ω numerablemente infinito, $\mathcal{A}$ el álgebra de los conjunto finitos y cofinitos, y ponemos $P(A)$ igual a 0 ó 1 según A sea finito o cofinito.

c) Para A en el álgebra $\mathcal{A}$ y $\omega_0 \in \Omega$ ponemos $P(A) = \delta_{\omega_0}(A)$, que vale 1 si $\omega_0 \in A$ y 0 si no.

7. Sea Ω el cuadrado unitario $\{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. Si $E \subset [0, 1]$ ponemos $\tilde{E} = \{(x, y) : x \in E, 0 \le y \le 1\}$ y sea $\mathcal{S}$ la clase de los conjuntos $\tilde{E}$ tales que E es Lebesgue medible (en $[0, 1]$). Definimos $\mu(\tilde{E}) = \lambda(E)$. Demuestre que $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ es un espacio de probabilidad. Demuestre que $A = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, y = 1/2\}$ no es medible respecto a la medida exterior μ^* generada por μ en la clase de los subconjuntos de Ω. Demuestre que $\mu^*(A) = 1,\ \mu^*(A^c) = 1$.

8. Si F es una función de Stieltjes en $\mathbb{R}$ que genera la medida μ_F, demuestre que F es continua si y sólo si $\mu_F(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

9. Demuestre que F, G son funciones de distribución en $\mathbb{R}$ entonces $aF + bG$ también es una función de distribución para cualesquiera $a \ge 0, b \ge 0$ con $a + b = 1$.

10. Si $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y E es cualquier subconjunto de Ω, demuestre que la σ-álgebra generada por $\mathcal{F} \cup \{E\}$ es la colección de los conjuntos de la forma $(A \cap E) \cup (B - E)$, para $A, B \in \mathcal{F}$.

11. Demuestre que para cualquier espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ y cualquier conjunto $E \subset \Omega$, siempre es posible extender μ a una medida ρ en la σ-álgebra $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{F} \cup \{E\})$. (Ayuda: Usando el problema 10, sea $\rho(A \cap E) = \mu^*(A \cap E)$ y $\rho(B - E) = \mu_*(B - E) := \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{F}, C \subset B - E\}$).

12. Sea μ una medida definida en la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ en $[0, 1]$ con $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Sea $\varepsilon > 0$. Demuestre que para todo x existe un intervalo abierto I con $\mu(I) < \varepsilon$ y que existe un conjunto U denso y abierto con $\mu(U) < \varepsilon$.

13. Si B es un boreliano en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ demuestre que $\mathbf{a} + B = \{\mathbf{a} + \mathbf{x} : \mathbf{x} \in B\}$ y $-B = \{-\mathbf{x} : \mathbf{x} \in B\}$ son también borelianos.

14. Sean $(\Omega_n \mathcal{F}_n, \mu_n)$ espacios de medida para $n \ge 1$ y suponga que los conjuntos Ω_n son disjuntos. Sea $\Omega = \cup_n \Omega_n$, $\mathcal{F}$ la colección de conjuntos de la forma $A = \cup_n A_n$ con $A_n \in \mathcal{F}_n$, y para estos conjuntos definimos $\mu(A) = \sum_n \mu_n(A_n)$. Demuestre que $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida. ¿Bajo qué condiciones es σ- finito? ¿finito?

15. Sean μ_1 y μ_2 dos medidas en una σ-álgebra $\mathcal{F}$ que son σ-finitas en un álgebra $\mathcal{A}$ que genera a $\mathcal{F}$. Demuestre que si $\mu_1(A) \le \mu_2(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$, entonces la desigualdad es válida en todo $\mathcal{F}$.

16. Sea $A \in \mathcal{B}$, $\lambda(A) > 0$ y $0 < \theta < 1$. Demuestre que existe un intervalo abierto acotado I tal que $\lambda(A \cap I) \ge \theta\lambda(I)$. (Ayuda: Demuestre que se puede suponer que $\lambda(A)$ es finita y halle un abierto G tal que $A \subset G$ y $\lambda(A) \ge \theta\lambda(G)$. Pero $G = \cup_n I_n$ para intervalos disjuntos y abiertos I_n y $\sum_n \lambda(A \cap I_n) \ge \theta \sum_n \lambda(I_n)$. Use uno de los I_n).

17. Si $A \in \mathcal{B}$ y $\lambda(A) > 0$, entonces el origen es un punto interior del conjunto $D(A) = \{x - y : x, y \in A\}$. (Ayuda: Escoja un intervalo abierto y acotado I como en el problema anterior para $\theta = 3/4$. Suponga que $|z| < \lambda(I)/2$, entonces $A \cap I$ y $(A \cap I) + z$ están contenidos en un intervalo de longitud menor que $3\lambda(I)/2$, y no pueden ser disjuntos, y en consecuencia $z \in D(A)$).

18. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $A_1, A_2, \dots, A_n$ eventos (es decir, $A_i \in \mathcal{F}$). Definimos
$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \qquad S_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j), \qquad S_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k), \quad \dots$$
Para $1 \le m \le n$ sea $p(m)$ la probabilidad de que exactamente m eventos ocurran: $p(m) = P(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} = m)$. Demuestre que
$$p(m) = S_m - \binom{m+1}{m} S_{m+1} + \binom{m+2}{m} S_{m+2} - \dots \pm \binom{n}{m} S_n$$

19. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sea P^* la medida exterior asociada a P. Sea $B \subset \Omega$ y $\mathcal{F}_0 = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\}$. Supongamos además que $P^*(B) > 0$ y definimos P_0 en $\mathcal{F}_0$ por $P_0(A \cap B) = P^*(A \cap B)/P^*(B)$ para $A \in \mathcal{F}$. Demuestre que $\mathcal{F}_0$ es una σ-álgebra en B y P_0 es una probabilidad en $\mathcal{F}_0$. Sea P_0^* la medida exterior generada por P_0. Demuestre que $P_0^*(A) = P^*(A)/P^*(B)$ para $A \subset B$.