Medida y Probabilidad
Problemas III
Los problemas 3, 7, 9, 13 y 16 son para entregar el lunes 24/08/09.

1. Sea $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espacio de probabilidad. Demuestre la siguiente generalización de la subaditividad para eventos $B_i \subset A_i$:
$$P(\cup_i A_i) - P(\cup_i B_i) \leq \sum_i (P(A_i) - P(B_i)).$$

2. Decimos que los eventos $A_i, i \geq 1$ son casi disjuntos si $P(A_i \cap A_j) = 0,\ i \neq j$. Demuestre que para estos eventos
$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_j) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_j).$$

3. Sea Ω un conjunto no vacío y sea $\mathcal{F}_0$ la colección de los conjuntos tales que A o A^c es finito. Definimos la función P para $E \in \mathcal{F}_0$ por
$$P(E) = \begin{cases} 0, & \text{si } E \text{ es finito,} \\ 1, & \text{si } E^c \text{ es finito.} \end{cases}$$
   a) Demuestre que $\mathcal{F}_0$ es un álgebra.
   b) Si Ω es numerablemente infinito, demuestre que P es finitamente aditiva pero no σ-aditiva.
   c) Si Ω no es numerable demuestre que P es σ-aditiva sobre $\mathcal{F}_0$.

4. Si $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ es finitamente aditiva en el álgebra $\mathcal{A}$ y $E, F \in \mathcal{A}$ son tales que $\mu(E \triangle F) = 0$, decimos que $E \sim F$. Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{A}$ y que
$$E \sim F \Rightarrow \mu(E) = \mu(F) = \mu(E \cup F) = \mu(E \cap F).$$
¿Es cierto que la clase de los conjuntos $E \in \mathcal{A}$ para los cuales $E \sim \emptyset$ es un anillo?

5. Con la notación del ejercicio anterior definimos $\rho(E, F) = \mu(E \triangle F)$. Demuestre que $\rho(E, F) \geq 0$, $\rho(E, F) = \rho(F, E)$, $\rho(E, F) \leq \rho(E, G) + \rho(G, F)$. Si $E_1 \sim E_2$ y $F_1 \sim F_2$ y todos estos conjuntos están en $\mathcal{A}$, demuestre que $\rho(E_1, F_1) = \rho(E_2, F_2)$. ¿Es ρ una métrica en $\mathcal{A}$?

6. Sea μ una función aditiva y no-negativa definida en el álgebra $\mathcal{A}$. Si $A_1, A_2, \dots$ son conjuntos disjuntos en $\mathcal{A}$ y $\cup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$, demuestre que
$$\mu(\cup_{n \geq 1} A_n) \geq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

7. Demostramos que $P_1 = P_2$ sobre $\mathcal{B}$ si la igualdad se cumple sobre una clase $\mathcal{C}$ que genere a $\mathcal{B}$ y sea un sistema π. Demuestre que esta última propiedad no puede omitirse. Por ejemplo, considere $\Omega = \{a, b, c, d\}$ con
$$P_1(\{a\}) = P_1(\{d\}) = P_2(\{b\}) = P_2(\{c\}) = \frac{1}{6}; \qquad P_1(\{b\}) = P_1(\{c\}) = P_2(\{a\}) = P_2(\{d\}) = \frac{1}{3}$$
y $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{d, c\}, \{a, c\}, \{b, d\}\}$.

8. Sea $A_1, A_2, \dots$ una sucesión de conjuntos nulos. Demuestre que $B = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ también es un conjunto nulo.

9. Sea P una medida de probabilidad sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Demuestre que para cualquier $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y cualquier $\varepsilon > 0$ existe una unión de intervalos A tal que $P(A \triangle B) < \varepsilon$. (Ayuda: defina $\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \forall \varepsilon > 0$, existe una unión finita de intervalos A tal que $P(A \triangle B) < \varepsilon\}$).

10. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de Ω y sea μ una función sobre $\mathcal{A}$ que es finitamente aditiva con $\mu(\Omega) = 1$. Si $A_n \in \mathcal{A}$ y $A_n \downarrow \emptyset$, ¿es cierto que $\mu(A_n) \downarrow 0$?

11. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ una espacio de medida σ-finita con $\mu(\Omega) = \infty$. Demuestre que para cualquier $M < \infty$ existe algún $A \in \mathcal{F}$ con $M < \mu(A) < \infty$.

12. Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y sea $\mu_1, \dots, \mu_n$ medidas en $\mathcal{F}$. Sea $c_1, \dots, c_n$ constantes positivas. Demuestre que $c_1\mu_1 + \cdots + c_n\mu_n$ es una medida en $\mathcal{F}$.

13. Para cualquier $x \in \Omega$ y cualquier $A \subset \Omega$ definimos $\delta_x(A) = \mathbf{1}_A(x)$. Demuestre que δ_x es una medida en $\mathcal{P}(\Omega)$.

14. Sea $\mathcal{A}$ el álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ generada por los conjuntos de la forma $A_{a,b} = [-b,-a) \cup (a,b]$ para $0 < a < b$. Sea $m(A_{a,b}) = b - a$. Demuestre que m puede ser extendida a una a medida en una σ-álgebra. ¿Es medible $[1,2]$ respecto a m^*?

Definición 1 *Una función $\tau : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ es una medida exterior si (i) $\tau(\emptyset) = 0$, (ii) τ es monótona: $A \subset B \Rightarrow \tau(A) \leq \tau(B)$ y (iii) τ es σ-subaditiva: $A \subset \cup_{i\geq 1} A_i \Rightarrow \tau(A) \leq \sum_{i\geq 1} \tau(A_i)$.*

15 Decimos que una medida exterior μ^* es regular si para todo $A \subset \Omega$ existe un cubrimiento medible $E \supset A$ tal que $\mu^*(A) = \mu^*(E)$. Demuestre que si μ^* es una medida exterior regular en Ω y $\mu^*(\Omega) < \infty$ entonces una condición necesaria y suficiente para que E sea μ^*-medible es que $\mu^*(\Omega) = \mu^*(E) + \mu^*(E^c)$.

16 En cada uno de los siguientes casos demuestre que μ^* es una medida exterior de acuerdo a la definición anterior y determine la clase de los conjuntos medibles.

a) $\mu^*(\emptyset) = 0, \mu(A) = 1$ para todo $A \neq \emptyset$.

b) $\mu^*(\emptyset) = 0, \mu(A) = 1$ para todo $A \neq \emptyset, A \neq \Omega$, $\mu^*(\Omega) = 2$.

c) Ω no es numerable, $\mu^*(A) = 0$ si A es numerable, $\mu^*(A) = 1$ si A no es numerable.

17 Demuestre que si una medida exterior es aditiva entonces es σ-aditiva.

18 Sea μ una medida discreta sobre Ω. Demuestre que la operación de extenderla a una medida exterior y luego restringir esta extensión a la clase de los conjuntos medibles como se hace en el teorema de extensión, no da nada nuevo.

19 Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, sean A_j, B_j subconjuntos de Ω tales que $\mu^*(A_j \triangle B_j) = 0$ para $j \geq 1$ Demuestre que $\mu^*(\cup_j A_j) = \mu^*(\cup_j B_j)$.

20 **Completación.** Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Decimos que un conjunto N es nulo sii $N \in \mathcal{F}$ y $P(N) = 0$. Decimos que un conjunto B es exiguo si existe un conjunto nulo N tal que $B \subset N$. Observamos que no se pide que B sea medible. Sea $\mathcal{N}$ la clase de los conjuntos exiguos. Decimos que $\mathcal{F}$ es completa (respecto a P) si todo conjunto exiguo es nulo. Si $\mathcal{F}$ no es completa definimos $\mathcal{F}^* = \{A \cup M : A \in \mathcal{F},\ M \in \mathcal{N}\}$

a) Demuestre que $\mathcal{F}^*$ es una σ-álgebra.

b) Si $A_i \in \mathcal{F}$ y $M_i \in \mathcal{N}$ para $i = 1, 2$ y $A_1 \cup M_1 = A_2 \cup M_2$, entonces $P(A_1) = P(A_2)$.

c) Definimos $P^* : \mathcal{F}^* \to [0,1]$ por $P^*(A \cup M) = P(A)$, para $A \in \mathcal{F},\ M \in \mathcal{N}$. Demuestre que P^* es una extensión de P a $\mathcal{F}^*$.

d) Si $B \subset \Omega,\ A_i \in \mathcal{F},\ i = 1, 2,\ A_1 \subset B \subset A_2$ y $P(A_2 \setminus A_1) = 0$, demuestre que $B \in \mathcal{F}^*$.

e) Demuestre que $\mathcal{F}^*$ es completa.

f) Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Sea $p_k \geq 0$, $\sum_k p_k = 1$. Sea (a_k) una sucesión en $\mathbb{R}$. Definimos P por $P(\{a_k\}) = p_k$, $P(A) = \sum_{a_k \in A} p_k$, $A \in \mathcal{B}$. ¿Cuál es la completación de $\mathcal{B}$?

21 **Medidas Regulares.** Considere el espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$. Un conjunto de Borel A es regular si

$$P(A) = \inf\{P(G) : A \subset G, G \text{ abierto }\} \quad \text{y} \quad P(A) = \sup\{P(F) : F \subset A, F \text{ cerrado }\}$$

P es regular si todos los conjuntos de Borel son regulares. Sea $\mathcal{R}$ la colección de los conjuntos regulares.

a) Demuestre que $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son regulares.

b) Demuestre que $\mathcal{R}$ es cerrada bajo complementos y uniones numerables.

c) Demuestre que los subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ son regulares.

d) Demuestre que P es regular.

e) Demuestre que para cualquier boreliano A, $P(A) = \sup\{P(K) : K \subset A, K \text{ compacto }\}$