Medida y Probabilidad
Problemas II

Los problemas 3, 7, 9, 17 y 26 son para entregar el lunes 17/08/09.

1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales, y sea $A_n = (-\infty, x_n)$. ¿Cuál es la conexión entre $\limsup_{n\to\infty} x_n$ y $\limsup_{n\to\infty} A_n$. Lo mismo para $\liminf$.

2. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y sea $B \in \mathcal{A}$. Demuestre que $\mathcal{F} = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de B. ¿Es cierto este resultado si B es un subconjunto de Ω que no pertenece a $\mathcal{A}$?

3. Sean f_n, f funciones reales sobre Ω. Demuestre que
$$\{\omega : f_n(\omega) \nrightarrow f(\omega)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{\omega : |f_n(\omega - f(\omega)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

4. Demuestre que $A_n \to A$ sí y sólo sí $\mathbf{1}_{A_n} \to \mathbf{1}_A$.

5. Sea $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea $\mathcal{C} = \{\{b, d\}, \{f\}\}$. ¿Cuál es el álgebra generada por $\mathcal{C}$ y cuál la σ-álgebra?

6. a) Suponga que $\mathcal{A}_n$ son álgebras que satisfacen $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$. Demuestre que su unión también es un álgebra.

   b) Sin embargo, la unión de una colección numerable de σ-álgebras no necesariamente es una σ-álgebra, aún cuando $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_{j+1}$. ¿Es cierto que una unión numerable de σ-álgebras es un álgebra? (Ayuda: ponga $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_j$ la clase de todos los subconjuntos de $\{1, \dots, j\}$ y $\mathcal{F}_j = \sigma(\mathcal{C}_j)$. Por otro lado, si $\mathcal{F}_i, i = 1, 2$ son dos σ-álgebras, $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ no necesariamente es un álgebra.

7. Suponga que $\mathcal{C}$ es una clase no vacía de subconjuntos de Ω. Sea $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ el álgebra generada por $\mathcal{C}$. Demuestre que $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ consiste de los eventos de la forma
$$\bigcup_{i=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{n_i} A_{ij},$$
donde para cada i, j, o bien $A_{ij} \in \mathcal{C}$ o bien $A_{ij}^c \in \mathcal{C}$ y donde los m conjuntos $\cap_{j=1}^{n_i} A_{ij}$, $1 \leq i \leq m$ son disjuntos. Por lo tanto podemos representar explícitamente los conjuntos de $\mathcal{A}(\mathcal{C})$, aunque esto es imposible para la σ-álgebra $\sigma(\mathcal{C})$.

8. Suponga que $\mathcal{A}$ es un álgebra con la propiedad de ser cerrada bajo uniones numerables disjuntas. Demuestre que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra.

9. Demuestre que los borelianos en $[0, 1]$ pueden ser generados por una clase numerable de conjuntos.

10. Sean $\mathcal{F}_i$ σ-álgebras de subconjuntos de Ω para $i = 1, 2$. Demuestre que $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ definida como la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{F}_1$ y a $\mathcal{F}_2$ está generada por conjuntos de la forma $B_1 \cap B_2$, donde $B_i \in \mathcal{F}_i$, para $i = 1, 2$.

11. Sea Ω un conjunto no numerable y sea $\mathcal{G}$ la σ-álgebra que consiste de los conjuntos numerables y conumerables. Demuestre que $\mathcal{G}$ no puede ser generada por una colección numerable de conjuntos.

12. Una σ-álgebra no puede ser numerablemente infinita: Su cardinalidad debe ser finita o al menos la del continuo.

13. Para un subconjunto $A \subset \mathbb{N}$, $\text{card}(A)$ representa el número de elementos de A. Un conjunto de este tipo tiene densidad asintótica d si
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{card}(A \cap \{1, 2, \dots, n\})}{n} = d$$
Sea $\mathcal{A}$ la colección de subconjuntos que tienen densidad asintótica. ¿Es $\mathcal{A}$ un álgebra? ¿Es una σ-álgebra?

14. Sea $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ σ-álgebras de subconjuntos del espacio Ω. Determine si las siguientes colecciones de subconjuntos de Ω son σ-álgebras. $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{A : A \in \mathcal{F} \text{ y } A \in \mathcal{G}\}$, $\quad \mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \{A : A \in \mathcal{F} \text{ ó } A \in \mathcal{G}\}$.

15. Sea Ω un conjunto no-vacío y sea $\mathcal{C}$ la clase de todos los subconjuntos de Ω con un solo elemento. Demuestre que $\sigma(\mathcal{C}) = \{A \subset \Omega : A \text{ es numerable }\} \cup \{A \subset \Omega : A^c \text{ es numerable }\}$

16. Sea $\Omega = \{e^{i2\pi\theta}, 0 \leq \theta < 1\}$ el círculo unitario y sea $\mathcal{A}$ la colección de arcos en Ω con extremos racionales. Demuestre que $\mathcal{A}$ es un álgebra pero no una σ-álgebra.

Definición 1 *Un* anillo $\mathcal{E}$ *de subconjuntos de* Ω *es una colección de subconjuntos que satisface* $\emptyset \in \mathcal{E}$ *y si* $A, B \in \mathcal{E}$ *entonces* $A \cup B \in \mathcal{E}$ *y* $\mathcal{B} - A \in \mathcal{E}$. *La diferencia entre un anillo y un álgebra es que un álgebra debe contener a* Ω.

Un σ-anillo *es un anillo que es cerrado bajo uniones numerables*

17. Si $\Omega = [0, 1)$ y $\mathcal{C}$ consiste de los 6 conjuntos $\emptyset$, Ω, $[0, \frac{1}{2})$, $[0, \frac{1}{4}$, $[0, \frac{3}{4})$, $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, y μ definida sobre $\mathcal{C}$ toma los siguientes valores

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu[0, \frac{1}{4}) = 2, \quad \mu[0, \frac{1}{2}) = 2, \quad \mu[0, \frac{3}{4}) = 4, \quad \mu[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = 2, \quad \mu(\Omega) = 4$$

Demuestre que μ es aditiva en $\mathcal{C}$. ¿Es posible extender μ a una función aditiva en el álgebra generada por $\mathcal{C}$?

18. Una función de conjuntos $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ es *monótona* si $\mu(\emptyset) = 0$ y $E \subset F,\ E, F \in \mathcal{C} \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$. Demuestre que las funciones monótonas son no-negativas, y si $\mathcal{C}$ es un álgebra, demuestre que una función aditiva y no-negativa es monótona.

19. Sea $\Omega = \mathbb{N}$ y sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente de términos positivos. Si E es un subconjunto finito de Ω, definimos $\tau(E) = \sum_{n \in E} a_n$. Si E es un subconjunto infinito de Ω, $\tau(E) = \infty$. Demuestre que τ es aditiva pero no σ-aditiva en la clase de todos los subconjuntos de Ω.

20. Sea Ω un conjunto numerablemente infinito y sea $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Definimos $\mu(A) = 0$ si A es finito, $\mu(A) = \infty$ si A es infinito. Demuestre que μ es finitamente aditiva pero no σ-aditiva. Demuestre también que Ω es el límite de una sucesión creciente de conjuntos A_n con $\mu(A_n) = 0$ para todo n pero $\mu(\Omega) = \infty$.

21. Sea μ la medida de contar en Ω donde Ω es un conjunto infinito. Demuestre que existe una sucesión de conjuntos $A_n \downarrow \emptyset$ con $\text{lím}_n\, \mu(A_n) \neq 0$.

22. Sea $\{A_j,\ 1 \leq j \leq n\}$ una colección de conjuntos y defina $B_k = \cup_{j=1}^{k} A_j$, para $k = 1, 2, \ldots, n$. Demuestre que $\sigma(\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}) = \sigma(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\})$.

23. Sea $\mathcal{E}$ un σ-anillo de subconjuntos de Ω y sea μ una medida sobre $\mathcal{E}$. Demuestre que la clase de conjuntos $E \in \mathcal{E}$ con $\mu(E) < \infty$ es un anillo, y la clase con $\mu(E)$ σ-finita forma un σ-anillo.

24. Sea μ una medida σ-finita sobre la σ-álgebra $\mathcal{F}$ y sea $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ una clase de subconjuntos disjuntos de Ω. Demuestre que la clase de los conjuntos $D \in \mathcal{D}$ con $\mu(D) > 0$ es numerable.

25. Demuestre que las dos definiciones de sistema λ que dimos en clase son equivalentes.

26. Sea $f : \Omega \to (E, \mathcal{E})$ con $\mathcal{E}$ una σ-álgebra. Sea $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega :\ \text{existe } B \in \mathcal{E} \text{ con } A = f^{-1}(B)\}$. Demuestre que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra en Ω. Escribimos $\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{E})$.

27. Demuestre el principio de inclusión-exclusión: Para $A_1, \ldots, A_n$ en $\mathcal{F}$ demuestre que

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

28. (Desigualdades de Bonferroni) Sea $A_i \in \mathcal{F}$ una sucesión de eventos. Demuestre

 a) $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j)$

 b) $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$

29. Suponga que $\{B_n, n \geq 1\}$ son eventos con $P(B_n) = 1\ \forall n$. Demuestre que $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = 1$.

30. Sea $(A_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de conjuntos disjuntos 2 a 2 y P una probabilidad. Demuestre que $\text{lím}_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.