Medida e Integración
Problemas XII
Los problemas 1, 2, 6, 11, y 18 son para entregar el lunes 30/11/2009.

1. *a*) Sea X una v.a. positiva. Use el teorema de Fubini para demostrar que $\mathrm{E}[X] = \int_{[0,\infty)} P(X > t)dt$.
   b) Verifique también que para cualquier $\alpha > 0$, $\mathrm{E}[X^\alpha] = \alpha \int_{[0,\infty)} x^{\alpha-1} P(X > t)dt$.

2. Para cada una de las siguientes funciones calcule
$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy, \qquad \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx, \qquad \iint_{[0,1]^2} f(x,y)\,dxdy.$$
$$a) f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad b) f(x,y) = \begin{cases} (x-\frac{1}{2})^{-3} & \text{para } 0 < y < |x - \frac{1}{2}|, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

3. Repita el ejercicio anterior para $a) f(x,y) = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\quad b) f(x,y) = (1-xy)^{-p},\ p > 0$.

4. Sea $0 < a < b$. Usando el teorema de Fubini para la integral $\iint_{\mathcal{R}} x^y dxdy$, donde $\mathcal{R} = [0,1] \times [a,b]$, demuestre que
$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx = \log \frac{1+b}{1+a}$$

5. Sea $\mathcal{R}$ la región del cuadrante $x \geq 0,\ y \geq 0$ acotada por las curvas $y - x = 0,\ y^2 - x^2 = 1,\ xy = a,\ xy = b,\ (0 < a < b)$. Usando un cambio de variables que transforme $\mathcal{R}$ en un rectángulo, calcule la integral
$$\iint_{\mathcal{R}} (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)dxdy$$

6. Demuestre que $f(\omega_1, \omega_2) = e^{-\omega_1\omega_2} - 2e^{-2\omega_1\omega_2}$ es integrable según Lebesgue (i) sobre $\Omega_1 = [1, \infty)$ para cada ω_2 y (ii) sobre $\Omega_2 = (0, 1]$ para cada ω_2, pero el teorema de Fubini no es válido. ¿Por qué?

7. Suponga que X, Y son dos v.a. tales que (X, Y) y $(-X, Y)$ tienen la misma distribución conjunta. Demuestre que X e Y no están correlacionadas.

8. Un par de variables aleatorias X_1, X_2 tienen distribución bivariada de Poisson si
$$P(X_1 = j, X_2 = k) = e^{-(a_1+a_2+a_{12})} \sum_{i=0}^{\min(j,k)} \frac{a_{12}^i a_1^{j-i} a_2^{k-i}}{i!(j-i)!(k-i)!}$$
para cualquier par de enteros no negativos (j, k), donde a_1, a_2, a_{12} son parámetros no negativos. Defina un espacio de probabilidad y variables aletorias X_1 y X_2 cuya distribución conjunta sea de Poisson bivariada y demuestre que X_i es una v.a. de Poisson con media $a_i + a_{12}$. Demuestre que la correlación $\rho(X_1, X_2) \geq 0$ y que X_1 y X_2 son independientes sii $a_{12} = 0$.

9. Sean $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{N}$ con μ la medida 'que cuenta': $\mu(A) = \sharp(A)$ y sea
$$f(x,y) = \begin{cases} 2 - 2^{-x} & \text{si } x = y, \\ -2 + 2^{-x} & \text{si } x = y + 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
entonces las integrales iteradas existen pero no son iguales. ¿Por qué no contradice esto el teorema de Fubini?

10. Demuestre que $xy/(x^2 + y^2)^2$ no es integrable sobre el cuadrado $\{(x, y) : |x|, |y| \leq 1\}$, aun cuando las integrales iteradas existen y son iguales.

11. Muestre que la siguiente función es la función de distribución de algún vector aleatorio (X, Y):
$$F(x,y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}), & \text{si } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$
Halle la densidad conjunta y las distribuciones y densidades marginales de X e Y. ¿Son independientes?

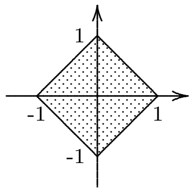
12. Seleccionamos al azar (es decir, con distribución uniforme) un punto en la siguiente región

 Sean X e Y las coordenadas del punto.

 (a) ¿Cuál es la densidad conjunta de X e Y?

 (b) Obtenga la densidad marginal de X.

 (c) ¿Son X e Y independientes?



13. Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes con densidad común de Rayleigh con parámetro $\theta > 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2}\exp(-\frac{x^2}{2\theta^2}), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

 (a) Determine la densidad conjunta de $Y_1, \dots, Y_n$, donde $Y_i = X_i^2$.

 (b) ¿Cuál es la distribución de $U = \min_{1\le i\le n} X_i$?

 (c) Halle la distribución de $Z = X_1/X_2$.

14. Sea X e Y variables aleatorias independientes con distribución común $\mathcal{N}(0,1)$. Demuestre que $U = (X+Y)/\sqrt{2}$ y $U = (X-Y)/\sqrt{2}$ también son independientes $\mathcal{N}(0,1)$.

15. La duración de un cierto tipo de llamada telefónica satisface la relación $P(T > t) = ae^{-\lambda t} + (1-a)e^{-\xi t},\ t \ge 0$ donde $0 \le a \le 1,\ \lambda > 0,\ \xi > 0$. Halle la media y varianza de T.

16. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución común $U[0,1]$, y sean $\theta = \pi(2Y-1)$ y $R = \sqrt{2\log(1/(1-X))}$. (a) Demuestre que $\theta \sim U[-\pi,\pi]$ y que R tiene distribución de Rayleigh de parámetro 1. (b) Demuestre que Z y W, definidas por $Z = R\cos\theta$ y $W = R\sin\theta$ son independientes con distribución común $\mathcal{N}(0,1)$. Esta es la base del algoritmo de Box y Muller para generar variables gaussianas.

17. Decimos que la distribución de una variable X es simétrica (respecto a cero) si $P(X \ge x) = P(X \le -x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y que es simétrica respecto a μ si $P(X \ge \mu + x) = P(X \le \mu - x)$

 (a) Demuestre que si la distribución de X es simétrica respecto de μ y X es integrable entonces $E(X) = \mu$.

 (b) Suponga que X tiene densidad $f(x)$. Muestre que si $f(\mu+x) = f(\mu-x)$ para todo x entonces la distribución de X es simétrica respecto a μ. Enuncie y demuestre la propiedad análoga para X discreta.

 (c) ¿Cuál es el punto de simetría de las distribuciones de las siguientes variables aleatorias? Si la variable es integrable, diga cual es su esperanza. (i) $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ (ii) $X \sim Cauchy(M,b), i.e., f(x) = \frac{b}{\pi[b^2+(x-M)^2]}, x \in \mathbb{R}$ (iii) $X \sim \mathcal{U}(a,b)$. (iv) $X \sim bin(n, \frac{1}{2})$.

18. Sea X e Y dos v.a. independientes con distribución común $\mathcal{U}[0,1]$. Sean $Z = \text{máx}(X,Y), W = \min(X,Y)$.

 (a) Calcule $E(Z), E(W)$.

 (b) Determine los valores de t, $t \in \mathbb{R}$ tales que $E(X^t)$ sea finita. ¿Cuál es el valor de esta esperanza?

 (c) Calcule $Var(Z), Var(W)$.

 (d) Calcule el coeficiente de correlación entre Z y W.

19. Dos jugadores lanzan monedas simultáneamente hasta obtener la primera 'coincidencia' (es decir, dos 'águilas' o dos 'soles'). Si los dos lanzan 'águila' simultáneamente gana el jugador I; si ambos lanzan 'sol', gana el jugador II. Por ejemplo, si ambos lanzan 'sol' en el primer lanzamiento, el juego termina y gana el jugador II. Suponga que la moneda del jugador I sea simétrica, pero que la del otro puede no serlo, siendo p la probabilidad de 'águila', $0 < p < 1$. (a) Calcule la esperanza del número de lanzamientos. (b) Halle la probabilidad de que el jugador I gane el juego.

20. Si X toma valores en el intervalo $[a,b]$ pruebe que $a \le E(X) \le b$ y $Var(X) \le (b-a)^2/4$. (Sugerencia: considere primero $a = 0, b = 1$). De un ejemplo de una variable que tenga la varianza máxima.

21. Si X es integrable muestre que $E(X) = \int_0^\infty P(X > t)\,dt - \int_{-\infty}^0 P(X < t)\,dt$.

22. Muestre que si X tiene distribución normal típica entonces $E(|X|^{2n+1}) = 2^n n!\sqrt{2/\pi}$. ($X$ tiene distribución normal típica si su densidad es $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$).