Medida e Integración
Problemas XI
Los problemas 1, 3, 4, 13, y 17 son para entregar el lunes 16/11/07.

1. Suponga que para cada n el par de v.a. ξ_n, η_n son independientes y $\xi_n \to \xi$, $\eta_n \to \eta$ puntualmente. Demuestre que ξ, η son independientes de modo que la independencia se conserva cuando tomamos límites.

2. Demuestre:

   (i) Cualquier variable aleatoria es independiente de una variable degenerada.

   (ii) Dos eventos disjuntos son independientes si y sólo si uno de ellos tiene probabilidad cero.

   (iii) Si $P(X = \pm 1,\ Y = \pm 1) = 1/4$ para cualquiera de los cuatro pares de signos, entonces X e Y son independientes.

3. Si X, Y, Z son v.a. en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y $\perp$ denota independencia, demuestre o de contrajemplos para las siguientes relaciones:

   (i) $X \perp Y \quad \Leftrightarrow \quad X^2 \perp Y^2$.

   (ii) $X \perp Y,\ X \perp Z \quad \Leftrightarrow \quad X \perp (Y + Z)$.

   (iii) $X \perp Y,\ Y \perp Z \quad \Rightarrow \quad X \perp Z$.

   (iv) $X \perp (Y, Z),\ Y \perp Z \quad \Rightarrow \quad X, Y, Z$ son independientes.

4. El color de las flores de una planta está determinado por dos genes que la planta recibe de manera independiente de las plantas que la generan. Si los genes son idénticos, las flores son unicolores, del color determinado por los genes. Si estos son diferentes, las flores son veteadas con los colores de ambos genes. Los genes para los colores blanco, rosado y rojo ocurren en la población en la proporción $p : q : r$, donde $p + q + r = 1$. Si los padres de una planta se seleccionan al azar, llamemos A al evento que ocurre si las flores son al menos parcialmente rosadas, y B al evento que ocurre si las flores son veteadas.

   (i) Halle $P(A)$ y $P(B)$.

   (ii) Demuestre que A y B son independientes si $p = 2/3$ y $r = q = 1/6$.

   (iii) ¿Son estos los únicos valores de p, q y r para los cuales A y B son independientes?

5. Halle un ejemplo sencillo de eventos dependientes A_n tales que $\sum P(A_n) = \infty$ pero $P(A_n i.v.) < 1$.

6. Si $\{X_n, n \geq 1\}$ son v.a.i. demuestre que $P(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = 1$ si y sólo si
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq \varepsilon) < \infty,$$
   para todo $\varepsilon > 0$.

7. Sean $X_n,\ n \geq 1$ una sucesión i.i.d. con $P(X_n = 1) = 1/2 = P(X_n = -1)$. Demuestre que $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$ converge a 0 en probabilidad.

8. Sean X_n y S_n como en el ejercicio anterior. Demuestre que $\frac{1}{n^2} S_{n^2}$ converge a 0 c.s.

9. Si $A_1, A_2 \subset \Omega_1$, $B_1, B_2 \subset \Omega_2$ y $A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2$ no es nulo, demuestre que $A_1 = A_2$ y $B_1 = B_2$.

10. Suponga que $E = A \times B$, $E = A_1 \times B_1$, $E = A_2 \times B_2$ son reactángulos no vacíos en $\Omega_1 \times \Omega_2$. Demuestre que E es la unión disjunta de E_1 y E_2 sí y sólo sí o bien A es la unión disjunta de A_1, A_2 y $B = B_1 = B_2$ o bien B es la unión disjunta de B_1, B_2 y $A = A_1 = A_2$.

11. Demuestre que la intersección de cualquier colección de rectángulos es un rectángulo.

12. Suponga que $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ son σ-álgebras en Ω_1, Ω_2, respectivamente. Entonces un rectángulo $A_1 \times A_2$ está en $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ sí y sólo sí $A_i \in \mathcal{F}_i$, $i = 1, 2$.

13. Suponga que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ y sea $A \in \mathcal{F}$. Demuestre que las proyecciones de A no necesariamente están en $\mathcal{F}_1$ o $\mathcal{F}_2$.

14. El producto de dos espacios de probabilidad completos no necesariamente es completo: Tome $\Omega_1 = \Omega_2 = [0, 1]$ con los borelianos y la medida de Lebesgue. Sea M un conjunto no medible en Ω_1 y considere el conjunto $M \times \{x\}$. (Use el ejercicio 12)

15. Sea X_n una sucesión de v.a. tales que

$$P(X_n = \pm n^3) = \frac{1}{2n^2}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Usando el lema de Borel-Cantelli demuestre que, c.p.1, $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$. Calcule $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[X_n]$. ¿Vale 0? ¿Es posible aplicar el Teorema de Convergencia Dominada? ¿Por qué?

16. Sea $\{p_k, k \geq 0\}$ una distribución de probabilidad sobre los enteros $\{0, 1, 2, \dots\}$. Definimos la función generadora de momentos por

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \qquad 0 \leq s \leq 1.$$

Usando el Teorema de Convergencia Dominada demuestre que

$$\frac{d}{ds} G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k k s^{k-1}, \qquad 0 \leq s \leq 1.$$

17. Suponga que $\Omega_1 = \Omega_2$ es un conjunto no-numerable y $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ es la σ-álgebra de los conjuntos numerables o conumerables. Determine cual es la σ-álgebra producto $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. Si $D = \{(x, y) : x = y\}$ es la diagonal en $\Omega_1 \times \Omega_2$ demuestre que todas las secciones de D son medibles pero D no está en $\Omega_1 \times \Omega_2$.

18. En una sucesión de ensayos de Bernoulli con probabilidad de éxito p, sea Y el tiempo de espera hasta que ocurra el primer éxito. Halle la distribución de Y, que se conoce cómo la distribución geométrica. Si $Y_1, \dots, Y_n$ son v.a.i.i.d. con distribución geométrica, halle la función de probabilidad de $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, que se conoce como la distribución binomial negativa (cpn parámetros n y p.

19. Si Y y Z son v.a.i. con distribución binomial (resp. Poisson, binomial negativa) con parámetros (n, p) y (m, p) (resp. λ_1 y λ_2, (n_1, p) y (n_2, p)) entonces $Y + Z$ es una v.a. binomial (resp. Poisson, binomial negativa) con parámetros $(m + n, p)$ (resp. $\lambda_1 + \lambda_2$, $(n_1 + n_2, p)$). Por lo tanto si $\{X_n, n \geq 1\}$ son v.a.i.i.d. de Poisson con parámetro λ, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ es una v.a. de Poisson con parámetro $n\lambda$.

20. Si N_p es una v.a. con distribución geométrica de parámetro p, demuestre que $\lim_{p\to 1} P((1 - p)N_p < x) = 1 - e^{-x},\ x > 0$, es decir, el límite tiene distribución exponencial.