Capítulo 1

Conjuntos

Supondremos conocidas las nociones básicas sobre teoría de conjuntos, tales como subconjuntos, elementos, unión, intersección, complemento, diferencia, diferencia simétrica, propiedades de conmutatividad de las operaciones de conjuntos y las leyes de Morgan.

En general vamos a considerar un conjunto Ω. Llamaremos $\mathcal{P}(\Omega)$ al conjunto de partes de Ω, es decir, al conjuntos de todos los subconjuntos de Ω.

1.1. Funciones Indicadoras

Definición 1.1 Sea $A \subset \Omega$, definimos la función indicadora de A por

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

A partir de la definición obtenemos las siguientes propiedades para estas funciones:

- $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B$
- $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$.
- $\mathbf{1}_{A \cup B} \leq \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$ con igualdad si $A \cap B = \emptyset$.
- $\mathbf{1}_\Omega(\omega) \equiv 1$

La relación entre conjuntos y funciones indicadoras es uno a uno ya que

$$A = \{\omega \in \Omega : \mathbf{1}_A(\omega) = 1\}$$

1.2. Limites de Conjuntos

Definición 1.2 Sea $\{A_n,\ n \geq 1\}$ una sucesión de subconjuntos de Ω. Definimos los siguientes conjuntos:

$$\inf_{k \geq n} A_k = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \qquad \sup_{k \geq n} A_k = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\liminf_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

Los últimos dos conjuntos se conocen como el límite inferior y límite superior de la sucesión de conjuntos.

A partir de las definiciones tenemos las siguientes caracterizaciones de estos conjuntos. Un punto x pertenece al conjunto $\limsup A_n$ si y sólo si pertenece a infinitos conjuntos de la sucesión. En cambio x pertenece a $\liminf A_n$ si y sólo si existe un entero $p = p(x)$ tal que $x \in A_k$ para todo $k \geq p$.

Ahora es fácil ver que

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \tag{1.1}$$

ya que

$$\{x : x \in A_k, \text{ para todo } k \geq p(x)\} \subset \{x : x \in A_k \text{ para infinitos } k\}.$$

Si la contención en sentido contrario a (1.1) es válida, es decir, si

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A$$

decimos que la sucesión A_n es convergente y que su límite es A. En este caso escribimos $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ o $A_n \to A$.

Lema 1.1 *Sea $\{A_n,\ n \geq 1\}$ una sucesión de subconjuntos de Ω.*

(a)

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} A_n &= \Big\{x : \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x) = \infty\Big\} \\ &= \{x : x \in A_{k_n}, n \geq 1\}\end{aligned}$$

para alguna subsucesión infinita k_n, que depende de x.

(b)

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} A_n &= \Big\{x : \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n^c}(x) < \infty\Big\} \\ &= \{x : x \in A_k, \forall k \geq n(x)\}\end{aligned}$$

Demostración. (a) Si

$$x \in \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

entonces para todo n, $x \in \cup_{k\geq n} A_k$, por lo tanto para todo n existe $k_n \geq n$ tal que $x \in A_{k_n}$, y en consecuencia

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_j}(x) \geq \sum_{n} \mathbf{1}_{A_{k_n}}(x) = \infty,$$

lo cual implica que

$$x \in \Big\{x : \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x) = \infty\Big\}.$$

En consecuencia,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subset \{x : \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x) = \infty\}.$$

Recíprocamente, si

$$x \in \Big\{x : \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x) = \infty\Big\}.$$

entonces existe $k_n \to \infty$ tal que $x \in A_{k_n}$, y por lo tanto para todo n, $x \in \cup_{j\geq n} A_j$, de modo que $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$. En consecuencia

$$\{x : \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}(x) = \infty\} \subset \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

La demostración de (b) es similar. ■

1.3. Sucesiones Monótonas

Definición 1.3 Una sucesión de conjuntos $\{A_n,\ n \geq 1\}$ es *no-decreciente* si $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \geq 1$. La sucesión $\{A_n,\ n \geq 1\}$ es *no-creciente* si $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \geq 1$. Usamos la notación $A_n \nearrow$ o $A_n \uparrow$ para sucesiones no decrecientes y la notación $A_n \searrow$ o $A_n \downarrow$ para sucesiones no crecientes.

Las sucesiones monótonas siempre tienen límite.

Proposición 1.1 *(a) Si $A_n \nearrow$ entonces* $\lim_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.
(b) Si $A_n \searrow$ entonces $\lim_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Demostración.
(a) Tenemos que ver que

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Como $A_k \subset A_{k+1}$,

$$\bigcap_{k\geq n} A_k = A_n$$

y por lo tanto

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \qquad (1.2)$$

De manera similar,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k \subset \bigcup_{k\geq 1} A_k \\ &= \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k\geq 1} A_k.$$

Esto y (1.2) muestran (a). La demostración de (b) es similar. ■

Usaremos las notaciones $A_n \uparrow A$ ($A_n \downarrow A$) para indicar una sucesión creciente (decreciente) que converge a A.

1.4. Colecciones de Conjuntos

Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de Ω. A continuación vamos a definir algunos tipos de colecciones de conjuntos según sus propiedades de cerradura respecto a operaciones de conjuntos.

Definición 1.4 $\mathcal{C}$ es un álgebra si
(a) $\Omega \in \mathcal{C}$.
(b) Si $A \in \mathcal{C}$ entonces $A^c \in \mathcal{C}$.
(c) Si $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{C}$, entonces $\cup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{C}$.

Es posible verificar que si la condición (c) se satisface para $n = 2$ entonces se satiface para cualquier n finito. Además, por las leyes de Morgan, (b) y (c) implican que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo intersecciones finitas:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\Big)^c \in \mathcal{C}$$

Definición 1.5 $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra si satisface las siguientes condiciones:
(a) $\Omega \in \mathcal{F}$.
(b) Si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A^c \in \mathcal{F}$.
(c) Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, entonces $\cup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{F}$.

Al igual que el caso anterior, si $A_i \in \mathcal{F},\ i \geq 1$ entonces $\cap_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{F}$.

Ejemplos 1.1

1. Sea $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, el conjunto de partes de Ω. $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra, ya que obviamente es cerrada bajo todas las operaciones.

2. La σ-álgebra trivial se define como $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$. En este caso es sencillo verificar que las condiciones de la definición son válidas.

3. Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y sea $\mathcal{F}$ la colección de conjuntos que son numerables o que tienen complemento numerable:
$$\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ es numerable}\} \cup \{A \subset \mathbb{R} : A^c \text{ es numerable}\}$$
entonces $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra ya que

   (a) se satiface porque $\Omega^c = \emptyset$ es numerable,

   (b) se satisface por la simetría de la definición,

   (c) para ver la tercera condición de la definición veremos que si $A_i \in \mathcal{F},\ i \geq 1$ entonces $\cap_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{F}$. Hay dos casos que considerar: si al menos uno de los conjuntos A_i es numerable, entonces la intersección $\cap_{i\geq 1} A_i$ es numerable, y por lo tanto está en $\mathcal{F}$. Si ningún A_i es numerable, entonces A_i^c es numerable para todo i, de modo que $\cup_{i\geq 1} A_i^c$ es numerable. En consecuencia,
$$\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\Big)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

   Dos observaciones importantes en este ejemplo son las siguientes:

   - Si $A = (-\infty, 0]$, entonces $A^c = (0, \infty)$ y ni A ni A^c es numerable, de modo que $A \notin \mathcal{F}$, y en consecuencia $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(\Omega)$.
   - $\mathcal{F}$ no es cerrada bajo uniones cualesquiera. Por ejemplo, para cada $t \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{t\} \in \mathcal{F}$, porque es numerable, pero $A = \cup_{t\leq 0}\{t\} = (-\infty, 0] \notin \mathcal{F}$.

4. Sea $\Omega = (0,1]$, $\mathcal{A}$ consiste del conjunto vacío y todas las uniones finitas y disjuntas de intervalos de la forma $(a,b]$, $0 \leq a \leq b \leq 1$. Un conjunto típico de $\mathcal{A}$ es de la forma $\cup_{i=1}^{n}(a_i,b_i]$, donde los intervalos son disjuntos. Con esta definición $\mathcal{A}$ es un álgebra:

   - $\Omega = (0,1] \in \mathcal{A}$.
   - $\mathcal{A}$ es cerrada bajo complementos: Si $A = \cup_{i=1}^{n}(a_i,b_i]$ con
   $$0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_{m-1} \leq a_m \leq b_m \leq 1$$
   entonces
   $$A^c = \Omega \setminus A = (0,1] \setminus \cup_{i=1}^{n}(a_i,b_i] = (0,a_1] \cup (b_1,a_2] \cup \cdots \cup (b_{m-1},a_m] \cup (b_m,1]$$
   que también es un conjunto de $\mathcal{A}$.
   - $\mathcal{A}$ es cerrada bajo intersecciones finitas ya que $(a,b] \cap (a_1,b_1] = (a \vee a_1, b \wedge b_1]$.

   Observamos que, sin embargo, $\mathcal{A}$ no es una σ-álgebra. Por ejemplo, el conjunto
   $$(0,\frac{1}{2}] \cup (\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}] \cup (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16},\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}] \cup \cdots$$
   es unión numerable de conjuntos de $\mathcal{A}$ pero no está en $\mathcal{A}$.

1.5. La σ-álgebra Generada por una Colección de Conjuntos

Proposición 1.2 *La intersección de cualquier colección de σ-álgebras es una σ-álgebra.*

Demostración. Sea T un conjunto cualquiera de índices y sea $\mathcal{F}_t$ una σ-álgebra, para todo $t \in T$. Veamos que $\mathcal{F} = \cap_{t\in T}\mathcal{F}_t$ es una σ-álgebra:

- $\Omega \in \mathcal{F}_t$ para todo $t \in T$ y en consecuencia $\Omega \in \cap_{t\in T}\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$.
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F}_t$, para todo $t \in T \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_t$, para todo $t \in T \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$.
- Si $A_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \geq 1$ entonces para todo $n \geq 1$ tenemos que $A_n \in \mathcal{F}_t$, para todo $t \in T$. En consecuencia, $\cup_{n\geq 1}A_n \in \mathcal{F}_t$ para todo $t \in T$ y por lo tanto $\cup_{n\geq 1}A_n \in \mathcal{F}$.

Definición 1.6 Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de Ω. La σ-álgebra generada por $\mathcal{C}$, denotada por $\sigma(\mathcal{C})$, es una σ-álgebra que satisface

(a) $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$.

(b) Si $\mathcal{F}$ es otra σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$ entonces $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.

$\sigma(\mathcal{C})$ es la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$.

Proposición 1.3 *Dada una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de Ω, hay una única σ-álgebra generada por $\mathcal{C}$.*

Demostración. Sea
$$\aleph = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra y } \mathcal{C} \subset \mathcal{F}\}$$
la clase de todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{C}$. Esta clase no es vacía porque $\mathcal{P}(\mathcal{C}) \in \aleph$. Sea $\mathcal{A} = \cap_{\mathcal{F}\in\aleph}\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra por la proposición 1.2. Está claro que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ para cualquier $\mathcal{F}$ que contenga a $\mathcal{C}$. Por lo tanto $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$. ∎

Ejemplos 1.2

1. Sea A un subconjunto no vacío de Ω y sea $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$, entonces $\mathcal{F}$ es la menor σ-álgebra que contiene al conjunto A: $\mathcal{F} = \sigma(\{A\})$.

2.
   - Si $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra entonces $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.
   - Si $\mathcal{A}$ consiste de los conjuntos de un sólo elemento entonces $\sigma(\mathcal{F})$ es la σ-álgebra del ejemplo 1.1.3.
   - Si $\mathcal{F}$ es vacía o $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$ o $\mathcal{F} = \{\Omega\}$ entonces $\sigma(\mathcal{F}) = \{\emptyset, \Omega\}$.
   - Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ entonces $\sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{F}')$.
   - Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}' \subset \sigma(\mathcal{F})$ entonces $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F}')$.

3. Los Conjuntos de Borel. Sea $\mathcal{I}$ la clase de todos los subintervalos de $(0, 1]$ y definamos $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I})$. Los elementos de $\mathcal{B}$ se conocen como los Borelianos de $(0, 1]$. El álgebra $\mathcal{A}$ del ejemplo 1.1.4 satisface $\mathcal{I} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ y por lo tanto $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

   Como $\mathcal{B}$ contiene los intervalos y es una σ-álgebra, es imposible salir de $\mathcal{B}$ haciendo un cantidad finita o numerable de operaciones de conjuntos sobre intervalos. Por lo tanto $\mathcal{B}$ contiene a los conjuntos abiertos en $(0, 1]$: si G es abierto y $x \in G$ entonces existen racionales a_x, b_x tales que $x \in (a_x, b_x) \subset G$. Pero entonces $G = \cup_{x \in G}(a_x, b_x)$. Como sólo hay una cantidad numerable de intervalos con extremos racionales, G es la unión numerable de conjuntos en $\mathcal{I}$ y por lo tanto está en $\mathcal{B}$. En consecuencia si $\mathcal{O}$ es la colección de conjuntos abiertos en $(0, 1]$ tenemos que $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ y $\sigma(\mathcal{O}) \subset \mathcal{B}$. Veamos ahora que ambas σ-álgebras coinciden. Está claro que $\sigma(\mathcal{O})$ contiene a los intervalos abiertos y a los cerrados. Por lo tanto también a los de la forma $(\ ,\ ]$ y $[\ ,\ )$. Es decir $\mathcal{I} \subset \sigma(\mathcal{O})$. Por lo tanto $\mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{O})$ y ambas coinciden.

   En $\mathbb{R}$ la definición de los Borelianos es similar. Tomamos $\mathcal{I}$ la clase de todos los intervalos en $\mathbb{R}$ y definimos $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I})$. Al igual que para $(0, 1]$ se tiene que los abiertos $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ están contenidos en $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{O})$.

   En general, si $\mathbb{E}$ es un espacio métrico, es usual definir a los Borelianos de $\mathbb{E}$, $\mathcal{B}(\mathbb{E})$, como la σ-álgebra generada por los subconjuntos abiertos de $\mathbb{E}$. Ejemplos de espacios métricos que se consideran con frecuencia son $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^\infty$, el espacio de sucesiones reales, y $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, el espacio de funciones continuas en $\mathbb{R}$.