Medida
Problemas IX
Los problemas 5, 7, 13, 17, y 18 son para entregar el martes 06/11/07.

1. Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es integrable según Lebesgue y sea
$$F(x) = \int_{(-\infty,x]} f(t)\, d\lambda(t).$$
Demuestre que F es uniformemente continua.

2. Carathéodory define la integral de Lebesgue de una función real, medible, no-negativa sobre un conjunto E como la medida de Lebesgue del conjunto
$$\int_E f(x)dx = \lambda(\{(x,y) : x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\}).$$
Demuestre que esta definición es equivalente a la que dimos en clase.

3. (Lema de Pratt) Demuestre la siguiente variante del teorema de convergencia dominada y el lema de Fatou: Sea $X_n,\ Y_n,\ X,\ Y$ v.a. sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tales que
a) $0 \leq X_n \leq Y_n$, b) $X_n \to X$, $Y_n \to Y$, c) $\mathrm{E}[Y_n] \to \mathrm{E}[Y]$, $\mathrm{E}[Y] < \infty$.
Entonces $\mathrm{E}[X_n] \to \mathrm{E}[X]$. Demuestre el Teorema de Convergencia Dominada como consecuencia de este resultado

4. (Teorema de Beppo Levi) Suponga que $X_n \in L^1$ para $n \geq 1$ son v.a. tales que
$$\sup_{n \geq 1} \mathrm{E}[X_n] < \infty.$$
Demuestre que si $X_n \uparrow X$ entonces $X \in L^1$ y $E[X_n] \to \mathrm{E}[X]$.

5. Sea $(f_n, n \geq 1)$ la sucesión de funciones definidas en $\mathbb{R}$ por
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{para } 0 \leq x \leq 1/n, \\ -n^2(x - \frac{2}{n}) & \text{para } 1/n \leq x \leq 2/n, \\ 0 & \text{para } x \geq 2/n. \end{cases}$$
Calcule $\liminf \int f_n d\lambda$, $\int \liminf f_n d\lambda$, $\limsup \int f_n d\lambda$, $\int \limsup f_n d\lambda$ y compare estos cuatro números. Comente.

6. Repita el ejercicio anterior para la sucesión $f_n = \mathbf{1}_{[0,1/4]}$ para n par y $f_n = \mathbf{1}_{[1/4,1]}$ para n impar.

7. Sea f una función integrable en $\mathbb{R}$. Demuestre que $\lambda\{x : |f(x)| > \alpha\} = o(\frac{1}{\alpha})$ cuando $\alpha \to \infty$.

8. Demuestre que si f es medible y finita c.s. en $\mathbb{R}$ entonces es integrable sí y sólo sí
$$\sum_{-\infty}^{\infty} 2^n \lambda(2^{n-1} < |f| \leq 2^n) < \infty.$$

9. Sea F una f.d., demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} (F(x+c) - F(x))dx = c$.

10. Demuestre que $f(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ es integrable según Riemann pero no según Lebesgue en $(-\infty, \infty)$.

11. *a*) Si F es una f.d. continua, demuestre que $\int_{\mathbb{R}} F(x)dF(x) = 1/2$. En consecuencia, muestre que si X, Y son v.a.i.i.d. con distribución F, entonces $P(X \leq Y) = 1/2$, y $\mathrm{E}[F(X)] = 1/2$.
    b) Si F no es continua, $\mathrm{E}[F(X)] = 1/2 + (1/2)\sum_a P(X = a)$, donde la suma es sobre los átomos de F.
    c) Si X, Y son v.a. con f.d. $F(x)$, $G(x)$ que no tienen discontinuidades comunes, entonces $\mathrm{E}[F(Y)] + \mathrm{E}[G(X)] = 1$.
    d) Aún si F y G tienen saltos comunes, si las variables son independientes, $\mathrm{E}(F(Y)) + \mathrm{E}(G(X)) = 1 + P(X = Y)$.

12. (a) Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, cada punto con probabilidad 1/4. Sea $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{1, 3\}$, $A_3 = \{1, 4\}$. Demuestre que estos eventos son independientes a pares pero no son independientes.

    (b) Sea $\{A_i, 1 \leq i \leq 5\}$ una partición medible de Ω tal que $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 15/64$, $P(A_4) = 1/64$, $P(A_5) = 18/64$. Definimos $B = A_1 \cup A_4$, $C = A_2 \cup A_4$, $D = A_3 \cup A_4$, $D = A_3 \cup A_4$. Verifique que

$$P(B \cap C \cap D) = P(B)P(C)P(D)$$

    pero B, C y D no son independientes.

    (c) Sea X_1 y X_2 v.a.i. que toman los valores $+1$ y -1 con probabilidad 1/2. ¿Son X_1, X_2 y X_1X_2 independientes dos a dos? ¿Son variables independientes?

13. Sea A, B y C tres eventos independientes. Demuestre que $A \cup B$ y $A \setminus B$ son independientes de C.

14. Dé un ejemplo sencillo que muestre que dos variables pueden ser independientes respecto a una medida de probabilidad pero dependientes respecto a otra.

15. Sea A, B y C tres eventos independientes. Demuestre que $A \cup B$ y $A \setminus B$ son independientes de C.

16. Sea $(X_k)_{k \geq 1}$ v.a.i.i.d. con función de distribución común F. Sea π una permutación de $1, \dots, n$. Demuestre que $(X_1, \dots, X_n)$ y $(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(n)})$ tienen la misma distribución conjunta.

17. Si X, Y son variables independientes y f, g son funciones medibles reales ¿Por qué son independientes $f(X)$ y $g(Y)$? (No hace falta calcular nada).

18. Sean X, Y v.a.i. con valores en $\mathbb{N}$ con $P(X = i) = P(Y = i) = 2^{-i}$, $i \geq 1$. Calcule las siguientes probabilidades.

    (a) $P(\text{mín}(X, Y) \leq i)$. (b) $P(X = Y)$. (c) $P(Y > X)$. (d) $P(X \text{ divida a } Y)$. (e) $P(X \geq kY)$ para un entero positivo k dado.

19. ¿Cuál es el menor número de puntos que debe tener un espacio muestral para que existan n eventos independientes $B_1, \dots, B_n$, ninguno de los cuales tiene probabilidad 0 ó 1?

20. Considere el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$ donde λ es la medida de Lebesgue. Definimos $X(\omega) = \omega$.

    (a) ¿Existe una variable aleatoria acotada que sea independiente de X y no sea constante c. p. 1?

    (b) Defina $Y = X(1 - X)$. Construya una variable aleatoria Z que no sea constante casi seguramente y tal que Y y Z sean independientes.