Medida
Problemas VIII

Los problemas 5, 7, 13, 17, y 18 son para entregar el martes 30/10/07.

1. Sea X una v.a. no-negativa con media μ y varianza σ^2, ambas finitas. Demuestre que para cualquier $b > 0$, $P(X > \mu+b\sigma) \leq 1/(1+b^2)$. (Ayuda: considere la función $g(x) = \frac{[(x-\mu)b+\sigma]^2}{\sigma^2(1+b^2)^2}$ y demuestre que $\mathrm{E}[((X-\mu)b+\sigma)^2 = \sigma^2(b^2+1)$.)

2. Sea X una v.a. no-negativa con media μ y varianza σ^2, ambas finitas. Demuestre que $P(\mu - b\sigma < X < \mu + b\sigma) \geq 1 - \frac{1}{b^2}$

3. Sea $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Demuestre que $P(X > x) \leq \frac{1}{x}\varphi(x)$, donde $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-x^2/2\}$ es la densidad gaussiana típica.

4. Sea X una v.a. con distribución lognormal de parámetros (μ, σ^2). Demuestre que $\mathrm{E}[X^r] = e^{r\mu+\sigma^2 r^2/2}$ y deduzca que $\mathrm{E}[X] = e^{\mu+\sigma^2/2}$ y $\mathrm{Var}(X) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$.

5. Considere el espacio $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, donde λ es la medida de Lebesgue y defina $X_n = \frac{n}{\log n}\mathbf{1}_{(0,1/n)}$. Demuestre que $X_n \to 0$ y $\mathrm{E}[X_n] \to 0$ aún cuando la condición de dominación del Teorema de Convergencia Dominada no se cumple.

6. Suponga que X_n, X están acotadas uniformemente, es decir, existe una constante K tal que $|X_n| \leq K$, $|X| \leq K$. Si $X_n \to X$ cuando $n \to \infty$ demuestre usando convergencia dominada que $\mathrm{E}\,|X_n - X| \to 0$.

7. Suponga que $X \in L^1$ y A y A_n son eventos.

   a) Muestre que $\int_{\{|X|>n\}} X dP \to 0$.

   b) Muestre que si $P(A_n) \to 0$, entonces $\int_{A_n} X dP \to 0$.
   (Ayuda: Descomponga, para M grande, $\int_{A_n} |X| dP = \int_{A_n \cap \{|X| \leq M\}} |X| dP + \int_{A_n \cap \{|X|>M\}} |X| dP$).

   c) Demuestre que $\int_A |X| dP = 0$ sii $P(A \cap \{|X| > 0\}) = 0$.

   d) Si $X \in L^2$, muestre que $\mathrm{Var}(X) = 0$ implica que $P(X = \mathrm{E}[X]) = 1$ de modo que X es igual a una constante con probabilidad 1.

   e) Suponga que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad y $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2$. Definimos la distancia entre conjuntos $d : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ por $d(A_1, A_2) = P(A_1 \triangle A_2)$. Verifique el siguiente resultado: Si A_n, $A \in \mathcal{F}$ y $d(A_n, A) \to 0$ entonces
   $$\int_{A_n} X dP \to \int_A X dP$$
   de modo que la función $A \mapsto \int_A X dP$ es continua.

8. Sean F y G f.d. sin puntos comunes de discontinuidad en el intervalo $(a, b]$. Demuestre que
   $$\int_{(a,b]} G(x) dF(x) = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{(a,b]} F(x) dG(x).$$

9. **El Teorema de Egorof.** Sean X_n, X v.a. reales definidas en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Suponga que para todo $\omega \in \Lambda \in \mathcal{F}$ tenemos $X_n(\omega) \to X(\omega)$. Demuestre que para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto Λ_ε tal que $P(\Lambda_\varepsilon) < \varepsilon$ y
   $$\sup_{\omega \in \Lambda \setminus \Lambda_\varepsilon} |X_n(\omega) - X(\omega)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$
   Por lo tanto la convergencia es uniforme fuera de conjuntos pequeños.

   Ayuda: (a) Defina
   $$B_n^{(k)} = \big[\sup_{i \geq n} |X_i(\omega) - X(\omega)|\big] \cap \Lambda.$$
   (b) Demuestre que $B_n^{(k)} \downarrow \varnothing$ cuando $n \to \infty$.

   (c) Existe $\{n_k\}$ tal que $P(B_{n_k}^{(k)}) < \varepsilon/2^k$.

   (d) Ponemos $B = \cup_k B_{n_k}^{(k)}$ de modo que $P(B) < \varepsilon$.

10. Sea $\{X_n,\ n \geq 1\}$ una sucesión de variables con $P(X_n = 1) = p_n = 1 - P(X_n = 0)$. Demuestre que $\sum_n p_n < \infty$ implica $\sum_n \mathrm{E}(X_n) < \infty$ y por lo tanto $P(X_n \to 0) = 1$.

11. Demostramos que cualquier función integrable f puede aproximarse por una función escalera g en el siguiente sentido:
$$\int |f(x) - g(x)|\, d\mu(x) < \varepsilon$$
Demuestre que en general no es posible hacer que $g \leq f$.

12. Demuestre que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ es integrable, entonces
$$\int |f(x+h) - f(x)|\, d\mu(x) \to 0 \quad \text{cuando } h \to 0.$$
Ayuda: Aproxime f por una función que sea uniformemente continua y que se anule fuera de un intervalo acotado.

13. Si $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$ demuestre que f_n es integrable sobre $[0, +\infty)$ pero que
$$\int_0^\infty \Big(\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\Big) dx \neq \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty f_n(x) dx$$

14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ integrable según Lebesgue y defina
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\, dt$$
Demuestre que F es uniformemente continua.

15. Demuestre que si (f_n) es una sucesión de funciones integrables $\Omega \to \mathbb{R}^*$ tales que $\sum \int_E |f_n(x)|\, dx < \infty$, entonces $f_n(x) \to 0$ para casi todo $x \in \Omega$.

16. Demuestre que si $|f_n(x)| \leq 1/n^2$ para todo entero n y $x \in E$, cada f_n es medible y g es integrable sobre E, entonces
$$\int_E \sum_{n=1}^\infty f_n(x) g(x)\, dx = \sum_{n=1}^\infty \int_E f_n(x) g(x)\, dx.$$

17. Sea (x_i) una sucesión de puntos en $\mathbb{R}$ y $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^\infty p_i < \infty$. Definimos $F(x)$ por
$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$
y μ_F denota la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a F. Demuestre que todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ son medibles y que f es integrable si y sólo si $\sum_{i=1}^\infty p_i f(x_i)$ converge absolutamente.

18. Demuestre que la función $f(x) = 1/x^2, x \geq 1$ es integrable respecto a la medida de Lebesgue, pero no respecto a la medida de Lebesgue-Stieltjes generada por $F(x) = x^3$.

19. Demuestre que la función $f(x) = x^2$ es integrable respecto de la medida de Lebesgue-Stieltjes generada por
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{(x+1)^4} & x > 0. \end{cases}$$

20. Demuestre que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $t \in (a, b)$,
$$\lim_{y \to t} \frac{1}{y - t}\Big[\int_a^y f(x)\, dx - \int_a^t f(x)\, dx\Big] = f(t).$$
Por lo tanto la integral indefinida de Lebesgue puede ser diferenciada en los puntos en los cuales el integrando es continuo.