Medida
Problemas IV
Los problemas 1, 5, 8, 10 y 12 son para entregar el martes 25/09/07.

1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Demuestre que la clase de todos los conjuntos $A \in \mathcal{F}$ con $\mu(A) < \infty$ es un anillo.

2. Sea μ una medida en una σ-álgebra $\mathcal{F}$ y $\overline{\mu}$ en $\overline{\mathcal{F}}$ es su completación. Demuestre que si $A, B \in \mathcal{F}$ con $A \subset E \subset B$, $\mu(B - A) = 0$ entonces $E \in \overline{\mathcal{F}}$ y $\overline{\mu}(E) = \mu(A) = \mu(B)$. ¿Qué ocurre si $\mu(A) = \infty$?

3. Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra generada por el álgebra $\mathcal{A}$ y sean $\mu,\ \nu$ dos medidas σ-finitas en $\mathcal{A}$. Demuestre que si tanto $\mu(E)$ como $\nu(E)$ son finitas, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $E_0 \in \mathcal{A}$ tal que
$$\mu(E \triangle E_0) < \varepsilon, \qquad \nu(E \triangle E_0) < \varepsilon.$$

4. Un acolección de conjuntos $\mathcal{D}$ es un σ-anillo si es un anillo y cualquier unión numerable de conjuntos en $\mathcal{D}$ está en $\mathcal{D}$. Demuestre que si $\mathcal{D}$ es un σ-anillo de subconjuntos de Ω, entonces $\mathcal{D} \cup \{\Omega - A : A \in \mathcal{D}\}$ es una σ-álgebra. Si $\Omega \notin \mathcal{D}$, de modo que $\mathcal{D}$ no es una σ-álgebra, y μ es una función positiva y σ-aditiva en $\mathcal{D}$, demuestre que si hacemos $\mu(\Omega - A) = \infty$ para todo conjunto $A \in \mathcal{D}$ hace que μ sea una medida.

5. Si μ es una medida finita demuestre que no puede haber una cantidad no-numerable de conjuntos disjuntos A tales que $\mu(A) > 0$.

6. Demuestre que el conjunto de puntos en $[0, 1]$ cuyo desarrollo binario tiene cero en todos los lugares pares es un conjunto medible de medida 0. ¿Es este conjunto de Borel?

7. Demuestre que cualquier conjunto acotado en $\mathbb{R}^k$ tiene medida exterior de Lebesgue finita. ¿Es el recíproco cierto?

8. Sean $A_n,\ n \geq 1$ conjuntos de Borel en el espacio de Lebesgue $([0, 1], \mathcal{F}, \lambda)$. Demuestre que si existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda(A_n) > \varepsilon$ para todo n, entonces existe al menos un punto que pertenece a infinitos conjuntos A_n.

9. Sea $\mathcal{C}$ una clase de subconjuntos de Ω y suponga que $B \subset \Omega$ satisface $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Demuestre que existe una colección numerable $\mathcal{C}_B \subset \mathcal{C}$ tal que $B \in \sigma(\mathcal{C}_B)$. (Ayuda: Defina $\mathcal{G} = \{B \subset \Omega : \exists \mathcal{C}_B \subset \mathcal{C}$ numerable tal que $B \in \sigma(\mathcal{C}_B)\}$. Demuestre que $\mathcal{G}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$.

10. Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y sea $Q : \mathcal{F} \to [0, 1]$ una función que es aditiva en $\mathcal{F}$, $0 \leq Q(A) \leq 1$ para cualquier $A \in \mathcal{F}$ y $Q(\Omega) = 1$ y satisface que si $A_i \in \mathcal{F}$ son disjuntos y $\cup_{i\geq 1} A_i = \Omega$ entonces $\sum_{i\geq 1} Q(A_i) = 1$. Demuestre que Q es una medida de probabilidad, es decir, demuestre que Q es σ-aditiva.

11. Sea A, B, C eventos disjuntos en un espacio de probabilidad con $P(A) = 0{,}6,\ P(B) = 0{,}3,\ P(C) = 0{,}1$. Calcule las probabilidades de todos los eventos de $\sigma(A, B, C)$.

12.