Medida
Problemas III
Los problemas 1, 5, 8, 10 y 12 son para entregar el martes 18/09/07.

1. Demostramos que $P_1 = P_2$ sobre $\mathcal{B}$ si la igualdad se cumple sobre una clase $\mathcal{C}$ que genere a $\mathcal{B}$ y sea un sistema π. Demuestre que esta última propiedad no puede omitirse. Por ejemplo, considere $\Omega = \{a, b, c, d\}$ con
$$P_1(\{a\}) = P_1(\{d\}) = P_2(\{b\}) = P_2(\{c\}) = \frac{1}{6}; \qquad P_1(\{b\}) = P_1(\{c\}) = P_2(\{a\}) = P_2(\{d\}) = \frac{1}{3}$$
y $\mathcal{C} = \{\{a, b\}, \{d, c\}, \{a, c\}, \{b, d\}\}$.

2. Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son dos semiálgebras de eventos de Ω, demuestre que la clase $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{A_1 \cap A_2 : A_i \in \mathcal{S}_i, i = 1, 2\}$ es también una semiálgebra de subconjuntos de Ω. Además, el álgebra (resp. σ-álgebra) generada por $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ es idéntica con la generada por $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$.

3. Sea P una medida de probabilidad sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Demuestre que para cualquier $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y cualquier $\varepsilon > 0$ existe una unión de intervalos A tal que $P(A\triangle B) < \varepsilon$. (Ayuda: defina $\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \forall\varepsilon > 0$, existe una unión finita de intervalos A tal que $P(A\triangle B) < \varepsilon\}$).

4. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de Ω y sea μ una función sobre $\mathcal{A}$ que es finitamente aditiva con $\mu(\Omega) = 1$. Si $A_n \in \mathcal{A}$ y $A_n \downarrow \emptyset$, ¿es cierto que $\mu(A_n) \downarrow 0$?

5. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ una espacio de medida σ-finita con $\mu(\Omega) = \infty$. Demuestre que para cualquier $M < \infty$ existe algún $A \in \mathcal{F}$ con $M < \mu(A) < \infty$.

6. Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y sea $\mu_1, \dots, \mu_n$ medidas en $\mathcal{F}$. Sea $c_1, \dots, c_n$ constantes positivas. Demuestre que $c_1\mu_1 + \cdots + c_n\mu_n$ es una medida en $\mathcal{F}$.

7. Para cualquier $x \in \Omega$ y cualquier $A \subset \Omega$ definimos $\delta_x(A) = \mathbf{1}_A(x)$. Demuestre que δ_x es una medida en $\mathcal{P}(\Omega)$.

8. Sea $\mathcal{A}$ el álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ generada por los conjuntos de la forma $A_{a,b} = [-b, -a) \cup (a, b]$ para $0 < a < b$. Sea $m(A_{a,b}) = b - a$ Demuestre que m puede ser extendida a una a medida en una σ-álgebra. ¿Es medible $[1, 2]$ respecto a m^*?

Definición 1 *Una función* $\tau : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ *es una medida exterior si (i)* $\tau(\emptyset) = 0$, *(ii)* τ *es monótona:* $A \subset B \Rightarrow \tau(A) \le \tau(B)$ *y (iii)* τ *es* σ*-subaditiva:* $A \subset \cup_{i\ge1} A_i \Rightarrow \tau(A) \le \sum_{i\ge1} \tau(A_i)$.

11 Decimos que una medida exterior μ^* es regular si para todo $A \subset \Omega$ existe un cubrimiento medible $E \supset A$ tal que $\mu^*(A) = \mu^*(E)$. Demuestre que si μ^* es una medida exterior regular en Ω y $\mu^*(\Omega) < \infty$ entonces una condición necesaria y suficiente para que E sea μ^*-medible es que $\mu^*(\Omega) = \mu^*(E) + \mu^*(E^c)$.

12 En cada uno de los siguientes casos demuestre que μ^* es una medida exterior y determine la clase de los conjuntos medibles.

a) $\mu^*(\emptyset) = 0, \mu(A) = 1$ para todo $A \neq \emptyset$.

b) $\mu^*(\emptyset) = 0, \mu(A) = 1$ para todo $A \neq \emptyset, A \neq \Omega$, $\mu^*(\Omega) = 2$.

c) Ω no es numerable, $\mu^*(A) = 0$ si A es numerable, $\mu^*(A) = 1$ si A no es numerable.

13 Demuestre que si una medida exterior es aditiva entonces es σ-aditiva.

14 Sea μ una medida discreta sobre Ω. Demuestre que la operación de extenderla a una medida exterior y luego restringir esta extensión a la clase de los conjuntos medibles como se hace en el teorema de extensión, no da nada nuevo.

15 Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, sean A_j, B_j subconjuntos de Ω tales que $\mu^*(A_j\triangle B_j) = 0$ para $j \ge 1$ Demuestre que $\mu^*(\cup_j A_j) = \mu^*(\cup_j B_j)$.

16 **Completación.** Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Decimos que un conjunto N es nulo sii $N \in \mathcal{F}$ y $P(N) = 0$. Decimos que un conjunto B es exiguo si existe un conjunto nulo N tal que $B \subset N$. Observamos que no se pide que B sea medible. Sea $\mathcal{N}$ la clase de los conjuntos exiguos. Decimos que $\mathcal{F}$ es completa (respecto a P) si todo conjunto exiguo es nulo. Si $\mathcal{F}$ no es completa definimos $\mathcal{F}^* = \{A \cup M : A \in \mathcal{F},\ M \in \mathcal{N}\}$

a) Demuestre que $\mathcal{F}^*$ es una σ-álgebra.

b) Si $A_i \in \mathcal{F}$ y $M_i \in \mathcal{N}$ para $i = 1, 2$ y $A_1 \cup M_1 = A_2 \cup M_2$, entonces $P(A_1) = P(A_2)$.

c) Definimos $P^* : \mathcal{F}^* \to [0, 1]$ por $P^*(A \cup M) = P(A)$, para $A \in \mathcal{F}$, $M \in \mathcal{N}$. Demuestre que P^* es una extensión de P a $\mathcal{F}^*$.

d) Si $B \subset \Omega$, $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2$, $A_1 \subset B \subset A_2$ y $P(A_2 \setminus A_1) = 0$, demuestre que $B \in \mathcal{F}^*$.

e) Demuestre que $\mathcal{F}^*$ es completa.

f) Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Sea $p_k \geq 0$, $\sum_k p_k = 1$. Sea (a_k) una sucesión en $\mathbb{R}$. Definimos P por $P(\{a_k\}) = p_k$, $P(A) = \sum_{a_k \in A} p_k$, $A \in \mathcal{B}$. ¿Cuál es la completación de $\mathcal{B}$?

17 **Medidas Regulares.** Considere el espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$. Un conjunto de Borel A es regular si

$$P(A) = \text{ínf}\{P(G) : A \subset G, G \text{ abierto }\} \quad \text{y} \quad P(A) = \sup\{P(F) : F \subset A, F \text{ cerrado }\}$$

P es regular si todos los conjuntos de Borel son regulares. Sea $\mathcal{R}$ la colección de los conjuntos regulares.

a) Demuestre que $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son regulares.

b) Demuestre que $\mathcal{R}$ es cerrada bajo complementos y uniones numerables.

c) Demuestre que los subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ son regulares.

d) Demuestre que P es regular.

e) Demuestre que para cualquier boreliano A, $P(A) = \sup\{P(K) : K \subset A, K \text{ compacto }\}$

18 Decimos que dos conjuntos A y $B \in \mathcal{B}$ son equivalentes si $P(A \triangle B) = 0$. Para un conjunto A definimos la clase de equivalencia $A^{\#} = \{B \in \mathcal{B} : P(A \triangle B) = 0\}$. Esto descompone a $\mathcal{B}$ en clases de equivalencia. Para cada clase definimos $P^{\#}(A^{\#}) = P(A)$, para todo $A \in A^{\#}$. En la práctica identificamos las clases de equivalencia con los miembros y no escribimos los $\#$.

Un *átomo* en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ se define como (la clase de equivalencia de) un conjunto $A \in \mathcal{B}$ tal que $P(A) > 0$, y si $B \subset A$, $B \in \mathcal{B}$, entonces $P(B) = 0$ ó $P(A \backslash B) = 0$. El espacio de probabilidad es *no-atómico* si no tiene átomos, es decir, si $A \in \mathcal{B}$ y $P(A) > 0$ implican que existe $B \subset A$ tal que $0 < P(B) < P(A)$.

a) Si $\Omega = \mathbb{R}$ y P está determinada por una función de distribución $F(x)$, demuestre que los átomos son $\{x : F(x) - F(x-) > 0\}$.

b) Si $(\Omega, \mathcal{B}, P) = ((0, 1], \mathcal{B}((0, 1]), \lambda)$ donde λ es la medida de Lebesgue, demuestre que el espacio de probabilidad es no-atómico.

c) Demuestre que dos átomos distintos tienen intersección vacía. (Dos conjuntos son distintos si $P(A \triangle B) = 0$. Hay que probar que $P((A \cap B) \triangle \emptyset) = 0$).

d) Un espacio de probabilidad contiene a lo sumo una cantidad numerable de átomos.

e) Si un espacio de probabilidad no contiene átomos, entonces para cada $a \in (0, 1]$ existe al menos un conjunto $A \in \mathcal{B}$ para el cual $P(A) = a$.

f) Sobre el conjunto de clases de equivalencia definimos $d(A^{\#}, B^{\#}) = P(A \triangle B)$, donde $A \in A^{\#}$, $B \in B^{\#}$. Demuestre que d es una métrica sobre el conjunto de clases de equivalencia. verifique que

$$|P(A) - P(B)| \leq P(A \triangle B)$$

de modo que $P^{\#}$ es uniformemente continua en el conjunto de clases de equivalencia. Demuestre que P es σ-aditiva si y sólo si para cualquier sucesión de conjuntos $A_n \in \mathcal{B}$ tal que $A_n \downarrow \emptyset$ se tiene que $d(A_n^{\#}, \emptyset^{\#}) \to 0$.