Medida
Problemas II

Los problemas 6, 8, 9, 10 y 13 son para entregar el martes 11/09/07.

Definición 1 *Un* anillo $\mathcal{E}$ *de subconjuntos de* Ω *es una colección de subconjuntos que satisface* $\emptyset \in \mathcal{E}$ *y si* $A, B \in \mathcal{E}$ *entonces* $A \cup B \in \mathcal{E}$ *y* $\mathcal{B} - A \in \mathcal{E}$. *La diferencia entre un anillo y un álgebra es que un álgebra debe contener a* Ω.

Un σ-anillo *es un anillo que es cerrado bajo uniones numerables*

1. Si $\Omega = [0, 1)$ y $\mathcal{C}$ consiste de los 6 conjuntos
$$\emptyset, \qquad \Omega, \qquad [0, \frac{1}{2}), \qquad [0, \frac{1}{4}, \qquad [0, \frac{3}{4}), \qquad [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}),$$
y μ definida sobre $\mathcal{C}$ toma los siguientes valores
$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu[0, \frac{1}{4}) = 2, \quad \mu[0, \frac{1}{2}) = 2, \quad \mu[0, \frac{3}{4}) = 4, \quad \mu[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = 2, \quad \mu(\Omega) = 4$$
Demuestre que μ es aditiva en $\mathcal{C}$. ¿Es posible extender μ a una función aditiva en el álgebra generada por $\mathcal{C}$?

2. Una función de conjuntos $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}$ es *monótona* si $\mu(\emptyset) = 0$ y $E \subset F,\ E, F \in \mathcal{C} \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$. Demuestre que las funciones monótonas son no-negativas, y si $\mathcal{C}$ es un álgebra, demuestre que una función aditiva y no-negativa es monótona.

3. Sea $\Omega = \mathbb{N}$ y sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente de términos positivos. Si E es un subconjunto finito de Ω, definimos $\tau(E) = \sum_{n \in E} a_n$. Si E es un subconjunto infinito de Ω, $\tau(E) = \infty$. Demuestre que τ es aditiva pero no σ-aditiva en la clase de todos los subconjuntos de Ω.

4. Sea Ω un conjunto numerablemente infinito y sea $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Definimos $\mu(A) = 0$ si A es finito, $\mu(A) = \infty$ si A es infinito. Demuestre que μ es finitamente aditiva pero no σ-aditiva. Demuestre también que Ω es el límite de una sucesión creciente de conjuntos A_n con $\mu(A_n) = 0$ para todo n pero $\mu(\Omega) = \infty$.

5. Sea μ la medida de contar en Ω donde Ω es un conjunto infinito. Demuestre que existe una sucesión de conjuntos $A_n \downarrow \emptyset$ con $\lim_n \mu(A_n) \neq 0$.

6. Sea $\{A_j,\ 1 \leq j \leq n\}$ una colección de conjuntos y defina $B_k = \cup_{j=1}^{k} A_j$, para $k = 1, 2, \ldots, n$. Demuestre que $\sigma(\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}) = \sigma(\{A_1, A_2, \ldots, A_n\})$.

7. Sea $\mathcal{E}$ un σ-anillo de subconjuntos de Ω y sea μ una medida sobre $\mathcal{E}$. Demuestre que la clase de conjuntos $E \in \mathcal{E}$ con $\mu(E) < \infty$ es un anillo, y la clase con $\mu(E)$ σ-finita forma un σ-anillo.

8. Sea μ una medida σ-finita sobre la σ-álgebra $\mathcal{F}$ y sea $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ una clase de subconjuntos disjuntos de Ω. Demuestre que la clase de los conjuntos $D \in \mathcal{D}$ con $\mu(D) > 0$ es numerable.

9. Demuestre que las dos definiciones de sistema λ que dimos en clase son equivalentes.

10. Sea $f : \Omega \to (E, \mathcal{E})$ con $\mathcal{E}$ una σ-álgebra. Sea $\mathcal{A} = \{A \subset \Omega :$ existe $B \in \mathcal{E}$ con $A = f^{-1}(B)\}$. Demuestre que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra en Ω. Escribimos $\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{E})$.

11. Demuestre el principio de inclusión-exclusión: Para $A_1, \ldots, A_n$ en $\mathcal{F}$ demuestre que
$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

12. (Desigualdades de Bonferroni) Sea $A_i \in \mathcal{F}$ una sucesión de eventos. Demuestre
a) $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j)$
b) $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$

13. Suponga que $\{B_n, n \geq 1\}$ son eventos con $P(B_n) = 1\ \forall n$. Demuestre que $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = 1$.

14. Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos disjuntos 2 a 2 y P una probabilidad. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

15. Sea $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espacio de probabilidad. Demuestre la siguiente generalización de la subaditividad para eventos $B_i \subset A_i$:
$$P(\cup_i A_i) - P(\cup_i B_i) \leq \sum_i (P(A_i) - P(B_i)).$$

16. Decimos que los eventos $A_i, i \geq 1$ son casi disjuntos si $P(A_i \cap A_j) = 0,\ i \neq j$. Demuestre que para estos eventos
$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_j) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_j).$$

17. Sea Ω un conjunto no vacío y sea $\mathcal{F}_0$ la colección de los conjuntos tales que A o A^c es finito.

    a) Demuestre que $\mathcal{F}_0$ es un álgebra.

    Definimos la función P para $E \in \mathcal{F}_0$ por
$$P(E) = \begin{cases} 0, & \text{si } E \text{ es finito,} \\ 1, & \text{si } E^c \text{ es finito.} \end{cases}$$

    b) Si Ω es numerablemente infinito, demuestre que P es finitamente aditiva pero no σ-aditiva.

    c) Si Ω no es numerable demuestre que P es σ-aditiva sobre $\mathcal{F}_0$.

18. Sea $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ es finitamente aditiva en el álgebra $\mathcal{A}$ y $E, F \in \mathcal{A}$ son tales que $\mu(E \triangle F) = 0$, decimos que $E \sim F$. Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{A}$ y que
$$E \sim F \Rightarrow \mu(E) = \mu(F) = \mu(E \cup F) = \mu(E \cap F).$$

    ¿Es cierto que la clase de los conjuntos $E \in \mathcal{A}$ para los cuales $E \sim \emptyset$ es un anillo?

19. Con la notación del ejercicio anterior definimos $\rho(E, F) = \mu(E \triangle F)$. Demuestre que $\rho(E, F) \geq 0$, $\rho(E, F) = \rho(F, E)$, $\rho(E, F) \leq \rho(E, G) + \rho(G, F)$. Si $E_1 \sim E_2$ y $F_1 \sim F_2$ y todos estos conjuntos están en $\mathcal{A}$, demuestre que $\rho(E_1, F_1) = \rho(E_2, F_2)$. ¿Es ρ una métrica en $\mathcal{A}$?

20. Sea μ una función aditiva y no-negativa definida en el álgebra $\mathcal{A}$. Si $A_1, A_2, \ldots$ son conjuntos disjuntos en $\mathcal{A}$ y $\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$, demuestre que
$$\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) \geq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$