Medida
Problemas XII

1. Demuestre que $f(\omega_1, \omega_2) = e^{-\omega_1\omega_2} - 2e^{-2\omega_1\omega_2}$ es integrable según Lebesgue (i) sobre $\Omega_1 = [1, \infty)$ para cada ω_2 y (ii) sobre $\Omega_2 = (0, 1]$ para cada ω_2, pero el teorema de Fubini no es válido. ¿Por qué?

2. Suponga que X, Y son dos v.a. tales que (X, Y) y $(-X, Y)$ tienen la misma distribución conjunta. Demuestre que X e Y no están correlacionadas.

3. Un par de variables aleatorias X_1, X_2 tienen distribución bivariada de Poisson si

$$P(X_1 = j, X_2 = k) = e^{-(a_1+a_2+a_{12})} \sum_{i=0}^{\min(j,k)} \frac{a_{12}^i a_1^{j-i} a_2^{k-i}}{i!(j-i)!(k-i)!}$$

para cualquier par de enteros no negativos (j, k), donde a_1, a_2, a_{12} son parámetros no negativos. Defina un espacio de probabilidad y variables aletorias X_1 y X_2 cuya distribución conjunta sea de Poisson bivariada y demuestre que X_i es una v.a. de Poisson con media $a_i + a_{12}$. Demuestre que la correlación $\rho(X_1, X_2) \geq 0$ y que X_1 y X_2 son independientes sii $a_{12} = 0$.

4. Sean $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{N}$ con μ la medida 'que cuenta': $\mu(A) = \sharp(A)$ y sea

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 - 2^{-x} & \text{si } x = y, \\ -2 + 2^{-x} & \text{si } x = y + 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

entonces las integrales iteradas existen pero no son iguales. ¿Por qué no contradice esto el teorema de Fubini?

5. Demuestre que $xy/(x^2 + y^2)^2$ no es integrable sobre el cuadrado $\{(x, y) : |x|, |y| \leq 1\}$, aun cuando las integrales iteradas existen y son iguales.

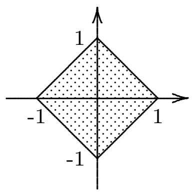
6. Muestre que la siguiente función es la función de distribución de algún vector aleatorio (X, Y):

$$F(x,y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}), & \text{si } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

Halle la densidad conjunta y las distribuciones y densidades marginales de X e Y. ¿Son independientes?

7. Seleccionamos al azar (es decir, con distribución uniforme) un punto en la siguiente región

Sean X e Y las coordenadas del punto.
(a) ¿Cuál es la densidad conjunta de X e Y?
(b) Obtenga la densidad marginal de X.
(c) ¿Son X e Y independientes?



8. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con densidad común de Rayleigh con parámetro $\theta > 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2} \exp(-\frac{x^2}{2\theta^2}), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

(a) Determine la densidad conjunta de $Y_1, \ldots, Y_n$, donde $Y_i = X_i^2$.
(b) ¿Cuál es la distribución de $U = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$?
(c) Halle la distribución de $Z = X_1/X_2$.

9. Sea X e Y variables aleatorias independientes con distribución común $\mathcal{N}(0, 1)$. Demuestre que $U = (X+Y)/\sqrt{2}$ y $U = (X - Y)/\sqrt{2}$ también son independientes $\mathcal{N}(0, 1)$.

10. La duración de un cierto tipo de llamada telefónica satisface la relación $P(T > t) = ae^{-\lambda t} + (1 - a)e^{-\xi t},\ t \geq 0$ donde $0 \leq a \leq 1$, $\lambda > 0$, $\xi > 0$. Halle la media y varianza de T.

11. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución común $U[0,1]$, y sean $\theta = \pi(2Y-1)$ y $R = \sqrt{2\log(1/(1-X))}$. (a) Demuestre que $\theta \sim U[-\pi,\pi]$ y que R tiene distribución de Rayleigh de parámetro 1. (b) Demuestre que Z y W, definidas por $Z = R\cos\theta$ y $W = R\sin\theta$ son independientes con distribución común $\mathcal{N}(0,1)$. Esta es la base del algoritmo de Box y Muller para generar variables gaussianas.

12. Decimos que la distribución de una variable X es simétrica (respecto a cero) si $P(X \geq x) = P(X \leq -x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y que es simétrica respecto a μ si $P(X \geq \mu + x) = P(X \leq \mu - x)$

    (a) Demuestre que si la distribución de X es simétrica respecto de μ y X es integrable entonces $E(X) = \mu$.

    (b) Suponga que X tiene densidad $f(x)$. Muestre que si $f(\mu+x) = f(\mu-x)$ para todo x entonces la distribución de X es simétrica respecto a μ. Enuncie y demuestre la propiedad análoga para X discreta.

    (c) ¿Cuál es el punto de simetría de las distribuciones de las siguientes variables aleatorias? Si la variable es integrable, diga cual es su esperanza.

    (i) $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ (ii) $X \sim Cauchy(M,b), i.e., f(x) = \frac{b}{\pi[b^2+(x-M)^2]}, x \in \mathbb{R}$

    (iii) $X \sim \mathcal{U}(a,b)$. (iv) $X \sim bin(n, \frac{1}{2})$.

13. Sea X e Y dos v.a. independientes con distribución común $\mathcal{U}[0,1]$. Sean $Z = \text{máx}(X,Y), W = \min(X,Y)$.

    (a) Calcule $E(Z), E(W)$.

    (b) Determine los valores de t, $t \in \mathbb{R}$ tales que $E(X^t)$ sea finita. ¿Cuál es el valor de esta esperanza?

    (c) Calcule $Var(Z), Var(W)$.

    (d) Calcule el coeficiente de correlación entre Z y W.

14. Dos jugadores lanzan monedas simultáneamente hasta obtener la primera 'coincidencia' (es decir, dos 'águilas' o dos 'soles'). Si los dos lanzan 'águila' simultáneamente gana el jugador I; si ambos lanzan 'sol', gana el jugador II. Por ejemplo, si ambos lanzan 'sol' en el primer lanzamiento, el juego termina y gana el jugador II. Suponga que la moneda del jugador I sea simétrica, pero que la del otro puede no serlo, siendo p la probabilidad de 'águila', $0 < p < 1$. (a) Calcule la esperanza del número de lanzamientos. (b) Halle la probabilidad de que el jugador I gane el juego.

15. Si X toma valores en el intervalo $[a,b]$ pruebe que $a \leq E(X) \leq b$ y $Var(X) \leq (b-a)^2/4$. (Sugerencia: considere primero $a = 0, b = 1$). De un ejemplo de una variable que tenga la varianza máxima.

16. Dos componentes electrónicos van a ser probados simultáneamente. Suponga que la vida en horas de cada componente es exponencial con parámetro λ y que sus vidas son independientes. Calcule (a) La esperanza del tiempo hasta la primera falla de algún componente. (b) La esperanza del tiempo hasta que ambos componentes fallen.

17. Probar que para todo $r > 0$ y cualquier v.a.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n^{1/r}) \leq E(|X|^r) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(|X| \geq n^{1/r})$$

    y concluir que $E(|X|) < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n)$ (no vale ver Chung).

18. Muestre que si X tiene distribución normal típica entonces $E(|X|^{2n+1}) = 2^n n! \sqrt{2/\pi}$. ($X$ tiene distribución normal típica si su densidad es $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$).

19. Si X es integrable muestre que

$$E(X) = \int_0^{\infty} P(X > t)\, dt - \int_{-\infty}^{0} P(X < t)\, dt.$$

20. Sea $X_1, X_2, \ldots$ v.a.i.i.d. con segundo momento finito. Muestre que

    (i) $nP(|X_1| \geq \varepsilon\sqrt{n}) \to 0$.

    (ii) $(1 - P(|X_1| \geq \varepsilon\sqrt{n}))^n \to 1$

    (iii) $n^{-1/2} \text{máx}_{k \leq n} |X_k| \to 0$ en probabilidad.

21. Suponga que $\nu(y : (x,y) \in E) = \nu(y : (x,y) \in F)$ para todo x. Muestre que $\mu \times \nu(E) = \mu \times \nu(F)$.