Medida
Problemas I

Los problemas 4, 7, 10, 12 y 14 son para entregar el martes 04/09/07.

1. Demuestre que
$$(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c, \qquad (\liminf_{n\to\infty} A_n)^c = \limsup_{n\to\infty} A_n^c.$$

2. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra y $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de eventos en $\mathcal{A}$.

   a) Demuestre que
$$\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}; \quad \limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

   b) Sean A_n, B_n subconjuntos de Ω, demuestre que
$$\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_n$$

   c) Si $A_n \to A$ y $B_n \to B$, ¿es cierto que
$$A_n \cup B_n \to A \cup B, \qquad A_n \cap B_n \to A \cap B?$$

3. Sean B y C subconjuntos de Ω. Definimos
$$A_n = \begin{cases} B, & \text{si } n \text{ es par,} \\ C, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$
   ¿Quiénes son $\limsup A_n$ y $\liminf A_n$?

4. Definimos los siguientes conjuntos:
$$A_n = \begin{cases} (-1/n, 1] & \text{si } n \text{ es impar,} \\ (-1, 1/n] & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$$
   Halle $\limsup A_n$ y $\liminf A_n$.

5. Sea $\Omega = \mathbb{R}^2$, A_n el interior del círculo con centro en $((-1)^n/n, 0)$ y radio 1. Halle $\limsup A_n$ y $\liminf A_n$.

6. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales, y sea $A_n = (-\infty, x_n)$. ¿Cuál es la conexión entre $\limsup_{n\to\infty} x_n$ y $\limsup_{n\to\infty} A_n$. Lo mismo para $\liminf$.

7. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y sea $B \in \mathcal{A}$. Demuestre que $\mathcal{F} = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de B. ¿Es cierto este resultado si B es un subconjunto de Ω que no pertenece a $\mathcal{A}$?

8. Sean f_n, f funciones reales sobre Ω. Demuestre que
$$\{\omega : f_n(\omega) \nrightarrow f(\omega)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{\omega : |f_n(\omega - f(\omega)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

9. Demuestre que $A_n \to A$ sí y sólo sí $\mathbf{1}_{A_n} \to \mathbf{1}_A$.

10. Sea $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea $\mathcal{C} = \{\{b, d\}, \{f\}\}$. ¿Cuál es el álgebra generada por $\mathcal{C}$ y cuál la σ-álgebra?

11. a) Suponga que $\mathcal{A}_n$ son álgebras que satisfacen $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$. Demuestre que su unión también es un álgebra.

    b) Sin embargo, la unión de una colección numerable de σ-álgebras no necesariamente es una σ-álgebra, aún cuando $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_{j+1}$. ¿Es cierto que una unión numerable de σ-álgebras es un álgebra? (Ayuda: ponga $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_j$ la clase de todos los subconjuntos de $\{1, \dots, j\}$ y $\mathcal{F}_j = \sigma(\mathcal{C}_j)$. Por otro lado, si $\mathcal{F}_i, i = 1, 2$ son dos σ-álgebras, $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ no necesariamente es un álgebra.

12. Suponga que $\mathcal{C}$ es una clase no vacía de subconjuntos de Ω. Sea $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ el álgebra generada por $\mathcal{C}$. Demuestre que $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ consiste de los eventos de la forma

$$\bigcup_{i=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{n_i} A_{ij},$$

donde para cada i, j, o bien $A_{ij} \in \mathcal{C}$ o bien $A_{ij}^c \in \mathcal{C}$ y donde los m conjuntos $\cap_{j=1}^{n_i} A_{ij}$, $1 \leq i \leq m$ son disjuntos. Por lo tanto podemos representar explícitamente los conjuntos de $\mathcal{A}(\mathcal{C})$, aunque esto es imposible para la σ-álgebra $\sigma(\mathcal{C})$.

13. Suponga que $\mathcal{A}$ es un álgebra con la propiedad de ser cerrada bajo uniones numerables disjuntas. Demuestre que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra.

14. Demuestre que los borelianos en $[0, 1]$ pueden ser generados por una clase numerable de conjuntos.

15. Sean $\mathcal{F}_i$ σ-álgebras de subconjuntos de Ω para $i = 1, 2$. Demuestre que $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ definida como la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{F}_1$ y a $\mathcal{F}_2$ está generada por conjuntos de la forma $B_1 \cap B_2$, donde $B_i \in \mathcal{F}_i$, para $i = 1, 2$.

16. Sea Ω un conjunto no numerable y sea $\mathcal{G}$ la σ-álgebra que consiste de los conjuntos numerables y conumerables. Demuestre que $\mathcal{G}$ no puede ser generada por una colección numerable de conjuntos.

17. Una σ-álgebra no puede ser numerablemente infinita: Su cardinalidad debe ser finita o al menos la del continuo.

18. Para un subconjunto $A \subset \mathbb{N}$, $\text{card}(A)$ representa el número de elementos de A. Un conjunto de este tipo tiene densidad asintótica d si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{card}(A \cap \{1, 2, \ldots, n\})}{n} = d$$

Sea $\mathcal{A}$ la colección de subconjuntos que tienen densidad asintótica. ¿Es $\mathcal{A}$ un álgebra? ¿Es una σ-álgebra?

19. Sea $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ σ-álgebras de subconjuntos del espacio Ω. Determine si las siguientes colecciones de subconjuntos de Ω son σ-álgebras.

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{A : A \in \mathcal{F} \text{ y } A \in \mathcal{G}\}, \quad \mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \{A : A \in \mathcal{F} \text{ ó } A \in \mathcal{G}\}.$$

20. Sea Ω un conjunto no-vacío y sea $\mathcal{C}$ la clase de todos los subconjuntos de Ω con un solo elemento. Demuestre que

$$\sigma(\mathcal{C}) = \{A \subset \Omega : A \text{ es numerable }\} \cup \{A \subset \Omega : A^c \text{ es numerable }\}$$

21. Sea $\Omega = \{e^{i2\pi\theta}, 0 \leq \theta < 1\}$ el círculo unitario y sea $\mathcal{A}$ la colección de arcos en Ω con extremos racionales. Demuestre que $\mathcal{A}$ es un álgebra pero no una σ-álgebra.