Modelos Estocásticos I

Primer Examen Parcial

Viernes 9/9/16, 3:30 – 5:30 p.m.

1. (3 puntos) En una planta industrial se tiene un detector que activa un mecanismo de enfriamiento para la maquinaria cuando la temperatura sobrepasa un umbral de seguridad. La probabilidad de que esto ocurra en un periodo de una hora es de 0.2. Sin embargo, el detector tiene un defecto y falla 25 % de las veces. Cuando el detector falla, independientemente de cual sea la medida correcta, el resultado es positivo (detecta exceso de temperatura) con probabilidad 0.4 y negativo (detecta que no hay exceso de temperatura) con probabilidad 0.6.

   (a) En un periodo de una hora, ¿cuál es la probabilidad de que el detector indique que la temperatura excede el umbral?

   (b) Si el detector registra exceso de temperatura, ¿Cuál es la probabilidad de que realmente haya sido así?

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que el mecanismo registre el estado correcto? (Nota: el mecanismo puede registrar el estado correcto aún cuando falle).

Respuesta.

Usaremos la siguiente notación

- T: La temperatura excede el umbral de seguridad.
- E: Hay un error en el detector.
- R: El detector registra exceso de temperatura.
- C el detector registra el resultado correcto

Tenemos que $P(T) = 0.2,\ P(E) = 0.25,\ P(R|E) = 0.4.$

a) La probabilidad de que el detector registre que hay exceso de temperatura es

$$P(R) = P(R|E^c)P(E^c) + P(R|E)P(E) = 0.2 \cdot 0.75 + 0.4 \cdot 0.25 = 0.25$$

c) Tenemos

$$P(T|R) = \frac{P(R \cap T)}{P(R)} = \frac{P(R \cap T)}{0.25}$$

por el resultado del inciso (a). Veamos cuánto vale el numerador, podemos descomponer la intersección de los dos eventos según haya habido un error en el detector o no:

$$\begin{aligned} P(T \cap R) &= P(T \cap R \cap E) + P(T \cap R \cap E^c) \\ &= P(R|T \cap E)P(E|T)P(T) + P(R|T \cap E^c)P(E^c|T)P(T) \end{aligned}$$

Ahora bien, si hubo error, independientemente de si ha habido rexceso de temperatura o no, el aparato registra que lo ha habido con probabilidad 0.4, de modo que $P(R|T \cap E) = 0.4$. Por otro lado, la probabilidad de que haya un error es independiente de que haya habido o no exceso de temperatura: $P(E|T) = 0.25$ y $P(E^c|T) = 0.75$. Por último, si no hay error y hay exceso de temperatura, la probabilidad de que el detector registre este exceso es $P(R|T \cap E^c) = 1$. Por lo tanto

$$P(T \cap R) = 0.4 \cdot 0.25 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.75 \cdot 0.2 = 0.17$$

Finalmente

$$P(T|R) = \frac{0.17}{0.25} = 0.68$$

b) Llamemos C el evento de que el detector registre el resultado correcto. Su probabilidad es:

$$P(C) = P(C|E)P(E) + P(C|E^c)P(E^c)$$

Si el detector no falla la probabilidad de que indique el estado correcto es 1: $P(C|E^c) = 1$. Para hallar la otra probabilidad condicional observamos que $C = (T \cap R) \cup (T^c \cap R^c)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} P(C|E) &= P(T \cap R) \cup (T^c \cap R^c)|E) = P(T \cap R|E) + P(T^c \cap R^c|E) \\ &= P(T|E)P(R|E) + P(T^c|E)P(R^c|E) = 0.2 \cdot 04 + 0.8 \cdot 0.6 = 0.56 \end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que si el detector falla, el resultado que registra es independiente de si la temperatura excede el umbral o no. Finalmente

$$P(C) = P(C|E)P(E) + P(C|E^c)P(E^c) = 0.56 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.75 = 0.89.$$

2. (4 puntos) Sea A el triángulo de vértices $(0,0); (1,0); (0,1)$ y suponga que X, Y tienen densidad conjunta $f(x,y) = C\mathbf{1}_A(x,y)$.

   a) Determine el valor de la constante C y halle las distribuciones marginales de X e Y.

   b) Halle la densidad condicional de X dado que $Y = y$, $0 < y < 1$.

   c) ¿Son X e Y independientes? ¿Por qué?

   d) Halle $\mathrm{E}(X|Y)$.

   Respuesta.

   a) El área del triángulo es $1/2$ y por lo tanto $C = 2$. Para hallar la densidad marginal de X, integramos la densidad conjunta sobre y:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} 2\mathbf{1}_A(x,y)\,dy = \int_0^{1-x} 2\,dx = 2(1-x)$$

   para $0 < x < 1$. De manera análoga se obtiene que $f_Y(y) = 2(1-y)$ para $0 < y < 1$.

   b) La densidad condicional es

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2\mathbf{1}_A(x,y)}{2(1-y)\mathbf{1}_{(0,1)}(y)} = \frac{1}{1-y}\mathbf{1}_A(x,y)$$

   c) No son independientes porque la densidad condicional de X dado $Y = y$ depende del valor de Y. Alternativamente, porque $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.

d) La esperanza de X dado $Y = y$ es

$$\mathrm{E}(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_0^{1-y} \frac{x}{1-y}\,dx = \frac{(1-y)^2}{2(1-y)} = \frac{1-y}{2}$$

y por lo tanto $\mathrm{E}(X|Y) = (1-Y)/2$.

3. (3 puntos) Sea X una variable aleatoria con función de distribución

$$F(x) = \frac{1}{2}(x + x^2), \quad 0 \le x \le 1.$$

a) Describa en detalle el método de la transformada inversa para generar valores de esta variable.

b) ¿Cómo usaría el método de rechazo con el mismo propósito? (Describa en detalle).

Respuesta.

a) Tenemos que hallar la función inversa de F en $[0,1]$, que existe pues F es continua y estrictamente creciente en $[0,1]$. La función inversa G debe satisfacer $G(x) + G^2(x) = 2$. La ecuación $G(x)^2 + G(x) - 2x = 0$ tiene soluciones

$$G(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8x}}{2}$$

La solución negativa no tiene sentido en este problema y por lo tanto tenemos $G(x) = (-1+\sqrt{1+8x})/2$. Para generar una variable X con distribución F generamos una variable U con distribución uniforme en $[0,1]$ y ponemos $X = G(U) = (-1+\sqrt{1+8U})/2$.

b) Como el dominio de F es $[0,1]$, podemos usar una variable con distribución uniforme en $[0,1]$ para comparar. La densidad de F se obtiene derivando y es $f(x) = (1+2x)/2$, que es una función creciente con máximo en $x = 1$ igual a 1.5. Por lo tanto

$$\frac{f(x)}{g(x)} \le 1.5, \quad \forall x \in [0,1],$$

de modo que $C = 1.5$. El método de rechazo es el siguiente:

Paso 1. Generamos U_1, U_2 uniformes en $[0,1]$.

Paso 2. Si $U_2 \le (1+2U_1)/3$ ponemos $X = U_1$. En otro caso repetimos el procedimiento.

En promedio se requieren 1.5 pasos para obtener un valor de X por este método.